Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Х. Бештоков, Метод Римана для решения нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013, выпуск 4(), 15–24

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:30:53

Дифференциальные уравнения

УДК 517.954

МЕТОД РИМАНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

М. Х. Бештоков

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова
Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

E-mail: beshtokov_murat@rambler.ru

С помощью метода функции Римана доказаны существование и единственность регулярных решений нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами.

Ключевые слова: краевые задачи, метод функции Римана, нелокальное условие, уравнение в частных производных третьего порядка, псевдопараболическое уравнение.

Хорошо известно, что рассмотрение вопросов фильтрации жидкости в пористых средах [1, 2], передачи тепла в гетерогенной среде [3, 4], влагопереноса в почво-грунтах [5] (см. [6, с. 137]) приводит к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются псевдопараболическими уравнениями в частных производных третьего порядка.

В данной работе рассматриваются нелокальные краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами. Доказательство существования регулярных решений поставленных задач проводится методом функции Римана, причём функция Римана, которая вводится здесь, существенно отличается от рассмотренной в [7, 8]. В работе [9] рассматриваются локальные и нелокальные краевые задачи для псевдопараболических уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами. Доказательство основных утверждений в [9] проводится с помощью метода функции Римана, принцип построения которой используется в данной работе.

Задача А. Существование и единственность решения задачи А. В замкнутом прямоугольнике $\bar{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу:

$$Lu = (\eta(x, t)u_{xt})_x + (k(x, t)u_x)_x + r(x, t)u_x + du_t - q(x, t)u = -f(x, t), \\ 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \beta(t) \int_0^l u(x, t) dx + \int_0^t \rho(t, \tau) u(l, \tau) d\tau - \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u_x(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

где

$$\eta(x, t) \geq c_0 > 0, \quad c_0 = \text{const}; \quad \eta_{x,t}, \quad k_x, \quad r_x, \quad d_t, \quad q, \quad f \in C[\bar{D}]; \quad u_0(x) \in C^2[0, l], \quad (5)$$

$\beta(t)$, $\rho(t, \tau)$, $\mu(t)$ — функции, непрерывные на $[0, T]$, $0 \leq \tau \leq t$. Кроме этого, введём обозначение $\Pi(x, t) = ku_x + \eta u_{xt}$, которое будет использоваться далее.

Заметим, что нелокальное условие (2) можно заменить условием

$$u(0, t) = \beta(t) \int_0^h u(x, t) dx + \int_0^t \rho(t, \tau) u(l, \tau) d\tau - \mu(t),$$

где h — глубина корнеобитаемого слоя (см. [10]) или активный слой почвы, который участвует в водоснабжении корневой системы, в процессах испарения и транспирации. Поставленные и исследованные в данной работе задачи характерны также тем, что содержат в краевых условиях нелокальность по времени, впервые изученную А. И. Кожановым [11].

ТЕОРЕМА 1. Пусть коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2)–(4) удовлетворяют условиям гладкости (5), $d(x, t) < 0$ для любого $(x, t) \in D$ и $\beta(t) < 0$ для любого $t \in [0, T]$. Тогда задача (1)–(4) имеет единственное регулярное в $\bar{D}$ решение.

Доказательство. Следуя [9] введём аналог функции Римана $w = w(x, t; \alpha, \tau)$ для уравнения (1) в области $\Omega = \{(x, t) : \alpha < x < l, 0 < t < \tau\}$ в форме

$$\begin{aligned} Mw(x, t; \alpha, \tau) = \\ = -(\eta(x, t)w_x)_{xt} + (k(x, t)w_x)_x - (r(x, t)w)_x - (dw)_t - q(x, t)w = 0, \end{aligned}$$

$$w(\alpha, t; \alpha, \tau) = 0, \quad w_x(\alpha, t; \alpha, \tau) = \eta^{-1}(\alpha, \tau) \exp\left(\int_\tau^t \frac{k(\alpha, t_1)}{\eta(\alpha, t_1)} dt_1\right),$$

