Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Я. Новиков, Поверхностный эффект с учетом постулата Дирака, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 208–210

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 11:12:26

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ГОСТ Р 51317.4.4-99 (МЭК 61000-4-4-95) Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость к наносекундным импульсным помехам. Требования и методы испытаний. М.: Изд-во стандартов, 1999.
2. ГОСТ Р 51317.4.5-99 (МЭК 61000-4-5-95) Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Устойчивость к микросекундным импульсным помехам большой энергии. Требования и методы испытаний. М.: Изд-во стандартов, 1999.
3. Костенко М.В., Михайлов Ю.А., Халилов Ф.Х. Электроэнергетика. Электромагнитная совместимость. Ч. 1: Учеб. пособ./ СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1997. 103 с.
4. Альбокринов В.С., Гольдштейн В.Г., Халилов Ф.Х. Перенапряжения и защита от них в электроустановках нефтяной промышленности. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 1997. 324 с.
5. Костенко М. В. Взаимные сопротивления между воздушными линиями с учетом поверхностного эффекта в земле // Электричество. 1955. N 10.
6. Иоссель Ю. Я., Каганов Э. С., Струнский М. Г. Расчет электрической емкости. Л.: Энергия. Ленингр. отделение, 1969. 220 с.

УДК. 537.811

О.Я. Новиков

ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ С УЧЕТОМ ПОСТУЛАТА ДИРАКА

Проведен анализ поверхностного эффекта с учетом магнитной проводимости среды. Показано возникновение поверхностного эффекта на постоянном токе с глубиной проникновения, зависящей от магнитной и электрической проводимостей среды.

Учет постулата Дирака о существовании свободных магнитных зарядов приводит к модифицированной системе уравнений электромагнитного поля[1].

Эта система может быть записана в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{d}_e; \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{d}_m; \quad \text{div} \mathbf{D} = \mathbf{r}_e; \quad \text{div} \mathbf{B} = \mathbf{r}_m; \quad \mathbf{d}_e = \mathbf{g}_e \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{r}_e \mathbf{v}_e; \\ \mathbf{d}_m = \mathbf{g}_m \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{r}_m \mathbf{v}_m; \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{m} \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Первое уравнение в этой системе – закон полного электрического тока; второе – закон полного магнитного тока; третье – постулат Максвелла; четвертое – постулат Дирака; пятое – обобщенный закон Ома для электрического тока; шестое – обобщенный закон Ома для магнитного тока; седьмое и восьмое – соотношения между обобщенными силами и потоками в электромагнитном поле.

В этой системе величины $\mathbf{d}_e, \mathbf{d}_m, \mathbf{r}_e, \mathbf{r}_m, \mathbf{v}_e, \mathbf{v}_m, \mathbf{g}_e, \mathbf{g}_m$ означают плотность электрического тока, плотность магнитного тока, плотность электрических зарядов, плотность магнитных зарядов, скорость переноса электрических зарядов, скорость переноса магнитных зарядов, удельную электрическую проводимость и удельную магнитную проводимость соответственно. Остальные обозначения – общепринятые.

При исследовании поверхностного эффекта можно положить

$$\mathbf{r}_e = 0; \quad \left| \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right| \approx 0; \quad \mathbf{r}_m = 0.$$

При этих условиях система уравнений электромагнитного поля будет иметь вид:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{g}_e \mathbf{E}; \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{g}_m \mathbf{H} - \mathbf{m} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \text{div} \mathbf{E} = 0; \quad \text{div} \mathbf{H} = 0.$$

После известных преобразований эти уравнения могут быть записаны следующим образом:

$$\Delta \mathbf{H} = \mathbf{g}_e \mathbf{g}_m \mathbf{H} + \mathbf{g}_e \mathbf{m} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \Delta \mathbf{E} = \mathbf{g}_e \mathbf{g}_m \mathbf{E} + \mathbf{g}_e \mathbf{m} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Рассмотрим поверхностный эффект при падении плоской электромагнитной волны на однородное изотропное линейное полупространство с постоянными параметрами. Выберем декартову систему координат с расположением плоскости x-o-y на границе полупространства и направим ось z внутрь.

Будем считать, что фронт падающей волны совпадает с плоскостью раздела. Ось x направим по направлению вектора напряженности электрического поля. Электромагнитное поле будем считать синусоидальным и воспользуемся символическим методом.

Векторы напряженности электрического и магнитного полей будут ортогональны и по модулю равны составляющим по осям x и y соответственно. Учитывая это обстоятельство, можно опустить соответствующие индексы и записать выражение для комплекса напряженности, например, магнитного поля, в следующем виде:

$$\vec{H} = H_0 e^{-z\sqrt{g_e\sqrt{g_m^2 + w^2 m^2}} \cos \frac{y}{2} - jz m \sqrt{g_e\sqrt{g_m^2 + w^2 m^2}} \sin \frac{y}{2}}.$$

Это выражение записано для прямой волны, но оно справедливо и для полной напряженности, так как обратная волна в данных условиях отсутствует. Аналогичное выражение может быть записано и для напряженности электрического поля.

