Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Череватенко, Многообразия линейных алгебр полиномиального роста, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013, выпуск 4(), 7–14

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1262>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:51:34

Алгебра

УДК 512.572

МНОГООБРАЗИЯ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБР ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

О. И. Череватенко

Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова,
Россия, 432063, Ульяновск, пл. 100-летия со дня рождения В. И. Ленина, 4.

E-mail: chai@pisem.net

Приведён обзор результатов о многообразиях линейных алгебр полиномиального роста. Приводятся эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий ассоциативных алгебр, многообразий алгебр Ли, многообразий алгебр Лейбница, многообразий алгебр Пуассона и многообразий алгебр Лейбница–Пуассона. Показано, что при изучении многообразий линейных алгебр полиномиального роста важную роль играют многообразия почти полиномиального роста.

Ключевые слова: ассоциативная алгебра, алгебра Пуассона, алгебра Ли, многообразие алгебр, рост многообразия.

Введение. На протяжении всей работы предполагается, если это специально не оговорено, что основное поле имеет нулевую характеристику.

Пусть $K(X)$ — свободная алгебра над полем K , где $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счётное множество свободных образующих. Обозначим через A некоторую PI -алгебру. Совокупность всех тождеств алгебры A образует T -идеал $Id(A)$ в свободной алгебре $K(X)$. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр, порождённое алгеброй A . Тогда алгебра $K(X, \mathbf{V}) = K(X)/Id(A)$ является относительно свободной алгеброй многообразия $\mathbf{V}$.

Пусть P_n — подпространство в пространстве $K(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. В случае основного поля нулевой характеристики вся информация о многообразии $\mathbf{V}$ содержится в его полилинейных компонентах $P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap Id(\mathbf{V}))$, $n = 1, 2, \dots$. Асимптотическое поведение последовательности $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \dots$, называют ростом многообразия $\mathbf{V}$. Говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный рост, если существуют такие константы C и k , что для любого n выполнено неравенство $c_n(\mathbf{V}) \leq Cn^k$.

Пространство $P_n(\mathbf{V})$ наделено структурой левого S_n -модуля, где S_n — симметрическая группа степени n . Напомним, что последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ называют *разбиением числа n* и обозначают $\lambda \vdash n$, если $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$ и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$. Пусть χ_λ — характер неприводимого представления симметрической группы, соответствующий разбиению λ числа n . Тогда в силу вполне приводимости модуля $P_n(\mathbf{V})$ для многообразия $\mathbf{V}$ имеет место разложение

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi_n(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V}) \chi_\lambda, \quad (1)$$

где $m_\lambda(\mathbf{V})$ — степени неприводимых представлений, соответствующих разбиению λ числа n . Кодлина многообразия определяется как сумма

$$l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V}).$$

Если λ — разбиение некоторого числа n , то будем обозначать символом λ' сопряженное разбиение к λ .

В следующей теореме приводится критерий полиномиального роста для общего случая.

ТЕОРЕМА 1 [1]. Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие линейных алгебр. Последовательность $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$ ограничена полиномом тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (i) существует такая константа C , что в сумме (1) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ в случае, если либо выполнено условие $n - \lambda_1 > C$, либо $n - \lambda'_1 > C$;
- (ii) существуют такие константы C и k , что для любого n существует $m \leq Cn^k$ расстановок скобок $T_1, T_2, \dots, T_m$ таких, что любой элемент $f \in P_n(\mathbf{V})$ может быть записан как

$$f = \sum_{i=1}^m f_i \pmod{Id(\mathbf{V})},$$

где $f_i \in P_n^{T_i}(\mathbf{V})$.

Далее будут приведены более конкретные эквивалентные условия полиномиального роста для конкретных случаев.

Договоримся опускать скобки при их левонормированной расстановке:

$$((ab)c) = abc.$$

Ассоциативные алгебры. В теории ассоциативных алгебр очень важную роль играет бесконечно порожденная алгебра Грассмана Λ и алгебра верхнетреугольных матриц порядка 2, которую обозначим через UT_2 .