$$w(x, \tau; \alpha, \tau) = \omega_1(x, \tau),$$

где $\omega_1(x, \tau)$ — решение следующей задачи Коши:

$$(\eta(x, \tau)w_x(x, \tau; \alpha, \tau))_x + d(x, \tau)w(x, \tau; \alpha, \tau) = 0,$$

$$w(\alpha, \tau; \alpha, \tau) = 0, \quad w_x(\alpha, \tau; \alpha, \tau) = \eta^{-1}(\alpha, \tau).$$

Здесь и далее (α, τ) — произвольная фиксированная точка области D .

Имеет место соотношение

$$wLu - uMw = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (6)$$

где

$$Lu = (\eta u_{xt})_x + (ku_x)_x + ru_x + du_t - qu + f(x, t),$$

$$Q = \eta w u_{xt} + u(\eta w_x)_t + k w u_x - k w_x u + r u w, \quad P = \eta w_x u_x - d u w.$$

Потребуем непрерывности P, Q в $\bar{D}$, непрерывности и ограниченности P_x, Q_t в $\bar{D}$.

Проинтегрируем соотношение (6) по области Ω :

$$\int_{\Omega} (w L u - u M w) dx dt = \int_{\alpha}^l \int_0^{\tau} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right) dx dt. \quad (7)$$

Тогда из (7) с учётом определения функции $w = w(x, t; \alpha, \tau)$ получим представление

$$\begin{aligned} u(\alpha, \tau) = & u(l, \tau) \eta(l, \tau) w_x(l, \tau; \alpha, \tau) - \\ & - \int_0^{\tau} \left((\eta(l, t) u_{xt}(l, t) + k(l, t) u_x(l, t)) w(l, t; \alpha, \tau) + \right. \\ & + u(l, t) \left[(\eta(l, t) w_x(l, t; \alpha, \tau))_t - k(l, t) w_x(l, t; \alpha, \tau) + r(l, t) w(l, t; \alpha, \tau) \right] \Big) dt + \\ & + \int_{\alpha}^l \left(d(x, 0) w(x, 0; \alpha, \tau) u(x, 0) - \eta(x, 0) w_x(x, 0; \alpha, \tau) u_x(x, 0) \right) dx - \\ & - \int_0^{\tau} \int_{\alpha}^l w(x, t; \alpha, \tau) f(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Существование и единственность аналога функции Римана $w = w(x, t; \alpha, \tau)$ доказаны в работе [9].

Из представления (8) простым преобразованием получим

$$\begin{aligned} u(\alpha, \tau) = & u(l, \tau) \eta(l, \tau) w_x(l, \tau; \alpha, \tau) - u_x(l, \tau) \eta(l, \tau) w(l, \tau; \alpha, \tau) + \\ & + \int_0^{\tau} \left(u_x(l, t) \left[(\eta(l, t) w(l, t; \alpha, \tau))_t - k(l, t) w(l, t; \alpha, \tau) \right] - \right. \\ & - u(l, t) \left[(\eta(l, t) w_x(l, t; \alpha, \tau))_t - k(l, t) w_x(l, t; \alpha, \tau) + r(l, t) w(l, t; \alpha, \tau) \right] \Big) dt + \\ & + \int_{\alpha}^l \left(d(x, 0) w(x, 0; \alpha, \tau) u(x, 0) - \eta(x, 0) w_x(x, 0; \alpha, \tau) u_x(x, 0) \right) dx - \\ & - \int_0^{\tau} \int_{\alpha}^l w(x, t; \alpha, \tau) f(x, t) dx dt + u_x(l, 0) \eta(l, 0) w(l, 0; \alpha, \tau). \end{aligned} \quad (9)$$

