Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Кораблев, Е. И. Михайловский, Е. В. Тулубенская, Н. А. Беляева, Продольная устойчивость ребристой оболочки в разномодульной упругой среде, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014, выпуск 2(), 89–95

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1278>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 18:15:30

УДК 539.311

ПРОДОЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕБРИСТОЙ ОБОЛОЧКИ
В РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕА. Ю. Кораблев, Е. И. Михайловский,
Е. В. Тулубенская, Н. А. БеляеваСыктывкарский государственный университет,
Россия, 167000, Сыктывкар, Октябрьский проспект, 55.

Рассматривается задача об устойчивости продольно сжимаемой шарнирно опёртой цилиндрической оболочки, подкреплённой стрингерами и расположенной на границе двух упругих сред различной жёсткости. Вывод уравнений производился при следующих допущениях: применяется упрощённая теория Доннелла—Власова, деформация осесимметрична, стрингеры изгибаются в нормальной плоскости как гибкие стержни, на оболочку действует лишь нормальная нагрузка. Решение задачи ищется с помощью комбинированного алгоритма перебора вариантов. Суть метода заключается в последовательном применении алгоритмов полного и локального перебора вариантов. Алгоритм полного перебора вариантов предназначен для построения качественно адекватной формы, после чего для уточнения значения критической силы применяется локальный метод перебора вблизи корней приближения к искомой собственной форме. В результате проведенного численного эксперимента выяснено, что при увеличении количества стрингеров прочность оболочки повышается. Полученные результаты согласуются с результатами, полученными к настоящему времени в других работах.

Ключевые слова: устойчивость, шарнирно-опёртая цилиндрическая оболочка, комбинированный алгоритм перебора вариантов.

Введение. В работе [1] описана так называемая деформационная теория ребристых оболочек, главная особенность которой заключается в том, что в ней впервые наряду с реактивной силой учтён реактивный момент от ребра жёсткости. Названная теория подробно изложена в монографии [2]. В частности, уравнения статики конструктивно ортотропной цилиндрической оболочки, получаемые путём «размазывания» регулярной системы стрингеров,

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1278>

© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец цитирования: А. Ю. Кораблев, Е. И. Михайловский, Е. В. Тулубенская, Н. А. Беляева, «Продольная устойчивость ребристой оболочки в разномодульной упругой среде» // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2014. № 2 (35). С. 89–95. doi: [10.14498/vsgtu1278](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1278).

Сведения об авторах: *Кораблев Анатолий Юрьевич*, аспирант, каф. математического моделирования и кибернетики. *Евгений Ильич Михайловский* (12.07.1937–11.07.2013) (д.ф.-м.н., проф.). *Елена Владимировна Тулубенская* (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. математического моделирования и кибернетики. *Надежда Александровна Беляева* (д.ф.-м.н., проф.), профессор, каф. математического моделирования и кибернетики.

E-mail addresses: astroori@mail.ru (A.Yu. Korablev, *Corresponding author*),
vetamile@rambler.ru (E.V. Tulubenskaya), belyayevana@mail.ru (N.A. Belyaeva)

имеют вид

$$c_0 \mathbf{L}u = -R^2 q + \frac{1}{l} \left[\begin{array}{c} -C_t \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} \\ \frac{K_\nu}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{K_t}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} - \frac{K_t}{R^2} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \xi^2 \partial \varphi} \\ \frac{K_n}{R^2} \frac{\partial^4 u_2}{\partial \xi^4} \end{array} \right]. \quad (1)$$

Здесь первая строка уравнения представляет собой матричную запись уравнений статики цилиндрической оболочки в смещениях; K_ν , K_n — жёсткости стрингера при изгибе соответственно в нормальной плоскости и из этой плоскости; K_t — жёсткость при кручении; C_t — жёсткость стрингера при растяжении (сжатии); q_1 , q_2 , q_n — нагрузка; l — расстояние между соседними стрингерами по дуге поперечного сечения; $\xi = x/R$; $\varphi = y/R$; R — радиус оболочки.

Будем рассматривать оболочку, расположенную на границе двух винклеровских сред различной жёсткости. Примем следующие допущения:

- i) для расчёта оболочек без рёбер допустимо использовать упрощённую теорию Доннела—Власова [3, табл. 13.2, форм. (13.18с)];
- ii) конструктивно ортотропная оболочка испытывает осесимметричную деформацию, т. е. $\partial f / \partial \varphi = 0$ для любой функции f ;
- iii) стрингеры изгибаются в нормальной плоскости как гибкие стержни, т. е.

$$C_t \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} = \frac{K_n}{R^2} \frac{\partial^4 u_2}{\partial \xi^4} = 0;$$

- iv) на оболочку действует лишь нормальная нагрузка, т. е. $q_1 = q_2 = 0$.

