Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Х. Расулов, Э. Б. Дилмуродов, Исследование числовой области значений одной операторной матрицы, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014, выпуск 2(), 50–63

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1275>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:22:13

Функциональный анализ

УДК 517.984

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛОВОЙ ОБЛАСТИ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

Т. Х. Расулов, Э. Б. Дилмуродов

Бухарский государственный университет,
Узбекистан, 200100, Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.

Рассматривается 2×2 операторная матрица (обобщённая модель Фридрикса) A , ассоциированная с системой не более чем двух квантовых частиц на d -мерной решётке. Этот оператор действует в прямой сумме ноль-частичного и одно-частичного подпространств фоковского пространства. Структура замыкания числовой области значений $W(A)$ этого оператора подробно исследована в терминах его матричных элементов при всех размерностях тора $\mathbf{T}^d$. Выделены случаи, когда множество $W(A)$ замкнуто. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы спектр оператора A совпадал с множеством $W(A)$.

Ключевые слова: операторная матрица, обобщённая модель Фридрикса, пространство Фока, числовая область значений, точечный и аппроксимативно точечный спектры, операторы рождения и уничтожения, первый коммутант Шура.

Введение. Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство и $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — линейный оператор с областью определения $D(A) \subset \mathcal{H}$. Множество

$$W(A) := \{(Ax, x) : x \in D(A), \|x\| = 1\}$$

называется числовой областью значений (или коротко ч.о.з.) оператора A . Из определения видно, что множество $W(A)$ является подмножеством комплексной плоскости и геометрические свойства множества $W(A)$ дают некоторую информацию об операторе A .

Изучение ч.о.з. линейного оператора в гильбертовом пространстве является одним из основных методов в изучении местоположения спектра таких операторов. Это понятие впервые введено в работе [1] и доказано, что ч.о.з. матрицы содержит все её собственные значения. В работе [2] показано, что

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1275>
© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец цитирования: Т. Х. Расулов, Э. Б. Дилмуродов, “Исследование числовой области значений одной операторной матрицы” // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2014. № 2 (35). С. 50–63. doi: [10.14498/vsgtu1275](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1275).

Сведения об авторах: *Тулжин Хусенович Расулов* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. математической физики и анализа. *Элёр Бахтиёрович Дилмуродов*, ассистент, каф. математической физики и анализа.

E-mail addresses: rth@mail.ru (T.Kh. Rasulov, Corresponding author),
elyor.dilmurodov@mail.ru (E.B. Dilmurodov)

ч.о.з. оператора является выпуклым. Отметим, что отмеченные выше результаты верны не только для матриц, но и в более общем случае — для любого линейного ограниченного оператора. В работе [3] доказано, что спектр любого линейного ограниченного оператора содержится в замыкании ч.о.з. этого оператора. Вслед за этим это понятие обобщено разными способами, см. например [4–10].

Ч.о.з. матриц хорошо изучены во многих работах, см. например [11–14]. В частности, в работе [11] доказано, что ч.о.з. матрицы 2×2 есть эллипс. Если элементами матрицы являются линейные операторы, то такие операторы обычно называются блочно-операторными матрицами (или просто операторными матрицами) и изучение ч.о.з. таких операторов в бесконечномерном пространстве представляет собой особый интерес. Поэтому исследование структуры ч.о.з. операторных матриц в терминах его матричных элементов является одной из интересных задач в спектральном анализе операторов.

Отметим, что в случае, когда оператор является ограниченным и самосопряженным, замыкание числовой области значений есть выпуклая оболочка спектра [11]. Возникает естественный вопрос: для каких классов ограниченных самосопряженных операторов в бесконечномерном пространстве спектр совпадает с числовой областью значений? Вообще, существует ли такой оператор, кроме скалярного оператора? В данной работе установлена непустота такого класса.

В настоящей работе рассматривается 2×2 операторная матрица (обобщённая модель Фридрихса) A , ассоциированная с системой не более чем двух квантовых частиц на d -мерной решётке. Отметим, что вопросы, проводящие к изучению спектральных свойств таких операторов, обычно возникают в задачах статистической физики [15], гидродинамики [16] и физики твёрдого тела [17].

Основной целью данной работы является подробное изучение ч.о.з. операторной матрицы A , а точнее:

- а) описание структуры множества $W(A)$ при всех размерностях тора $\mathbf{T}^d$ в терминах матричных элементов операторной матрицы A ;
- б) выделение случаев, когда множество $W(A)$ замкнуто;
- в) нахождение необходимых и достаточных условий для того, чтобы оператор A имел спектр, совпадающий с множеством $W(A)$.

В последующих пунктах мы обсудим вышеуказанные вопросы. При обсуждении вопроса в) используется метод порогового анализа.

Структура работы такова. В пункте 1 даны некоторые основные свойства ч.о.з. линейного оператора. В пункте 2 операторная матрица A вводится как ограниченный самосопряженный оператор в прямой сумме нуль-частичного и одночастичного подпространств фоковского пространства и описана структура ч.о.з. оператора A . В пункте 3 доказано, что если граничные точки существенного спектра оператора A являются его «пороговыми» собственными значениями, то спектр этого оператора совпадает с множеством $W(A)$.

1. Основные свойства числовой области значений линейного оператора. Обозначим через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множество всех натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел соответственно. Всюду в работе под $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ понимаются скалярное произведение и норма в соответствующих гильбертовых пространствах.