Проинтегрируем (9) по α от 0 до l . Тогда с учётом (4) из (9) получим

$$\begin{aligned} \int_0^l u(\alpha, \tau) d\alpha = & u(l, \tau) \eta(l, \tau) \int_0^l w_x(l, \tau; \alpha, \tau) d\alpha - u_x(l, \tau) \eta(l, \tau) \int_0^l w(l, \tau; \alpha, \tau) d\alpha + \\ & + \int_0^{\tau} \left(K_1(\tau, t) u_x(l, t) - K_2(\tau, t) u(l, t) \right) dt + \gamma_1(\tau), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$K_1(\tau, t) = \int_0^l \left[(\eta(l, t) w(l, t; \alpha, \tau))_t - k(l, t) w(l, t; \alpha, \tau) \right] d\alpha,$$

$$K_2(\tau, t) = \int_0^l \left[(\eta(l, t)w_x(l, t; \alpha, \tau))_t - k(l, t)w_x(l, t; \alpha, \tau) + r(l, t)w(l, t; \alpha, \tau) \right] d\alpha,$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(\tau) = & \int_0^l \int_\alpha^l \left(d(x, 0)w(x, 0; \alpha, \tau)u_0(x) - \eta(x, 0)w_x(x, 0; \alpha, \tau)u'_0(x) \right) dx d\alpha - \\ & - \int_0^\tau \int_0^l \int_\alpha^l w(x, t; \alpha, \tau)f(x, t) dx d\alpha dt + \int_0^l u_x(l, 0)\eta(l, 0)w(l, 0; \alpha, \tau) d\alpha. \end{aligned}$$

Учитывая (10), из (2) получим

$$\begin{aligned} u(0, \tau) - u(l, \tau)\beta(\tau)\eta(l, \tau) \int_0^l w_x(l, \tau; \alpha, \tau) d\alpha + u_x(l, \tau)\beta(\tau)\eta(l, \tau) \times \\ \times \int_0^l w(l, \tau; \alpha, \tau) d\alpha + \int_0^\tau \left(K_3(\tau, t)u_x(l, t) + K_4(\tau, t)u(l, t) \right) dt = \gamma_2(\tau), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} K_3(\tau, t) = -\beta(\tau)K_1(\tau, t), \quad K_4(\tau, t) = \beta(\tau)K_2(\tau, t) - \rho(\tau, t), \\ \gamma_2(\tau) = \beta(\tau)\gamma_1(\tau) - \mu(\tau). \end{aligned}$$

Учитывая (4), из представления (9) при $\alpha = 0$ получим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} u(0, \tau) - u(l, \tau)\eta(l, \tau)w_x(l, \tau; 0, \tau) + u_x(l, \tau)\eta(l, \tau)w(l, \tau; 0, \tau) + \\ + \int_0^\tau \left(K_5(\tau, t)u_x(l, t) + K_6(\tau, t)u(l, t) \right) dt = \gamma_3(\tau), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} K_5(t, \tau) = -(\eta(l, t)w(l, t; 0, \tau))_t + k(l, t)w(l, t; 0, \tau), \\ K_6(t, \tau) = (\eta(l, t)w_x(l, t; 0, \tau))_t - k(l, t)w_x(l, t; 0, \tau) + r(l, t)w(l, t; 0, \tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(\tau) = & \int_0^l \left(d(x, 0)w(x, 0; 0, \tau)u_0(x) - \eta(x, 0)w_x(x, 0; 0, \tau)u'_0(x) \right) dx - \\ & - \int_0^\tau \int_0^l w(x, t; 0, \tau)f(x, t) dx dt + \eta(l, 0)w(l, 0; 0, \tau)u'_0(l). \end{aligned}$$