ТЕОРЕМА 2 [2]. Для алгебры Λ верны следующие утверждения:

- (i) полилинейное тождество $[x, y, z] = 0$ порождает идеал тождеств алгебры Грассмана Λ ;
- (ii) рост многообразия $\text{var}(\Lambda)$, порождённого алгеброй Λ , является почти полиномиальным, причём $c_n(\Lambda) = 2^{n-1}$;
- (iii) базис полилинейной компоненты $P_n(\Lambda)$ состоит из элементов вида

$$[x_{i_1}, x_{i_2}] \dots [x_{i_{2p-1}}, x_{i_{2p}}] x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_q},$$

где $\{i_1, \dots, i_{2p}, j_1, \dots, j_q\} = \{1, \dots, n\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_{2p}$, $j_1 < \dots < j_q$.

ТЕОРЕМА 3 [2]. Для алгебры UT_2 верны следующие утверждения:

- (i) полилинейное тождество $[x_1, x_2][x_3, x_4] = 0$ порождает идеал тождеств алгебры UT_2 ;
- (ii) рост многообразия $\text{var}(UT_2)$, порождённого алгеброй UT_2 , является почти полиномиальным, причём $c_n(UT_2) = 2^{n-1}(n-2) + 2$;

(iii) базис полилинейной компоненты $P_n(UT_2)$ состоит из элементов вида

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}] x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_q},$$

где $\{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q\} = \{1, \dots, n\}$, $j_1 < \dots < j_q$ и переменные в коммутаторе $[x_{i_1}, \dots, x_{i_p}]$ упорядочены следующим образом:

$$i_1 > i_2 > i_3 > \dots > i_p.$$

ТЕОРЕМА 4 [3]. Для многообразия ассоциативных алгебр $\mathbf{V}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) последовательность $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$ ограничена полиномом;
- (ii) $UT_2 \notin \mathbf{V}$, $\Lambda \notin \mathbf{V}$;
- (iii) существует такая константа C , что в сумме (1) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ в случае, если выполнено условие $n - \lambda_1 > C$;
- (iv) кодлина многообразия $\mathbf{V}$ является конечной.

Алгебры Ли. Пусть $\mathbf{N}_s \mathbf{A}$ — многообразие алгебр Ли, определяемое тождеством $[[x_1, x_2], \dots, [x_{2s+1}, x_{2s+2}]] = 0$. В работе [4] показано, что многообразие $\mathbf{N}_2 \mathbf{A}$ имеет почти полиномиальный рост.

ТЕОРЕМА 5 [5, 6]. Для многообразия алгебр Ли $\mathbf{V}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) многообразие $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный рост;
- (ii) для некоторого s выполнено условие $\mathbf{N}_2 \mathbf{A} \not\subseteq \mathbf{V} \subset \mathbf{N}_s \mathbf{A}$;
- (iii) существует такая константа C , что в сумме (1) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ в случае, если выполнено условие $n - \lambda_1 > C$.

Обозначим через $\mathbf{A}^2$ метабелево многообразие алгебр Ли, которое определяется тождеством $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] = 0$. Хорошо известно, что многообразие $\mathbf{A}^2$ является наименьшим многообразием среди всех многообразий алгебр Ли роста не ниже полиномиального, то есть если рост некоторого многообразия $\mathbf{V}$ не ниже полиномиального, то $\mathbf{A}^2 \subseteq \mathbf{V}$.

Алгебры Лейбница. Алгебры Лейбница — неантикоммутативные алгебры Ли, которые определяются тождеством Лейбница

$$[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]].$$

Тождество Лейбница представляет собой следующее условие: оператор правого умножения на любой элемент алгебры является дифференцированием.

Обозначим через $\widetilde{\mathbf{N}}_s \mathbf{A}$ многообразие алгебр Лейбница, определяемое тождеством

$$[[x_1, x_2], \dots, [x_{2s+1}, x_{2s+2}]] = 0.$$

Понятно, что многообразие $\widetilde{\mathbf{N}}_s \mathbf{A}$ с тождеством $[x, x] = 0$ — в точности многообразие $\mathbf{N}_s \mathbf{A}$.

Обозначим через $\widetilde{\mathbf{V}}_1$ многообразие алгебр Лейбница, определенное тождеством $[x_1, [x_2, x_3], [x_4, x_5]] = 0$. Данное многообразие имеет почти полиномиальный рост (см. [7]).