Для полноты сначала приведём ряд основных свойств ч.о.з. линейного оператора (вообще говоря, несамосопряженного) $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, доказательства которых вытекают непосредственно из определения:

1) если A ограниченный оператор, то

$$W(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\};$$

2) $W(A^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in W(A)\};$

3) $W(I) = \{1\}$; если α и β — произвольные комплексные числа, то имеет место

$$W(\alpha A + \beta) = \alpha W(A) + \beta;$$

4) для самосопряженного оператора A имеет место вложение $W(A) \subset \mathbb{R}$;

5) если $\mathcal{H}$ — конечномерное пространство, то множества $W(A)$ является компактным;

6) если $A, B: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — унитарно-эквивалентные операторы, то $W(A) = W(B)$;

7) $\sigma_p(A) \subset W(A)$.

Определим (см. [18]) аппроксимативно точечный спектр линейного оператора A как

$$\sigma_{\text{app}}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists \{x_n\}_1^\infty \subset D(A), \|x_n\| = 1, (A - \lambda)x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}.$$

Подчеркнём, что последнее множество имеет ещё одно название: «ядро спектра» оператора A (см. [19]).

Следующее утверждение устанавливает связь между $\sigma_{\text{app}}(A)$ и $W(A)$:

$$8) \sigma_{\text{app}}(A) \subset \overline{W(A)}.$$

Следующий пример показывает, что даже для ограниченного самосопряжённого оператора B в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ мы не сможем утверждать, что $\sigma(B) \subset W(B)$ или $W(B) \subset \sigma(B)$.

Пусть

$$B: l_2 \rightarrow l_2, \quad Bx = (x_1, x_2/2, \dots, x_n/n, \dots), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2.$$

Легко проверяется, что

$$\sigma(B) = \overline{\{1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}} = \{0, 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\}, \quad W(B) = (0, 1].$$

Остановимся на доказательстве факта $0 \notin W(B)$. Допустим противное. Пусть $0 \in W(B)$. Тогда существует $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_2$ такое, что $\|x\| = 1$ и $(Bx, x) = 0$. Имеем

$$(Bx, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |x_k|^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $x \equiv 0$. Это противоречит факту $\|x\| = 1$. Значит $0 \notin W(B)$. Следовательно, в этом случае имеем $\sigma(B) \not\subset W(B)$, $W(B) \not\subset \sigma(B)$.

2. Операторная матрица и обсуждения основных результатов. Пусть $\mathbf{T}^d$ — d -мерный тор, т.е. куб $(-\pi, \pi]^d$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе $\mathbf{T}^d$ рассматривается как абелева группа,

в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbb{R}^d$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^d$.

Пусть $L_2(\mathbf{T}^d)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на $\mathbf{T}^d$. Обозначим через $\mathcal{H}$ прямую сумму пространств $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$ и $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbf{T}^d)$, т.е. $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Пространства $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ называются ноль-частичным и одночастичным подпространствами фоковского пространства $\mathcal{F}(L_2(\mathbf{T}^d))$ над $L_2(\mathbf{T}^d)$ соответственно.

Рассмотрим обобщённую модель Фридрихса $A \equiv A(w, \mu)$, действующую в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ как 2×2 блочно-операторная матрица

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix},$$

где матричные элементы $A_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i \leq j$, $i, j = 0, 1$, определяются по формулам

$$A_{00}f_0 = wf_0, \quad A_{01}f_1 = \sqrt{\mu} \int_{\mathbf{T}^d} v(s)f_1(s)ds, \quad (A_{11}f_1)(p) = u(p)f_1(p).$$

Здесь $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1$; $w, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ и $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ — вещественно-аналитические функции на $\mathbf{T}^d$, а A_{01}^* — сопряжённый оператор к A_{01} .

Оператор A_{01} называется оператором уничтожения, а A_{01}^* называется оператором рождения.

Можно проверить, что при этих предположениях оператор, которому соответствует матрица A , является ограниченным и самосопряжённым в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Обозначим через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ соответственно спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряжённого оператора.

Пусть оператор A_0 действует в $\mathcal{H}$ как

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{11} \end{pmatrix}.$$

Оператор возмущения $A - A_0$ оператора A_0 является самосопряжённым оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора A совпадает с существенным спектром оператора A_0 . Известно, что $\sigma_{\text{ess}}(A_0) = [m; M]$, где числа m и M определяются следующим образом:

$$m = \min_{p \in \mathbf{T}^d} u(p), \quad M = \max_{p \in \mathbf{T}^d} u(p).$$

Из последних фактов следует, что

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = [m; M]. \quad (1)$$

Пусть I_i — единичный оператор в $\mathcal{H}_i$, $i = 1, 2$. Чтобы определить дискретный спектр оператора A , наряду с этим оператором рассмотрим ещё оператор $S(z) : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$, который формально определяется следующим образом:

$$S(z) := A_{00} - zI_0 - A_{01}(A_{11} - zI_1)^{-1}A_{01}^*, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [m; M].$$

Определённый таким образом оператор обычно называется первым комплиментом Шура.

Определим регулярную в $\mathbb{C} \setminus [m; M]$ функцию (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором A):

$$\Delta_\mu(w; z) = w - z - \mu \int_{\mathbf{T}^d} \frac{v^2(s)ds}{u(s) - z}.$$

Тогда $S(z)$ есть оператор умножения в пространстве $\mathcal{H}_0$ на функцию $\Delta_\mu(w; \cdot)$.

Установим связь между собственными значениями операторов A и $S(z)$.