Учитывая (3), из (11) и (12) получим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u(0, \tau) - u(l, \tau)\beta(\tau)\eta(l, \tau) \int_0^l w_x(l, \tau; \alpha, \tau) d\alpha + \int_0^\tau \left(K_4(\tau, t)u(l, t) \right) dt = \gamma_2(\tau), \\ u(0, \tau) - u(l, \tau)\eta(l, \tau)w_x(l, \tau; 0, \tau) + \int_0^\tau \left(K_6(\tau, t)u(l, t) \right) dt = \gamma_3(\tau), \end{aligned} \quad (13)$$

которая в операторной форме принимает вид

$$A(\tau)\vec{u}(\tau) + \int_0^\tau B(\tau, t)\vec{u}(t)dt = \vec{\gamma}(\tau),$$

где

$$\det |A(\tau)| = \beta(\tau)\eta(l, \tau) \int_0^l w_x(l, \tau; \alpha, \tau)d\alpha - \eta(l, \tau)w_x(l, \tau; 0, \tau).$$

Покажем, что определитель $\det |A(\tau)| \neq 0$.

ЛЕММА 1. Функция $w(x, t; \alpha, \tau)$ удовлетворяет неравенству

$$w(x, \tau; 0, \tau) > 0 \text{ для любого } x \in (0, l], \quad \eta(l, \tau)w_x(l, \tau; 0, \tau) > 1,$$

если $d(x, t) < 0$, $\eta(x, t) \geq c_0 > 0$ для любых $(x, t) \in D$.

Доказательство. Следуя рассуждениям [9], рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} (\eta(x, \tau)w_x(x, \tau; \alpha, \tau))_x + d(x, \tau)w(x, \tau; \alpha, \tau) &= 0, \\ w(\alpha, \tau; \alpha, \tau) &= 0, \quad w_x(\alpha, \tau; \alpha, \tau) = \eta^{-1}(\alpha, \tau). \end{aligned} \quad (14)$$

С помощью принципа максимума и принципа Заремба—Жиро из (14) получаем $w_x(0, \tau; 0, \tau) > 0$ для любого $(x, t) \in [0, l)$. Тогда из равенства

$$\eta(l, \tau)w_x(l, \tau; 0, \tau) = \eta(0, \tau)w_x(0, \tau; 0, \tau) - \int_0^l d(x, \tau)w(l, \tau; 0, \tau)dx$$

имеем, что если $d(x, t) < 0$, $\eta(x, t) \geq c_0 > 0$ для любых $(x, t) \in D$, то

$$\eta(l, \tau)w_x(l, \tau; 0, \tau) > 1. \quad \square$$

На основании доказанной леммы убеждаемся, что если $\beta(\tau) < 0$ для любого $\tau \in [0, T]$, то $\det |A(\tau)| \neq 0$. Поэтому система уравнений (13) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая безусловно разрешима. Таким образом, находя из интегральных уравнений Вольтерра $u(0, \tau) = f(\tau)$, $u(l, \tau) = \varphi(\tau)$, где $f(\tau), \varphi(\tau) \in C^1[0, T]$, задачу (1)–(4) редуцируем к первой начально-краевой задаче, однозначная разрешимость которой установлена также в работе [9]. Отсюда следуют существование и единственность решения задачи (1)–(4). Теорема доказана. $\square$

Заметим, что (3) можно заменить условием

$$-u_x(l, t) = \int_0^t \rho_1(t, \tau)u(l, \tau)d\tau - \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $\rho_1(t, \tau), \mu_1(t)$ — функции, непрерывные на $[0, T]$.

Задача В. Существование и единственность решения задачи В. Рассмотрим теперь нелокальную краевую задачу, когда условие (3) в задаче А заменяется условием вида

$$-u_x(l, t) = \beta_1(t)u(l, t) - \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3^*)$$

где $\beta_1(t)$, $\mu_1(t)$ — функции, непрерывные на $[0, T]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2), (3*), (4) удовлетворяют условиям гладкости (5), $d(x, t) < 0$ для любых $(x, t) \in D$, $\beta(t) < 0$ и $\beta_1(t) > 0$ для любого $t \in [0, T]$. Тогда задача (1), (2), (3*), (4) имеет единственное регулярное в $\bar{D}$ решение.