ТЕОРЕМА 6 [8, 9]. Для многообразия алгебр Лейбница $\mathbf{V}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) многообразие $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный рост;
- (ii) для некоторого s выполнено условие

$$\mathbf{N}_2\mathbf{A}, \widetilde{\mathbf{V}}_1 \not\subseteq \mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}}_s\mathbf{A};$$

- (iii) существует такая константа C , что в сумме (1) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ в случае, если выполнено условие $n - \lambda_1 > C$.

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Лейбница, определённое тождеством

$$[x, [y, z]] = 0.$$

В работе [10] показано, что многообразия $\mathbf{A}^2$ и $\mathbf{V}$ исчерпывают весь список минимальных многообразий среди всех многообразий алгебр Лейбница роста не ниже полиномиального, то есть если рост некоторого многообразия $\mathbf{V}$ не ниже полиномиального, то либо $\mathbf{A}^2 \subseteq \mathbf{V}$, либо $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{V}$.

Алгебры Пуассона. Алгебра $A = A(+, \cdot, \{, \}, K)$ над произвольным полем K называется алгеброй Пуассона, если $A(+, \cdot, K)$ — ассоциативная коммутативная алгебра с единицей, $A(+, \{, \}, K)$ — алгебра Ли с операцией умножения $\{, \}$, которая называется скобкой Пуассона, и выполняется правило Лейбница:

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \quad a, b, c \in A.$$

Пусть Λ — бесконечномерная алгебра Грассмана с единицей и операцией умножения $\wedge$. Введём в алгебре Λ два новых умножения:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(a \wedge b + b \wedge a), \quad \{a, b\} = a \wedge b - b \wedge a, \quad a, b \in \Lambda.$$

Нетрудно проверить, что алгебра $(\Lambda, +, \cdot, \{, \})$ будет алгеброй Пуассона, которую обозначим через G .

ТЕОРЕМА 7 [11]. Для алгебры G верны следующие утверждения:

- (i) полилинейное тождество $\{x, y, z\} = 0$ порождает идеал тождеств алгебры Пуассона G ;
- (ii) рост многообразия $\text{var}(G)$, порождённого алгеброй G , является почти полиномиальным, причём $c_n(G) = 2^{n-1}$;
- (iii) базис полилинейной компоненты $P_n(G)$ состоит из элементов вида

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \cdot \dots \cdot \{x_{i_{2p-1}}, x_{i_{2p}}\} \cdot x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdot \dots \cdot x_{j_q},$$

где $\{i_1, \dots, i_{2p}, j_1, \dots, j_q\} = \{1, \dots, n\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_{2p}$, $j_1 < \dots < j_q$.

Пусть A_L — некоторая ненулевая алгебра Ли с левым умножением $[,]$ над произвольным полем K . Рассмотрим векторное пространство $A = A_L \oplus K$, в котором определим операции $\cdot$ и $\{, \}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} (a + \alpha) \cdot (b + \beta) &= (\beta a + \alpha b) + \alpha \beta, \\ \{a + \alpha, b + \beta\} &= [a, b], \quad a, b \in A_L, \quad \alpha, \beta \in K. \end{aligned} \tag{2}$$

Тогда полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{, \}, K)$ будет являться алгеброй Пуассона.

Пусть U_2^L — двумерная метабелева алгебра Ли с базисом $\{a, b\}$ и таблицей умножения $[a, b] = a$, $[b, a] = -a$, $[a, a] = [b, b] = 0$. Обозначим через U_2 алгебру Пуассона $U_2^L \oplus K$ с операциями (2).

ТЕОРЕМА 8 [12]. Для алгебры U_2 верны следующие утверждения:

(i) полилинейные тождества

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\} = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры Пуассона U_2 ;

- (ii) рост многообразия $\text{var}(U_2)$, порождённого алгеброй U_2 , является почти полиномиальным, причём $c_n(U_2) = 2^{n-1}(n-2) + 2$;
- (iii) базис полилинейной компоненты $P_n(U_2)$ состоит из элементов вида

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}\} \cdot x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdot \dots \cdot x_{j_q},$$

где $\{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q\} = \{1, \dots, n\}$, $j_1 < \dots < j_q$ и переменные в мономе $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\}$ упорядочены следующим образом:

$$i_1 > i_2 < i_3 < \dots < i_p.$$

Следующая теорема показывает, что в случае алгебр Пуассона алгебры U_2 и G играют ту же роль, что и алгебры UT_2 и Λ в ассоциативном случае.