ЛЕММА 1. *Оператор A имеет собственное значение $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ тогда и только тогда, когда оператор $S(z)$ имеет нулевое собственное значение.*

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus [m; M]$ — собственное значение оператора A и $f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}$ — соответствующая вектор-функция. Тогда f_0 и f_1 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (A_{00} - zI_0)f_0 + A_{01}f_1 = 0, \\ A_{01}^*f_0 + (A_{11} - zI_1)f_1 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Так как $z \notin \sigma(A_{11}) = [m; M]$, оператор $A_{11} - zI_1$ обратим. Следовательно, умножая второе уравнение системы слева на $(A_{11} - zI_1)^{-1}$, для f_1 имеем

$$f_1 = -(A_{11} - zI_1)A_{01}^*f_0.$$

Подставляя последнее выражение для f_1 в первое уравнение системы (2), получим, что система уравнений (2) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда уравнение $S(z)f_0 = 0$ имеет нетривиальное решение. $\square$

Из леммы 1 вытекает, что

$$\sigma_{\text{disc}}(A) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m; M] : S(z) \text{ имеет нулевое собственное значение}\}.$$

Таким образом,

$$\sigma(A) = [m; M] \cup \sigma_{\text{disc}}(A).$$

Надо отметить, что дискретный спектр оператора A играет важную роль при исследовании его ч.о.з.

ЛЕММА 2. *Оператор A может иметь не более чем по одному простому собственному значению, лежащему левее m и правее M .*

Доказательство леммы 2 вытекает из монотонности и непрерывности функции $\Delta_\mu(w; \cdot)$ на полуосях $(-\infty; m)$ и $(M; +\infty)$, а также леммы 1.

Далее в случае существования собственных значений оператора A обозначим их через $\lambda_k(w, \mu)$, $k = 1, 2$. Для определённости предположим, что $\lambda_1(w, \mu) < m$ и $\lambda_2(w, \mu) > M$.

Пусть $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ — фиксированные числа. На протяжении всей работы будем предполагать, что функция $u(\cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках $p_i \in \mathbf{T}^d$, $i = \overline{1, N_1}$, и невырожденный максимум в точках $q_j \in \mathbf{T}^d$, $j = \overline{1, N_2}$.

В качестве такой функции $u(\cdot)$ можно взять

$$u(p) = \sum_{k=1}^d (1 - \cos np^{(k)}), \quad p = (p^{(1)}, \dots, p^{(d)}) \in \mathbf{T}^d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $N_1 \equiv N_1(n)$ и $N_2 \equiv N_2(n)$ число точек

$$p_i = (p_i^{(1)}, \dots, p_i^{(d)}) \in \mathbf{T}^d \quad \text{и} \quad q_j = (q_j^{(1)}, \dots, q_j^{(d)}) \in \mathbf{T}^d,$$

соответственно, для которых

$$p_i^{(k)} \in \left\{ 0; \pm \frac{2}{n}\pi; \pm \frac{4}{n}\pi; \dots; \pm \frac{n_1}{n}\pi \right\} \cup \begin{cases} \{\pi\}, & \text{если } n \text{ чётное,} \\ \emptyset, & \text{если } n \text{ нечётное,} \end{cases} \quad k = \overline{1, d};$$

$$q_j^{(k)} \in \left\{ \pm \frac{1}{n}\pi; \pm \frac{3}{n}\pi; \dots; \pm \frac{n_2}{n}\pi \right\} \cup \begin{cases} \emptyset, & \text{если } n \text{ чётное,} \\ \{\pi\}, & \text{если } n \text{ нечётное,} \end{cases} \quad k = \overline{1, d};$$

причём $p_i \neq p_j$, $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$; здесь

$$n_1 := \begin{cases} n - 2, & \text{если } n \text{ чётное,} \\ n - 1, & \text{если } n \text{ нечётное;} \end{cases} \quad n_2 := \begin{cases} n - 1, & \text{если } n \text{ чётное,} \\ n - 2, & \text{если } n \text{ нечётное.} \end{cases}$$

Очевидно, что определённая так функция $u(\cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках $p_i \in \mathbf{T}^d$, невырожденный максимум в точках $q_j \in \mathbf{T}^d$, причём $N_1 = n$, $N_2 = n - 1$. Таким образом, множество значений функций $u(\cdot)$ совпадает с отрезком $[0, 2d]$.

I. Случай $d \geq 3$. В дальнейшем через δ , C_1 , C_2 и C_3 обозначаются различные положительные постоянные, значения которых не конкретизированы.

Пусть

$$|p| := \sqrt{(p^{(1)})^2 + \dots + (p^{(d)})^2}, \quad p = (p^{(1)}, \dots, p^{(d)}) \in \mathbf{T}^d;$$

$$U_\delta(p_0) := \{p \in \mathbf{T}^d : |p - p_0| < \delta\}, \quad p_0 \in \mathbf{T}^d, \quad \delta > 0.$$

Так как функция $u(\cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках $p_i \in \mathbf{T}^d$, $i = \overline{1, N_1}$, существуют числа $C_1, C_2, C_3 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$C_1|p - p_i|^2 \leq u(p) - m \leq C_2|p - p_i|^2, \quad p \in U_\delta(p_i), \quad i = \overline{1, N_1}; \quad (3)$$

$$u(p) - m \geq C_3, \quad p \in \mathbf{T}_\delta \equiv \mathbf{T}^d \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} U_\delta(p_i). \quad (4)$$

Имеет место равенство

$$\int_{\mathbf{T}^d} \frac{v^2(s)ds}{u(s) - m} = \sum_{i=1}^{N_1} \int_{U_\delta(p_i)} \frac{v^2(s)ds}{u(s) - m} + \int_{\mathbf{T}_\delta} \frac{v^2(s)ds}{u(s) - m}. \quad (5)$$