Доказательство. С учётом (3*) уравнения (11) и (12) образуют следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} u(0, \tau) - u(l, \tau) & \left[\beta(\tau) \eta(l, \tau) \int_0^l w_x(l, \tau; \alpha, \tau) d\alpha + \right. \\ & \left. + \beta(\tau) \beta_1(\tau) \eta(l, \tau) \int_0^l w(l, \tau; \alpha, \tau) d\alpha \right] + \\ & + \int_0^\tau \left(K_7(\tau, t) u(l, t) \right) dt = \gamma_4(\tau), \\ u(0, \tau) - u(l, \tau) & \left[\eta(l, \tau) w_x(l, \tau; 0, \tau) + \beta_1(\tau) \eta(l, \tau) w(l, \tau; 0, \tau) \right] + \\ & + \int_0^\tau \left(K_8(\tau, t) u(l, t) \right) dt = \gamma_5(\tau), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} K_7(\tau, t) &= K_4(\tau, t) - K_3(\tau, t) \beta_1(\tau), \\ \gamma_4(\tau) &= \gamma_2(\tau) - \beta(\tau) \eta(l, \tau) \mu_1(\tau) \int_0^l w(l, \tau; \alpha, \tau) d\alpha - \int_0^\tau \left(K_3(\tau, t) \mu_1(\tau) \right) dt, \\ K_8(\tau, t) &= K_6(\tau, t) - K_5(\tau, t) \beta_1(\tau), \\ \gamma_5(\tau) &= \gamma_3(\tau) - \eta(l, \tau) \mu_1(\tau) w(l, \tau; \alpha, \tau) - \int_0^\tau \left(K_5(\tau, t) \mu_1(\tau) \right) dt. \end{aligned}$$

Систему интегральных уравнений (15) перепишем в операторной форме

$$A(\tau) \vec{u}(\tau) + \int_0^\tau B(\tau, t) \vec{u}(t) dt = \vec{\gamma}(\tau), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \det |A(\tau)| &= -\eta(l, \tau) w_x(l, \tau; 0, \tau) - \beta_1(\tau) \eta(l, \tau) w(l, \tau; 0, \tau) + \\ &+ \beta(\tau) \eta(l, \tau) \int_0^l w_x(l, \tau; \alpha, \tau) d\alpha + \beta(\tau) \beta_1(\tau) \eta(l, \tau) \int_0^l w(l, \tau; \alpha, \tau) d\alpha. \end{aligned}$$

На основании леммы 1 при условии, что если $\beta(\tau) < 0$, $\beta_1(\tau) > 0$ для любого $\tau \in [0, T]$, убеждаемся, что определитель $\det |A(\tau)| \neq 0$. Поэтому система уравнений (16) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая безусловно разрешима. Таким образом, находя из интегральных уравнений Вольтерра $u(0, \tau) = f(\tau)$, $u(l, \tau) = \varphi(\tau)$, где $f(\tau)$, $\varphi(\tau) \in C^1[0, T]$, задачу (1), (2), (3*), (4) редуцируем к первой начально-краевой задаче, однозначная разрешимость которой установлена в работе [9]. Отсюда следуют существование и единственность решения задачи (1), (2), (3*), (4). □

Задача С. Существование и единственность решения задачи С. Рассмотрим теперь нелокальную краевую задачу, когда условие (3) в задаче А заменяется условием вида

$$-\Pi(l, t) = \beta_1(t)u(l, t) - \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3^{**})$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть коэффициенты уравнения (1) и граничных условий (2), (3^{**}), (4) удовлетворяют условиям гладкости (5), $d(x, t) < 0$ для любого $(x, t) \in D$ и $\beta(t) < 0$ для любых $t \in [0, T]$. Тогда задача (1), (2), (3^{**}), (4) имеет единственное регулярное в $\bar{D}$ решение.