ТЕОРЕМА 9 [12]. Для многообразия алгебр Пуассона $\mathbf{V}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) последовательность $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$ ограничена полиномом;
- (ii) $U_2 \notin \mathbf{V}$, $G \notin \mathbf{V}$;
- (iii) существует такая константа C , что в сумме (1) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ в случае, если выполнено условие $n - \lambda_1 > C$;
- (iv) кодлина многообразия $\mathbf{V}$ является конечной.

Пусть N_3^L — трёхмерная нильпотентная алгебра Ли с базисом $\{a, b, c\}$ и таблицей умножения $[b, a] = c$, $[a, c] = [b, c] = 0$. Обозначим через N_3 алгебру Пуассона $N_3^L \oplus K$ с операциями (2).

Пусть Λ_{2n} — алгебра Грассмана с единицей и $2n$ образующими элементами $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$. Определим в алгебре Λ_{2n} операции умножения $()$. Полученную алгебру Пуассона обозначим через G_{2n} .

Следующая теорема показывает, что многообразие, порождённое либо алгеброй N_3 , либо алгеброй G_2 , является наименьшим многообразием алгебр Пуассона в классе всех многообразий алгебр Пуассона, имеющих рост не ниже полиномиального.

ТЕОРЕМА 10 [13]. Для алгебр N_3 и G_2 верны следующие утверждения:

- (i) $\text{var}(N_3) = \text{var}(G_2) = \mathbf{V}$;
- (ii) тождества $\{x_1, x_2, x_3\} = 0$, $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$ порождают идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$;
- (iii) для любого n выполнено равенство $c_n(\mathbf{V}) = 1 + n(n-1)/2$;
- (iv) многообразие $\mathbf{V}$ является наименьшим многообразием среди всех многообразий алгебр Пуассона роста не ниже полиномиального, то есть если рост некоторого многообразия $\mathbf{W}$ не ниже полиномиального, то $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}$.

Алгебры Лейбница—Пуассона. В данном пункте рассматриваются алгебры Пуассона с неантикоммутативной операцией $\{ , \}$, которые будем называть алгебрами Лейбница—Пуассона. Более точно векторное пространство A над полем K с двумя K -билинейными операциями умножения $\cdot$ и $\{ , \}$ называется алгеброй Лейбница—Пуассона, если относительно операции $\cdot$ пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{ , \}$ — алгеброй Лейбница, и данные операции связаны правилами

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \quad \{c, a \cdot b\} = a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b,$$

где $a, b, c \in A$.

Обозначим через Γ_n пространство в свободной алгебре Лейбница—Пуассона, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \dots, x_n$ и являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \cdot \dots \cdot \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}, \quad s \geq 2, \dots, t \geq 2.$$

ТЕОРЕМА 11 [14]. Пусть $\mathbf{V}$ — нетривиальное многообразие алгебр Лейбница—Пуассона над произвольным полем. Тогда либо

- (i) $c_n(\mathbf{V}) \geq 2^{n-1}$ для любого n ,
либо
- (ii) найдётся такой многочлен $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, что для всех достаточно больших n будет выполнено равенство $c_n(\mathbf{V}) = f(n)$.

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Лейбница—Пуассона, $Id(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$. Обозначим

$$\Gamma_n(\mathbf{V}) = \Gamma_n / (\Gamma_n \cap Id(\mathbf{V})), \quad \gamma_n(\mathbf{V}) = \dim \Gamma_n(\mathbf{V}).$$

ТЕОРЕМА 12 [14]. Для многообразия алгебр Лейбница—Пуассона $\mathbf{V}$ над произвольным полем следующие условия эквивалентны:

- (i) последовательность $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$ ограничена полиномом;
- (ii) для некоторого $m \geq 2$ в $\mathbf{V}$ выполнены полилинейные тождества

$$\{x_1, \dots, x_m\} = 0, \quad \{x_1, y_1\} \cdot \dots \cdot \{x_m, y_m\} = 0;$$