Учитывая неравенства (3) и непрерывность функции $v(\cdot)$ на $\mathbf{T}^d$, имеем, что i -тое ($i \in \{1, \dots, N_1\}$) слагаемое в правой части (5) оценивается следующим образом:

$$\int_{U_\delta(p_i)} \frac{v^2(s)ds}{u(s) - m} \leq C_1 \int_{U_\delta(0)} \frac{ds}{|s|^2} \leq C_1 (2\pi)^{d-3} \int_{\{p \in \mathbf{T}^3: |p| < \delta\}} \frac{ds^{(1)} ds^{(2)} ds^{(3)}}{|s^{(1)}|^2 + |s^{(2)}|^2 + |s^{(3)}|^2}.$$

Переходя в сферическую систему координат, убедимся, что последний интеграл конечен. Конечность последнего слагаемого в правой части (5), т.е. интеграла по $\mathbf{T}_\delta$, вытекает из непрерывности функции $v(\cdot)$ на $\mathbf{T}^d$ и неравенства (4). Аналогично показывается, что

$$\int_{\mathbf{T}^d} \frac{v^2(s)ds}{u(s) - M} \quad (6)$$

также конечен.

Положим

$$\mu_0 := \left(\int_{\mathbf{T}^d} \frac{v^2(s)ds}{u(s) - m} \right)^{-1}, \quad \mu_1 := \left(\int_{\mathbf{T}^d} \frac{v^2(s)ds}{M - u(s)} \right)^{-1}.$$

Следующая теорема описывает структуру ч.о.з. оператора A .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $w \leq m$.

1. Если $0 < \mu \leq (M - w)\mu_1$, то верно равенство $\overline{W(A)} = [\lambda_1(w, \mu); M]$.
2. При $\mu > (M - w)\mu_1$ имеет место равенство $W(A) = [\lambda_1(w, \mu); \lambda_2(w, \mu)]$.

Доказательство. Пусть $w \leq m$. Тогда при всех $\mu > 0$ верно неравенство $\Delta_\mu(w; m) < 0$. Так как

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta_\mu(w; z) = +\infty$$

и функция $\Delta_\mu(w; \cdot)$ непрерывна и монотонно убывает на полуоси $(-\infty; m)$, функция $\Delta_\mu(w; \cdot)$ имеет единственный простой нуль $\lambda_1(w, \mu)$ в $(-\infty; m)$. В силу леммы 1 число $\lambda_1(w, \mu)$ является единственным простым собственным значением оператора A .

1. Предположим, что $0 < \mu \leq (M - w)\mu_1$. Простые вычисления показывают, что $\Delta_\mu(w; M) < 0$. Теперь из факта

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \Delta_\mu(w; z) = -\infty,$$

а также из непрерывности и монотонности функции $\Delta_\mu(w; \cdot)$ на полуоси $(M; +\infty)$, вытекает, что функция $\Delta_\mu(w; \cdot)$ не имеет нулей в $(M; +\infty)$. В силу

леммы 1 оператор A не имеет собственных значений, лежащих в $(M; +\infty)$. Следовательно, в этом случае

$$\sigma(A) = \{\lambda_1(w, \mu)\} \cup [m; M], \quad \lambda_1(w, \mu) < m.$$

Так как замыкание ч.о.з. оператора A есть выпуклая оболочка спектра $\sigma(A)$, то $\overline{W(A)} = [\lambda_1(w, \mu); M]$. Первое утверждение теоремы 1 доказано.

2. Пусть теперь $\mu > (M - w)\mu_1$. Рассуждая, как и выше, можно показать, что оператор A имеет единственное собственное значение $\lambda_2(w, \mu)$, лежащее на $(M; +\infty)$, т.е.

$$\sigma(A) = \{\lambda_1(w, \mu)\} \cup [m; M] \cup \{\lambda_2(w, \mu)\}, \quad \lambda_1(w, \mu) < m, \quad \lambda_2(w, \mu) > M.$$

Видно, что в этом случае

$$m_A := \inf_{\|f\|=1} (Af, f) = \lambda_1(w, \mu), \quad M_A := \sup_{\|f\|=1} (Af, f) = \lambda_2(w, \mu). \quad (7)$$

Значит, $\overline{W(A)} = [\lambda_1(w, \mu); \lambda_2(w, \mu)]$. Покажем, что $\lambda_k(w, \mu) \in W(A)$, $k = 1, 2$. Пусть $g_1 \in \mathcal{H}$ и $g_2 \in \mathcal{H}$ — нормированные собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1(w, \mu)$ и $\lambda_2(w, \mu)$ соответственно. Тогда

$$\min_{\|f\|=1} (Af, f) = (Ag_1, g_1) = \lambda_1(w, \mu); \quad \max_{\|f\|=1} (Af, f) = (Ag_2, g_2) = \lambda_2(w, \mu).$$

Отсюда следует, что $\lambda_k(w, \mu) \in W(A)$, $k = 1, 2$. Второе утверждение теоремы 1 доказано. $\square$

Из доказательства теоремы 1 вытекает следующее замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $\mathcal{H}$ — произвольное гильбертово пространство и $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — произвольный линейный ограниченный самосопряженный оператор. Тогда $\overline{W(A)} = [m_A; M_A]$. Если дополнительно выполняется условие $\sigma_{\text{ess}}(A) \subset (m_A; M_A)$, то $W(A) = [m_A; M_A]$. Здесь числа m_A и M_A определены по формуле (7).