Доказательство. Проинтегрируем (8) по α от 0 до l . Тогда с учётом (4) получим

$$\begin{aligned} \int_0^l u(\alpha, \tau) d\alpha &= u(l, \tau)\eta(l, \tau) \int_0^l w_x(l, \tau; \alpha, \tau) d\alpha - \\ &- \int_0^\tau \left(K_9(\tau, t)\Pi(l, t) + K_{10}(\tau, t)u(l, t) \right) dt + \gamma_6(\tau), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$K_9(\tau, t) = \int_0^l w(l, t; \alpha, \tau) d\alpha,$$

$$K_{10}(\tau, t) = \int_0^l \left((\eta(l, t)w_x(l, t; \alpha, \tau))_t - k(l, t)w_x(l, t; \alpha, \tau) + r(l, t)w(l, t; \alpha, \tau) \right) d\alpha,$$

$$\begin{aligned} \gamma_7(\tau) &= \int_0^l \int_\alpha^l \left(d(x, 0)w(x, 0; \alpha, \tau)u_0(x) - \eta(x, 0)w_x(x, 0; \alpha, \tau)u'_0(x) \right) dx d\alpha - \\ &- \int_0^\tau \int_0^l \int_\alpha^l w(x, t; \alpha, \tau) f(x, t) dx d\alpha dt. \end{aligned}$$

Учитывая (2), (3^{**}), из (17) получим

$$\begin{aligned} u(0, t) - u(l, \tau)\beta(\tau)\eta(l, \tau) \int_0^l w_x(l, \tau; \alpha, \tau) d\alpha + \\ + \int_0^\tau \left(K_{11}(\tau, t)u(l, t) \right) dt = \gamma_8(\tau), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11}(\tau, t) &= \beta(\tau)K_{10}(\tau, t) - \beta(\tau)\beta_1(\tau)K_9(\tau, t) - \rho(\tau, t), \\ \gamma_8(\tau) &= \beta(\tau)\gamma_7(\tau) - \mu(\tau) - \int_0^\tau \beta(\tau)K_9(\tau, t)\mu_1(t) dt. \end{aligned}$$

При $\alpha = 0$ из (8) с учётом (3^{**}) получаем

$$u(\alpha, \tau) - u(l, \tau)\eta(l, \tau)w_x(l, \tau; 0, \tau) + \int_0^\tau \left(K_{12}(\tau, t)u(l, t) \right) dt = \gamma_9(\tau), \quad (19)$$

где

$$K_{12}(\tau, t) = (\eta(l, t)w_x(l, t; 0, \tau))_t - k(l, t)w_x(l, t; 0, \tau) + r(l, t)w(l, t; 0, \tau) - \beta_1(\tau)w(l, t; 0, \tau),$$

$$\begin{aligned} \gamma_9(\tau) = & \int_0^l (d(x, 0)w(x, 0; 0, \tau)u_0(x) - \eta(x, 0)w_x(x, 0; 0, \tau)u'_0(x))dx - \\ & - \int_0^\tau \int_0^l w(x, t; 0, \tau)f(x, t)dxdt - \int_0^\tau w(l, t; 0, \tau)\mu_1(t)dt. \end{aligned}$$

Уравнения (18) и (19) образуют систему интегральных уравнений. Запишем систему в операторном виде

$$A(\tau)\vec{u}(\tau) + \int_0^\tau B(\tau, t)\vec{u}(t)dt = \vec{\gamma}(\tau), \quad (20)$$

где

$$\det |A(\tau)| = \beta(\tau)\eta(l, \tau) \int_0^l w_x(l, \tau; \alpha, \tau)d\alpha - \eta(l, \tau)w_x(l, \tau; 0, \tau).$$