Из этого выражения можно получить:
глубину проникновения

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g_e\sqrt{g_m^2 + w^2 m^2}} \cos \frac{y}{2}};$$

длину волны

$$l = \frac{2p}{\sqrt{g_e\sqrt{g_m^2 + w^2 m^2}} \sin \frac{y}{2}};$$

скорость распространения

$$v = \frac{w}{\sqrt{g_e\sqrt{g_m^2 + w^2 m^2}} \sin \frac{y}{2}}.$$

Здесь:

$$y = \arctg \frac{wm}{g_m}.$$

При равенстве нулю магнитной проводимости все эти выражения сводятся к известным соотношениям для поверхностного эффекта в проводящих в электрическом отношении средах. При этом векторы напряженности электрического и магнитного полей, ортогональные в пространстве, сдвинуты во времени на 45 электрических градусов. Таким образом, активные и реактивные составляющие вектора Пойнтинга равны. Поток электромагнитной энергии имеет равные диссипативную и обменную составляющие. Аргумент обратного тангенса можно называть относительной частотой и обозначить через x : $x = \frac{wm}{g_m}$.

По мере уменьшения относительной частоты уменьшается доля обменной составляющей в потоке электромагнитной энергии и растет доля диссипативной. Уменьшается при этом и угол между векторами напряженности электрического и магнитного полей. При $x=0$ в потоке электромагнитной энергии будет только диссипативная составляющая, и электрический угол сдвига между векторами будет равен нулю. Электромагнитное поле будет затухать по экспоненте с глубиной проникновения, равной $\Delta = \frac{1}{\sqrt{g_e g_m}}$.

Длина волны стремится к бесконечности, а скорость - к постоянной величине: $v = \frac{2}{m \sqrt{\frac{g_e}{g_m}}}$.

Таким образом, в среде с ненулевой удельной магнитной проводимостью поверхностный эффект будет иметь место и на постоянном токе.

Рассмотрим поверхностный эффект в однородном прямолинейном проводнике круглого сечения. Примем цилиндрическую систему координат и перепишем в ней уравнения электромагнитного поля. Примем также осевую симметрию задачи и все ограничения, которые были наложены на параметры среды, принятые при рассмотрении предыдущей задачи. В этой задаче вектор напряженности электрического поля будет иметь только одну составляющую - по оси

проводника, а напряженности магнитного поля - угловую. С учетом этого обстоятельства снимем обозначения составляющих и получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H}{r} = d, \quad \frac{\partial d}{\partial r} = g_e g_m H + m g_e \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Известным приемом разделяем переменные и вводим комплексные величины, считая электромагнитное поле синусоидальным [2]. В результате получим

$$\frac{d^2 \mathbf{d}}{dr^2} + \frac{d\mathbf{d}}{r dr} = (g_e g_m + j \omega m g_e) \mathbf{d}, \quad \frac{d^2 \mathbf{H}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{H}}{dr} - \frac{\mathbf{H}}{r^2} = (g_e g_m + j \omega m g_e) \mathbf{H}.$$

Заменяя переменную $y = r \sqrt{-g_e g_m - j \omega m g_e}$, получим уравнения Бесселя и решение задачи в виде функций Бесселя первого рода нулевого порядка для плотности тока и первого порядка для напряженности магнитного поля:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 J_0(y), \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{d}_0}{\sqrt{-g_e g_m - j \omega m g_e}} J_1(y).$$

Эти решения отличаются от известных аргументом функций Бесселя. Этим аргументом здесь является корень из комплексного числа с отрицательной вещественной частью. Снова, вводя относительную частоту x , можно качественно проанализировать поверхностный эффект и в этом случае. При $x=0$ мы получим функции Бесселя мнимого аргумента. Функции Бесселя первого рода нулевого порядка при этом будут вещественными, а первого порядка - мнимыми. Следовательно, сдвиг по фазе между векторами плотности тока, напряженности электрического и магнитного полей при стремлении x к нулю будут также стремиться к нулю. Относительная доля диссипативной составляющей вектора Пойнтинга будет нарастать, и при $x=0$ обменная составляющая вектора Пойнтинга станет равной нулю. При увеличении x соотношение между диссипативной и обменной составляющими будет стремиться к единице.

Относительные плотность тока и напряженность магнитного поля:

— ромб — плотность тока, — точка — напряженность магнитного поля

величины, использованные при построении этого графика, введены следующим образом:

$$y' = r \sqrt{g_e g_m}, \quad d' = d/d_0, \quad H' = \frac{H \sqrt{g_e g_m}}{d_0}.$$

Здесь y' , d' , H' - относительные радиус, плотность тока и напряженность магнитного поля соответственно.

Графики, представленные на рисунке, показывают наличие ярко выраженного поверхностного эффекта в цилиндрическом проводнике на постоянном токе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков О.Я. Уравнения электромагнитного поля с учетом постулата Дирака // Актуальные проблемы университетского образования: Тез. докл. науч.-метод. конф. Самара: СамГТУ, 2001. С. 135-136.
2. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов: В 2 т. Т. 2. М.: Высш. школа, 1981. 416 с.