Заметим, что в первом утверждении теоремы 1 число $M \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ является предельной точкой множества $W(A)$. Действительно, так как $M \in \sigma_{\text{ess}}(A)$, по критерию Вейля существует ортонормированная система $\{g_n\} \subset \mathcal{H}$ такая, что

$$\psi_n := Ag_n - Mg_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим скалярное произведение (ψ_n, g_n) :

$$(\psi_n, g_n) = (Ag_n, g_n) - M(g_n, g_n) = (Ag_n, g_n) - M \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что M есть предельная точка множества $W(A)$.

Следующие теоремы доказываются аналогично теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m < w < M$.

1. Если $\mu > \max\{(w - m)\mu_0, (M - w)\mu_1\}$, то $W(A) = [\lambda_1(w, \mu); \lambda_2(w, \mu)]$.
2. Если $(w - m)\mu_0 < (M - w)\mu_1$ и $\mu \in ((w - m)\mu_0; (M - w)\mu_1]$, то $\overline{W(A)} = [\lambda_1(w, \mu); M]$.

3. Если $(w - t)\mu_0 > (M - w)\mu_1$ и $\mu \in ((M - w)\mu_1; (w - t)\mu_0]$, то $\overline{W(A)} = [m; \lambda_2(w, \mu)]$.
4. Если $\mu < \min \{(w - t)\mu_0, (M - w)\mu_1\}$, то $\overline{W(A)} = [m; M]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $(w - t)\mu_0 = (M - w)\mu_1 = \mu_{01}$, т.е. если

$$w = \frac{m\mu_0 + M\mu_1}{\mu_0 + \mu_1},$$

то при $\mu > \mu_{01}$ имеем случай первого утверждения, а при $0 < \mu \leq \mu_{01}$ случай четвёртого утверждения теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $w \geq M$.

1. Если $0 < \mu \leq (w - t)\mu_0$, то имеет место равенство $\overline{W(A)} = [m; \lambda_2(w, \mu)]$.
2. При $\mu > (w - t)\mu_0$ верно равенство $W(A) = [\lambda_1(w, \mu); \lambda_2(w, \mu)]$.

II. Случай $d = 1, 2$. Предположим, что $v(p_i) \neq 0$ и $v(q_j) \neq 0$ при некотором $i \in \{1, \dots, N_1\}$ и $j \in \{1, \dots, N_2\}$ соответственно. Тогда существуют числа $C_1 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$|v(p)| \geq C_1, \quad p \in U_\delta(p_i) \cup U_\delta(q_j). \quad (8)$$

Учитывая (3), (8), имеем

$$\int_{\mathbf{T}^d} \frac{v^2(s)ds}{u(s) - m} \geq C_1 \int_{U_\delta(0)} \frac{ds}{|s|^2}.$$

При $d = 1$ расходимость последнего интеграла очевидна, а при $d = 2$, переходя в полярную систему координат, убеждаемся, что последний интеграл расходится. Аналогично доказывается расходимость интеграла (6) при $d = 1, 2$.

Тогда при всех значениях параметров w и μ верно

$$\lim_{z \rightarrow m-0} \Delta_\mu(w; z) = -\infty, \quad \lim_{z \rightarrow M+0} \Delta_\mu(w; z) = +\infty.$$

Так как

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta_\mu(w; z) = +\infty, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} \Delta_\mu(w; z) = -\infty$$

и функция $\Delta_\mu(w; \cdot)$ непрерывна и монотонно убывает на полуосях $(-\infty; m)$ и $(M; +\infty)$, при всех w и μ оператор A имеет два собственных значения, которые мы обозначили через $\lambda_k(w, \mu)$, $k = 1, 2$, причём $\lambda_1(w, \mu) < m$, $\lambda_2(w, \mu) > M$. В силу замечания 1 для ч.о.з. оператора A имеет место равенство

$$W(A) = [\lambda_1(w, \mu); \lambda_2(w, \mu)].$$

Пусть $v(p_i) = 0$, $i \in \{1, \dots, N_1\}$ и $v(q_j) = 0$, $j \in \{1, \dots, N_2\}$. Тогда существуют числа $C_1, C_2 > 0$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ такие, что при всех $d \in \mathbb{N}$ имеет место

$$\begin{aligned} C_1 |p - p_i|^{\alpha_i} &\leq |v(p)| \leq C_2 |p - p_i|^{\alpha_i}, & p \in U_\delta(p_i), & i = \overline{1, N_1}; \\ C_1 |p - q_j|^{\beta_j} &\leq |v(p)| \leq C_2 |p - q_j|^{\beta_j}, & p \in U_\delta(q_j), & j = \overline{1, N_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь, применяя (3), (4) и (9), а также используя непрерывность функции $v(\cdot)$ на $\mathbf{T}^d$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}^d} \frac{v^2(s)ds}{u(s) - m} &= \sum_{i=1}^{N_1} \int_{U_\delta(p_i)} \frac{v^2(s)ds}{u(s) - m} + \int_{\mathbf{T}_\delta} \frac{v^2(s)ds}{u(s) - m} \leq \\ &\leq C_1 \sum_{i=1}^{N_1} \int_{U_\delta(0)} |s|^{2\alpha_i-2} ds + C_2 < \infty. \end{aligned}$$

Далее совершенно аналогично показывается конечность интеграла (6). Следовательно, числа μ_0 и μ_1 конечны, в этом случае верны все утверждения теорем 1–3.

Осталось рассмотреть случай $v(p_i) \neq 0$ при некотором $i \in \{1, \dots, N_1\}$ и $v(q_j) = 0$, $j = \overline{1, N_2}$. В этом случае при всех w и μ верно $\min \sigma(A) = \lambda_1(w, \mu)$. Рассуждая, как и в теоремах 1–3, получим следующие утверждения:

1) пусть $w \geq M$; тогда при всех $\mu > 0$ имеет место равенство

$$W(A) = [\lambda_1(w, \mu); \lambda_2(w, \mu)];$$

2) пусть $w < M$:

- а) если $0 < \mu \leq (M - w)\mu_1$, то $\overline{W(A)} = [\lambda_1(w, \mu); M]$;
- б) если $\mu > (M - w)\mu_1$, то $W(A) = [\lambda_1(w, \mu); \lambda_2(w, \mu)]$.