На основании леммы 1 при условии $\beta(\tau) < 0$ для любых $\tau \in [0, T]$ убеждаемся, что определитель $\det |A(\tau)| \neq 0$. Поэтому система уравнений (20) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая безусловно разрешима. Таким образом, находя из интегральных уравнений Вольтерра $u(0, \tau) = f(\tau)$, $u(l, \tau) = \varphi(\tau)$, где $f(\tau)$, $\varphi(\tau) \in C^1[0, T]$, задачу (1), (2), (3**), (4) редуцируем к первой начально-краевой задаче, однозначная разрешимость которой установлена в работе [9]. Отсюда следуют существование и единственность решения задачи (1), (2), (3**), (4). $\square$

Заметим, что (3) также можно заменить условием

$$-\Pi(l, t) = \int_0^t \rho_1(t, \tau)u(l, \tau)d\tau - \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если ввести аналог функции Римана $\nu = \nu(x, t; \xi, \tau)$ для уравнения (1) в области Ω в форме

$$\begin{aligned} M\nu(x, t; \xi, \tau) = & -(\eta(x, t)\nu_x)_{xt} + (k(x, t)\nu_x)_x - (r(x, t)\nu)_x - (d\nu)_t - q(x, t)\nu = 0, \\ \nu(\xi, t; \xi, \tau) = & 0, \quad \nu_x(\xi, t; \xi, \tau) = \eta^{-1}(\xi, \tau) \exp\left(\int_\tau^t \frac{k(\xi, t_1)}{\eta(\xi, t_1)}dt_1\right), \\ \nu(x, \tau; \xi, \tau) = & \omega_2(x, \tau), \end{aligned}$$

где $\omega_2(x, \tau)$ — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} (\eta(x, \tau)\nu_x(x, \tau; \xi, \tau))_x + d(x, \tau)\nu(x, \tau; \xi, \tau) = & 0, \\ \nu(\xi, \tau; \xi, \tau) = & 0, \quad \nu_x(\xi, \tau; \xi, \tau) = \eta^{-1}(\xi, \tau), \end{aligned}$$

то имеет место следующее представление:

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau) = & u(0, \tau)\eta(0, \tau)\nu_x(0, \tau; \xi, \tau) - \int_0^\tau \left(\eta(0, t)\nu(0, t; \xi, \tau)u_{xt}(0, t) + \right. \\ & + k(0, t)\nu(0, t; \xi, \tau)u_x(0, t) + u(0, t) \left[\left(\eta(0, t)\nu_x(0, t; \xi, \tau) \right)_t - k(0, t)\nu_x(0, t; \xi, \tau) + \right. \\ & \left. \left. + r(0, t)\nu(0, t; \xi, \tau) \right] \right) dt + \int_0^\xi \left(\eta(x, 0)\nu_x(x, 0; \xi, \tau)u_x(x, 0) - \right. \\ & \left. - d(x, 0)\nu(x, 0; \xi, \tau)u(x, 0) \right) dx + \int_0^\tau \int_0^\xi \nu(x, t; \xi, \tau)f(x, t)dxdt. \quad (21) \end{aligned}$$

Существование и единственность аналога функции Римана доказаны в [9].

ЛЕММА 2. *Функция $\nu(x, t; \xi, \tau)$ удовлетворяет неравенству*

$$\nu(x, \tau; l, \tau) < 0 \quad \text{для любого } x \in [0, l), \quad \eta(0, \tau)\nu_x(0, \tau; l, \tau) > 1,$$

если $d(x, t) < 0$, $\eta(x, t) \geq c_0 > 0$ для любого $(x, t) \in D$.