- (iii) найдётся такое число N , что для любого $n > N$ выполнено равенство $\gamma_n(\mathbf{V}) = 0$;
- (iv) найдётся такое число N , что для любого $n \geq N$ будет выполнено равенство

$$c_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{k=2}^N C_n^k \cdot \gamma_k(\mathbf{V}).$$

Рассмотрим двумерную алгебру Лейбница L_2 над полем K с базисом a, b и таблицей умножения $[a, b] = a$, $[a, a] = [b, b] = [b, a] = 0$. Обозначим через B^2 алгебру Лейбница—Пуассона $L_2 \oplus K$ с операциями (2).

ТЕОРЕМА 13 [14]. Для алгебры Лейбница—Пуассона B^2 верны следующие утверждения:

(i) полилинейные тождества

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{x_1, \{x_2, x_3\}\} = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры B^2 ;

(ii) рост многообразия $\text{var}(B^2)$, порождённого алгеброй B^2 , является почти полиномиальным, причём для любого натурального n выполнено равенство

$$c_n(B^2) = n \cdot 2^{n-1} - n + 1;$$

(iii) базис полилинейной компоненты $P_n(B^2)$ состоит из элементов вида

$$x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_s} \cdot \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\},$$

где $\{i_1, \dots, i_s, j_1, \dots, j_t\} = \{1, \dots, n\}$, $i_1 < \dots < i_s$, $j_2 < \dots < j_t$.

Обозначим через $\mathbf{W}_s$ многообразие алгебр Лейбница—Пуассона, порождённое полилинейным тождеством

$$\{x_1, y_1\} \cdot \dots \cdot \{x_s, y_s\} = 0.$$

ТЕОРЕМА 14 [15]. Для многообразия алгебр Лейбница—Пуассона $\mathbf{V}$ следующие условия эквивалентны:

- (i) последовательность $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geq 1}$ ограничена полиномом;
- (ii) $U_2 \notin \mathbf{V}$, $B^2 \notin \mathbf{V}$ и для некоторого $s \geq 2$ выполнено включение $\mathbf{V} \subset \mathbf{W}_s$;
- (iii) существует такая константа C , что в сумме (1) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ в случае, если выполнено условие $n - \lambda_1 > C$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. A. Giambruno, S. P. Mishchenko, “Polynomial growth of the codimensions: a characterization” // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2010. Vol. 138, no. 3. Pp. 853–859.
2. V. Drensky, Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra. Singapore: Springer-Verlag, 2000. xii+271 pp.
3. А. Р. Кемер, “Шпехтовость Т-идеалов со степенным ростом коразмерностей” // *Сиб. матем. журнал*, 1978. Т. 19, № 1. С. 54–69. [A. R. Kemer, “Spechtianess of T-ideals with polynomial growth of the co-dimensions” // *Sib. Mat. Zh.*, 1978. Vol. 19, no. 1. Pp. 54–69].
4. С. П. Мищенко, “Многообразия алгебр Ли с двуступенно нильпотентным коммутантом” // *Весті Академії наук БССР. Сер. фіз.-мат. наук*, 1987. № 6. С. 39–43. [“Varieties of Lie algebras with two-step nilpotent commutant” // *Vestsi Akad. Navuk BSSR. Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, 1987. no. 6. Pp. 39–43].
5. И. И. Бенедиктович, А. Е. Залесский, “Т-идеалы свободных алгебр Ли с полиномиальным ростом последовательности коразмерностей” // *Весті Академії наук БССР. Сер. фіз.-мат. наук*, 1980. № 3. С. 5–10. [I. I. Benediktovich, A. E. Zaleskiy, “T-ideals of free Lie algebras with polynomial growth of a sequence of codimensionalities” // *Vestsi Akad. Navuk BSSR Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, 1980. no. 3. Pp. 5–10].
6. С. П. Мищенко, “О многообразиях полиномиального роста алгебр Ли над полем характеристики нуль” // *Матем. заметки*, 1986. Т. 40, № 6. С. 713–721; англ. пер.: S. P. Mishchenko, “Varieties of polynomial growth of Lie algebras over a field of characteristic zero” // *Math. Notes*, 1986. Vol. 40, no. 6. Pp. 901–905.
7. S. Mishchenko, A. Valenti, “A Leibniz variety with almost polynomial growth” // *J. Pure Appl. Algebra*, 2005. Т. 202, № 1–3. С. 82–101.