Случай, когда $v(p_i) = 0$, $i = \overline{1, N_1}$ и $v(q_j) \neq 0$ при некотором $j \in \{1, \dots, N_2\}$ аналогичен.

Заметим, что если $u(p) \equiv u_0 = \text{const}$, то при всех значениях $w, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ и $d \in \mathbb{N}$ числа

$$\begin{aligned} \lambda_1(w, \mu) &= \frac{w + u_0 - \sqrt{(w - u_0)^2 + 4\mu\|v\|^2}}{2}, \\ \lambda_2(w, \mu) &= \frac{w + u_0 + \sqrt{(w - u_0)^2 + 4\mu\|v\|^2}}{2} \end{aligned}$$

являются простыми собственными значениями оператора A и имеет место равенство $\sigma_{\text{ess}}(A) = \{u_0\}$, причём $\lambda_1(w, \mu) < u_0 < \lambda_2(w, \mu)$. Следовательно, в этом случае имеем $W(A) = [\lambda_1(w, \mu); \lambda_2(w, \mu)]$.

3. Пороговые эффекты для оператора A . В этом пункте рассмотрим случай $d = 3$.

Пусть $C(\mathbf{T}^3)$ (соответственно $L_1(\mathbf{T}^3)$) — банахово пространство непрерывных (соответственно интегрируемых) функций, определённых на $\mathbf{T}^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $w \neq m$ (соответственно $w \neq M$). Говорят, что оператор A имеет резонанс с энергией m (соответственно M), если число 1 является собственным значением оператора

$$(G_m \psi)(p) = \frac{\mu v(p)}{w - m} \int_{\mathbf{T}^3} \frac{v(s)\psi(s)ds}{u(s) - m}, \quad \psi \in C(\mathbf{T}^3),$$

соответственно

$$(G_M \psi)(p) = \frac{\mu v(p)}{w - M} \int_{\mathbf{T}^3} \frac{v(s)\psi(s)ds}{u(s) - M}, \quad \psi \in C(\mathbf{T}^3),$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию $\psi(p_i) \neq 0$ при некотором $i \in \{1, \dots, N_1\}$ (соответственно $\psi(q_j) \neq 0$ при некотором $j \in \{1, \dots, N_2\}$).

В следующей лемме формулируются необходимые и достаточные условия для того, чтобы либо число $z = t$ (соответственно $z = M$) являлось собственным значением оператора A , либо оператор A имел резонанс с энергией t (соответственно M).

ЛЕММА 3.

1. Число $z = t$ ($z = M$) является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(w; t) = 0$ и $v(p_i) = 0$, $i = \overline{1, N_1}$ ($\Delta_\mu(w; M) = 0$ и $v(q_j) = 0$, $j = \overline{1, N_2}$).
2. Оператор A имеет резонанс с энергией t (M) тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(w; t) = 0$ и $v(p_i) \neq 0$ при некотором $i \in \{1, \dots, N_1\}$ ($\Delta_\mu(w; M) = 0$ и $v(q_j) \neq 0$ при некотором $j \in \{1, \dots, N_2\}$).

Для доказательства леммы 3 в случае $z = t$ достаточно воспользоваться схемой доказательства теоремы 1 из работы [20]. А случай $z = M$ доказываться аналогично.

Отметим, что в ходе доказательства теоремы 1 в [20] показано, что если число $z = t$ является собственным значением оператора A , то только (с точностью до константы) вектор $f = (f_0, f_1)$, где f_0 и f_1 имеют вид

$$f_0 = \text{const} \neq 0, \quad f_1(p) = -\frac{\sqrt{\mu}v(p)f_0}{u(p) - t},$$

удовлетворяет уравнению $Af = tf$, более того, $f_1 \in L_2(\mathbf{T}^3)$ тогда и только тогда, когда $v(p_i) = 0$, $i = \overline{1, N_1}$. Также в [20] установлено, что если оператор A имеет резонанс с энергией t , то $f_1 \in L_1(\mathbf{T}^3) \setminus L_2(\mathbf{T}^3)$. Это и означает, что в определении 1 требование наличия собственного значения 1 оператора G_t соответствует существованию решения уравнения $Af = tf$, а из условия $\psi(p_i) \neq 0$ при некотором $i \in \{1, \dots, N_1\}$ следует, что решение f этого уравнения не принадлежит пространству $\mathcal{H}$. Аналогичные утверждение верны для случая $z = M$.

Так как t и M являются граничными точками $\sigma_{\text{ess}}(A)$ в случае, когда эти числа являются собственными значениями оператора A , мы назовём их пороговыми собственными значениями этого оператора.

ЛЕММА 4. Если либо число $z = t$ ($z = M$) является собственным значением оператора A , либо оператор A имеет резонанс с энергией t (M), то оператор A не имеет собственных значений, лежащих левее t (правее $z = M$).

Доказательство. Если либо число $z = t$ является собственным значением оператора A , либо оператор A имеет резонанс с энергией t , то в силу леммы 3 имеем $\Delta_\mu(w; t) = 0$. Из монотонности функции $\Delta_\mu(w; \cdot)$ следует, что для любого $z < t$ верно $\Delta_\mu(w; z) > \Delta_\mu(w; 0) = 0$. По лемме 1 это означает, что оператор A не имеет собственных значений, лежащих левее t .