На основании леммы 2 и представления (21) аналогично доказываются существование и единственность регулярных решений задач А, В, С, в которых условие (2) заменяется последовательно следующими условиями:

$$1) \quad u_x(0, t) = \beta(t) \int_0^l u(x, t)dx + \int_0^t \rho(t, \tau)u(l, \tau)d\tau - \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

при условии, что $\beta(t) > 0$;

$$2) \quad \Pi(0, t) = \beta(t) \int_0^l u(x, t)dx + \int_0^t \rho(t, \tau)u(l, \tau)d\tau - \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации. Регистрационный номер НИР: № 1.6197.2011.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Г. И. Баренблат, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина, "Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах" // *ПММ*, 1960. Т. 24, № 5. С. 852–864; англ. пер.: G. I. Barenblatt, Yu. P. Zheltov, I. N. Kochina, "Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]" // *J. Appl. Math. Mech.*, 1960. Vol. 24, no. 5. Pp. 1286–1303.
2. Е. С. Дзекцер, "Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах" // *Докл. Акад. наук СССР*, 1975. Т. 220, № 3. С. 540–543; англ. пер.: E. S. Dzektser, "Equation of motion of underground water with a free surface in multilayer media" // *Soviet Physics Doklady*, 1975. Vol. 20, no. 3. Pp. 24.
3. Л. И. Рубинштейн, "К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах" // *Изв. Акад. наук СССР, Сер. Геогр.*, 1948. Т. 12, № 1. С. 27–45. [L. I. Rubinstein, "On the problem of the process of propagation of heat in heterogeneous media" // *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geogr.*, 1948. Vol. 12, no. 1. Pp. 27–45].
4. T. W. Ting, "A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction" // *J. Math. Anal. Appl.*, 1974. Т. 45, № 1. С. 23–31.

5. M. Hallaire, S. de Parcevaux, R. J. Bouchet, et. al., L'eau et la production végétale. Paris: Institut National De La Recherche Agronomique, 1964. 455 pp.
6. А. Ф. Чудновский, Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с. [A. F. Chudnovsky, Thermophysics of the soil. Moscow: Nauka, 1976. 352 pp.]
7. D. Colton, "Pseudoparabolic equation in one space variable" // *J. Diff. Eq.*, 1972. Vol. 12, no. 3. Pp. 559–565.
8. D. Colton, "Integral operators and the first initial-boundary value problems for pseudoparabolic equations with analytic coefficients" // *J. Diff. Eq.*, 1973. Vol. 13, no. 3. Pp. 506–522.
9. М. Х. Шхануков, "О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах" // *Дифф. уравн.*, 1982. Т. 18, № 4. С. 689–699. [M. Kh. Shkhanukov, "On some boundary-value problems for a third-order equation arising when modelling fluid filtration in porous media" // *Differ. Uravn.*, 1982. Vol. 18, no. 4. Pp. 689–699].
10. А. Ф. Чудновский, "Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло- и влагопереноса в почве" // *Сб. трудов АФИ*, 1969. № 23. С. 41–54. [A. F. Chudnovsky, "Some adjustments in the formulation and solution of problems of heat and moisture transfer in the soil" // *Sb. Trudov AFI*, 1969. no. 23. Pp. 41–54].
11. А. И. Кожанов, "Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера" // *Дифф. уравн.*, 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774; англ. пер.: A. I. Kozhanov, "On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation" // *Differ. Equ.*, 2004. Vol. 40, no. 6. Pp. 815–826.

Поступила в редакцию 10/I/2013;
в окончательном варианте — 27/III/2013.

MSC: 35K70; 35K35, 35C15, 35A20

RIEMANN METHOD FOR SOLVING NON-LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE THIRD ORDER PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS

M. H. Beshtokov

Kabardino-Balkarian State University,
173, Chernyshevskogo st., Nalchik, 360004, Russia.

E-mail: beshtokov_murat@rambler.ru

The existence and uniqueness of regular solutions of non-local boundary value problems for the third order pseudoparabolic equations with variable coefficients are proved using the Riemann function method.

Keywords: boundary value problems, the Riemann function method, non-local condition, partial differential equation of the third order, pseudoparabolic equation.

Original article submitted 10/I/2013;
revision submitted 27/III/2013.