8. С. П. Мищенко, О. И. Череватенко, “Необходимые и достаточные условия полиномиальности роста многообразия алгебр Лейбница” // *Фундамент. и прикл. матем.*, 2006. Т. 12, № 8. С. 207–215; англ. пер.: S. P. Mishchenko, O. I. Cherevatenko, “Necessary and sufficient conditions for a variety of Leibniz algebras to have polynomial growth” // *J. Math. Sci.*, 2008. Vol. 152, no. 2. Pp. 282–287.
9. С. П. Мищенко, О. И. Череватенко, “Многообразия алгебр Лейбница слабого роста” // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2012. № 9(49). С. 19–23. [S. P. Mishchenko, O. I. Cherevatenko, “Variety of Leibniz algebras of weak growth” // *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2012. no. 9(49). Pp. 19–23].
10. О. И. Череватенко, “О нильпотентных алгебрах Лейбница” // *Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика*, 2012. № 17(136). С. 132–136. [O. I. Cherevatenko, “On nilpotent Leibnitz algebras” // *Nauchnyye vedomosti BelGU. Matematika. Fizika*, 2012. no. 17(136). Pp. 132–136].
11. S. P. Mishchenko, V. M. Petrogradsky, A. Regev, “Poisson PI algebras” // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2007. Т. 359, № 10. С. 4669–4694.
12. С. М. Рацеев, “Эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Пуассона” // *Вестн. Моск. ун-в. Сер. 1. Математика. Механика*, 2012. Т. 67, № 5. С. 8–13; англ. пер.: S. M. Ratseev, “Equivalent conditions of polynomial growth of a variety of Poisson algebras” // *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 2012. Vol. 67, no. 5–6. Pp. 195–199.
13. С. М. Рацеев, “Алгебры Пуассона полиномиального роста” // *Сиб. матем. журн.*, 2013. Т. 54, № 3. С. 700–711; англ. пер.: S. M. Ratseev, “Poisson algebras of polynomial growth” // *Siberian Math. J.*, 2013. Vol. 54, no. 3. Pp. 555–565.
14. С. М. Рацеев, “Коммутативные алгебры Лейбница–Пуассона полиномиального роста” // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2012. № 3/1(94). С. 54–65. [S. M. Ratseev, “Commutative Leibniz–Poisson algebras of polynomial growth” // *Vestnik SamGU. Estestvenno-Nauchnaya Ser.*, 2012. no. 3/1(94). Pp. 54–65].
15. С. М. Рацеев, “Необходимые и достаточные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Лейбница–Пуассона” // *Изв. вузов. Матем.*, 2014. № 3. С. 33–39; англ. пер.: S. M. Ratseev, “Necessary and sufficient conditions of polynomial growth of varieties of Leibniz–Poisson algebras” // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2014. Vol. 58, no. 3 (to appear).

Поступила в редакцию 27/IX/2013;
в окончательном варианте — 12/X/2013.

MSC: 16R10, 17A32, 17B01, 17B63

VARIETIES OF LINEAR ALGEBRAS OF POLYNOMIAL GROWTH

O. I. Cherevatenko

Ulyanovsk State I. N. Ulyanov Pedagogical University,
4, Ploshchad' 100-letiya so dnya rozhdeniya V. I. Lenina, 432063, Ulyanovsk, Russia.
E-mail: chai@pisem.net

The paper is survey of results of investigations on varieties of linear algebras of polynomial growth. We give equivalent conditions of the polynomial codimension growth of a variety of associative algebras, Lie algebras, Leibniz algebras, Poisson algebras, Leibniz–Poisson algebras. It is shown that in the study of varieties of linear algebras of polynomial growth varieties of almost polynomial growth play an important role.

Keywords: associative algebra, Poisson algebra, Lie algebra, variety of algebras, growth of a variety.

Original article submitted 27/IX/2013;
revision submitted 12/X/2013.