Случай $z = M$ рассматривается аналогично. $\square$

ТЕОРЕМА 4. Верны следующие утверждения:

- 1) если числа m и M являются пороговыми собственными значениями оператора A , то $W(A) = [m; M]$;
- 2) если число $z = m$ является пороговым собственным значением оператора A и этот оператор также имеет резонанс с энергией M , то $W(A) = [m; M]$;
- 3) если оператор A имеет резонанс с энергией m и число $z = M$ является пороговым собственным значением оператора A , то $W(A) = (m; M]$;
- 4) если оператор A имеет резонансы с энергиями m и M , то $W(A) = (m; M)$.

Доказательство. Если выполняются условия в утверждениях теоремы 4, то в силу равенства (1) и леммы 4 имеем $\sigma(A) = [m; M]$. Как отмечалось выше, в случае, когда оператор A имеет резонанс с энергией m , соответствующий вектор f не принадлежит $\mathcal{H}$. Поэтому в этом случае $m \notin W(A)$. Пусть число $z = m$ является собственным значением оператора A и $\tilde{f}$ — соответствующий вектор. Положим $\tilde{f} = f/\|f\|$. Тогда $(A\tilde{f}, \tilde{f}) = m(\tilde{f}, \tilde{f}) = m$, т.е. $m \in W(A)$. $\square$

Следующий пример показывает, что класс функций $v(\cdot)$ и $u(\cdot)$, удовлетворяющих условиям теоремы 4, непуст. Простые вычисления дают, что если

$$w = \frac{m\mu_0 + M\mu_1}{\mu_0 + \mu_1}, \quad \mu = \frac{(M - m)\mu_0\mu_1}{\mu_0 + \mu_1},$$

то равенства $\Delta_\mu(w; m) = 0$ и $\Delta_\mu(w; M) = 0$ выполняются одновременно независимо от функции $v(\cdot)$ и $u(\cdot)$. Пусть

$$u(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p^{(i)}).$$

Тогда функция $u(\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $p_1 = (0, 0, 0) \in \mathbf{T}^3$ и единственный невырожденный максимум в точке $q_1 = (\pi, \pi, \pi) \in \mathbf{T}^3$. Далее

- 1) если $v(p) = 1 - \cos 2p^{(1)}$, то $v(p_1) = v(q_1) = 0$;
- 2) если $v(p) = 1 - \cos p^{(1)}$, то $v(p_1) = 0$ и $v(q_1) = 2 \neq 0$;
- 3) если $v(p) = 1 + \cos p^{(1)}$, то $v(p_1) = 2 \neq 0$ и $v(q_1) = 0$;
- 4) если $v(p) = \cos p^{(1)}$, то $v(p_1) = 1 \neq 0$ и $v(q_1) = -1 \neq 0$.

При этом, сравнивая соответствующие условия леммы 3, получим, что выполняются условия теоремы 4.

Если $\Delta_\mu(w; m) > 0$, то в силу леммы 3 число $z = m$ не является пороговым собственным значением оператора A и этот оператор не имеет резонанса с энергией m . В этом случае $m \notin W(A)$. Допустим противное. Пусть $m \in W(A)$. Тогда существует $f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}$ такой, что $\|f\| = 1$ и $(Af, f) = m$. В этом случае легко можно показать, что $f_0 = 0$, а функция $f_1 \in \mathcal{H}_1$ ортогональна к $v(\cdot)$ и $\|f\|_1 = 1$. Имеем

$$(Af, f) - m = \int_{\mathbf{T}^3} (u(s) - m)|f_1(s)|^2 ds = 0.$$

Отсюда следует, что $f_1 \equiv 0$, а это противоречит условию нормировки $\|f\| = 1$. Значит, $m \notin W(A)$.

Таким образом, равенство $W(A) = [m; M]$ выполняется тогда и только тогда, когда числа m и M являются «пороговыми» собственными значениями оператора A .

Работа частично поддержана проектом [TOSCA II Erasmus Mundus](#). Первый автор выражает свою признательность университету Л'Аквила (Италия) за гостеприимство.

This work was partially supported by the [TOSCA II Erasmus Mundus Project](#). The first author expresses his gratitude for the hospitality of the University of L'Aquila (Italy).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. O. Toeplitz, “Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér”, *Math. Z.*, 1918, vol. 2, no. 1–2, pp. 187–197 doi: [10.1007/BF01212904](#).
2. F. Hausdorff, “Der Wertvorrat einer Bilinearform”, *Math. Z.*, 1919, vol. 3, no. 1, pp. 314–316 doi: [10.1007/BF01292610](#).
3. A. Wintner, “Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen”, *Math. Z.*, 1929, vol. 30, no. 1, pp. 228–281 doi: [10.1007/BF01187766](#).
4. H. Langer, A. S. Markus, V. I. Matsaev, C. Tretter, “A new concept for block operator matrices: the quadratic numerical range”, *Linear Algebra Appl.*, 2001, vol. 330, no. 1–3, pp. 89–112 doi: [10.1016/S0024-3795\(01\)00230-0](#).
5. C. Tretter, M. Wagenhofer, “The block numerical range of an $n \times n$ block operator matrix”, *SIAM. J. Matrix Anal. & Appl.*, 2003, vol. 24, no. 4, pp. 1003–1017 doi: [10.1137/S0895479801394076](#).
6. L. Rodman, I. M. Spitkovsky, “Ratio numerical ranges of operators”, *Integr. Equ. Oper. Theory*, 2011, vol. 71, no. 2, pp. 245–257 doi: [10.1007/s00020-011-1898-8](#).
7. W. S. Cheung, X. Liu, T. Y. Tam, “Multiplicities, boundary points and joint numerical ranges”, *Operators and Matrices*, 2011, vol. 5, no. 1, pp. 41–52 doi: [10.7153/oam-05-02](#).
8. H. L. Gau, C. K. Li, Y. T. Poon, N. S. Sze, “Higher rank numerical ranges of normal matrices”, *SIAM. J. Matrix Anal. & Appl.*, 2011, vol. 32, pp. 23–43, arXiv: [0902.4869 \[math.FA\]](#) doi: [10.1137/09076430X](#).
9. B. Kuzma, C. K. Li, L. Rodman, “Tracial numerical range and linear dependence of operators”, *Electronic J. Linear Algebra*, 2011, vol. 22, pp. 22–52, <http://eudml.org/doc/223236>.
10. C. K. Li, Y. T. Poon, “Generalized numerical range and quantum error correction”, *J. Operator Theory*, 2011, vol. 66, no. 2, pp. 335–351, <http://www.mathjournals.org/jot/2011-066-002/2011-066-002-004.html>.
11. K. Gustafson, D. K. M. Rao, *Numerical range: The field of values of linear operators and matrices*, Berlin, Springer, 1997, xiv+190 pp.
12. D. S. Keeler, L. Rodman, I. M. Spitkovsky, “The numerical range of 3×3 matrices”, *Linear Algebra and its Appl.*, 1997, vol. 252, no. 1–3, pp. 115–139 doi: [0.1016/0024-3795\(95\)00674-5](#).
13. H.-L. Gau, “Elliptic numerical range of 4×4 matrices”, *Taiwanese J. Math.*, 2006, vol. 10, no. 1, pp. 117–128.
14. D. Henrion, “Semidefinite geometry of the numerical range”, *Electronic J. Linear Algebra*, 2010, vol. 20, pp. 322–332, <http://eudml.org/doc/229710>, arXiv: [0812.1624 \[math.OC\]](#).
15. Р. А. Минлос, Я. Г. Синай, “Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа” // *ТМФ*, 1970. Т. 2, № 2. С. 230–243; R. A. Minlos, Ya. G. Sinai, “Spectra of stochastic operators arising in lattice models of a gas”, *Theoret. and Math. Phys.*, 1970, vol. 2, no. 2, pp. 167–176 doi: [10.1007/BF01036789](#).
16. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели*. М.: Наука, 1973. 416 с. [M. A. Lavrentiev, B. V. Shabat, *Problemy gidrodinamiki i*

- ikh matematicheskie modeli* [Problems of Hydrodynamics and their Mathematical Models], Moscow, Nauka, 1973, 416 pp. (In Russian)]
17. A. I. Mogilner, “Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results”, *Adv. Soviet Math.*, 1991, vol. 5, pp. 139–194.
 18. M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, V. IV, *Analysis of operators*, New York–London, Academic Press, 1978, 396 pp.; М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. Т. 4: Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 430 с.
 19. М. Саломьяк, М. Бирман, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. Л.: ЛГУ, 1980. 264 с. [M. Salomyak, M. Birman, *Spektral'naya teoriya samosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Leningrad, Leningrad State University Press, 1980, 264 pp. (In Russian)]
 20. Т. Х. Расулов, Х. Х. Турдиев, “Некоторые спектральные свойства обобщённой модели Фридрикса” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 2(23). С. 181–188 doi: [10.14498/vsgtu904](https://doi.org/10.14498/vsgtu904). [Т. Х. Rasulov, Kh. Kh. Turdiev, “Some spectral properties of a generalized Friedrichs model”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011, no. 2(23), pp. 181–188 (In Russian)].

Поступила в редакцию 17/XI/2013;
в окончательном варианте — 24/XII/2013;
принята в печать — 19/II/2014.

MSC: 81Q10, 35P20, 47N50

INVESTIGATIONS OF THE NUMERICAL RANGE OF A OPERATOR MATRIX

T. Kh. Rasulov, E. B. Dilmurodov

Bukhara State University,
11, Muhammad Igbol st, Bukhara, 200100, Uzbekistan.

We consider a 2×2 operator matrix A (so-called generalized Friedrichs model) associated with a system of at most two quantum particles on d -dimensional lattice. This operator matrix acts in the direct sum of zero- and one-particle subspaces of a Fock space. We investigate the structure of the closure of the numerical range $W(A)$ of this operator in detail by terms of its matrix entries for all dimensions of the torus $\mathbf{T}^d$. Moreover, we study the cases when the set $W(A)$ is closed and give necessary and sufficient conditions under which the spectrum of A coincides with its numerical range.

Keywords: operator matrix, generalized Friedrichs model, Fock space, numerical range, point and approximate point spectra, annihilation and creation operators, first Schur complement.

Received 17/XI/2013;
received in revised form 24/XII/2013;
accepted 19/II/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1275>
© 2014 Samara State Technical University.

Citation: T. Kh. Rasulov, E. B. Dilmurodov, “Investigations of the Numerical Range of a Operator Matrix”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2 (35), pp. 50–63. doi: [10.14498/vsgtu1275](https://doi.org/10.14498/vsgtu1275). (In Russian)

Author Details: *Tulkin Kh. Rasulov* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Dept. of Mathematical Physics & Analysis. *Elyor B. Dilmurodov*, Assistant Lecturer, Dept. of Mathematical Physics & Analysis.

E-mail addresses: rth@mail.ru (T.Kh. Rasulov, Corresponding author),
elyor.dilmurodov@mail.ru (E.B. Dilmurodov)