Тогда уравнению (1) можно придать вид

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ w \end{bmatrix} = \frac{R^2}{c_0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_n \end{bmatrix}, \quad c_0 = \frac{Eh}{1 - \nu^2}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{d^2()}{d\xi^2} & 0 & -\nu \frac{d()}{d\xi} \\ 0 & \frac{1 - \nu}{2} \frac{d^2()}{d\xi^2} & 0 \\ -\nu \frac{d()}{d\xi} & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \quad a_{33} = \left(\frac{1}{12} \frac{h^2}{R^2} + \frac{(1 - \nu^2)J}{lhR^2} \right) \frac{d^4()}{d\xi^4} + I,$$

I — тождественный оператор, J — момент инерции поперечного сечения стержня, h — толщина неподкреплённой оболочки, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона материала ребристой оболочки.

Для получения из системы (2) соответствующего уравнения относительно функции прогиба воспользуемся операторным методом [4].

«Детерминант» матрицы $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\det \mathbf{A} = \frac{1 - \nu}{2} \left(\frac{h^2}{12R^2} + \frac{(1 - \nu^2)J}{lhR^2} \right) \frac{d^8()}{d\xi^8} + \frac{1 - \nu}{2} (1 - \nu^2) \frac{d^4()}{d\xi^4}.$$

Заменяя в матрице $\mathbf{A}$ последний столбец правой частью уравнения (2) и вычисляя «детерминант» так составленной матрицы, получим

$$\det \mathbf{A}_w = \frac{1 - \nu}{2} \frac{R^2}{c_0} \frac{d^4 q_n}{d\xi^4}.$$

Применяя формально правило Крамера, можно записать $w = \det \mathbf{A}_w / \det \mathbf{A}$ или $(\det \mathbf{A})w = \det \mathbf{A}_w$. Последнее равенство после элементарных преобразований представляет искомое уравнение в виде

$$\left(1 + \frac{EJ}{ld_0}\right) \frac{d^4 w}{d\xi^4} + 4b^4 w = \frac{R^4}{d_0} q_n, \quad (3)$$

где

$$4b^4 = 12(1 - \nu^2) \frac{R^2}{h^2}, \quad d_0 = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Представим нормальную нагрузку в виде суммы

$$q_n = q'_n + q''_n. \quad (4)$$

В условиях наличия внутри и вне оболочки винклеровых сред различной жёсткости c_1, c_2 соответственно, следуя [5], можно записать $q'_n = -c_1 w_+ - c_2 w_-$. Кроме этого, при рассмотрении продольной устойчивости цилиндрической оболочки от действия сжимающих усилий T_0 следует положить [3]

$$q''_n = -\frac{T_0}{R^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2}.$$

Выполним замену

$$\tilde{\xi} = \frac{\pi R}{L} \xi = \frac{\pi R}{L} \frac{x}{R} = \frac{\pi x}{L} \in [0, \pi],$$

где L — длина оболочки, и подставим соотношения (4) в уравнение (3), сохранив за новой переменной $\tilde{\xi}$ прежнее обозначение ξ , окончательно получим

$$(1 + \alpha) \frac{d^4 w}{d\tilde{\xi}^4} + 4\beta^4 w + \lambda \frac{d^2 w}{d\tilde{\xi}^2} + k_1 w_+ + k_2 w_- = 0. \quad (5)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{EJ}{ld_0}, \quad \lambda = \frac{T_0 L^2}{\pi^2 d_0}, \quad 4\beta^4 = \frac{12(1 - \nu^2)L^4}{\pi^4 R^2 h^2}, \quad d_0 = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad k_i = \frac{c_i L^4}{\pi^4 d_0}, \quad (6)$$

где T_0 — сжимающие усилия. Обратим внимание, что параметр λ зависит от сжимающих усилий T_0 .

1. Постановка задачи. Рассмотрим дифференциальное уравнение (5):

$$(1 + \alpha)w^{IV} + 4\beta^4 w + k_1 w_+ + k_2 w_- = -\lambda w'' \quad (7)$$

и найдём минимальное значение λ , соответствующее минимальной нагрузке, при котором краевая задача с граничными условиями шарнирного опирания

$$w(0) = w(\pi) = 0; \quad w''(0) = w''(\pi) = 0$$

имеет нетривиальное решение.

Проинтегрируем по частям функционал, образованный уравнением (7), умноженный на $w(\xi)$. Имеем

$$(1 + \alpha) \int_0^\pi w''^2 d\xi + 4\beta^4 \int_0^\pi w^2 d\xi + k_1 \int_0^\pi w_+^2 d\xi + k_2 \int_0^\pi w_-^2 d\xi = \\ = \lambda \int_0^\pi w'^2 d\xi. \quad (8)$$

Заменим формулу (8) приближённой с использованием дискретного представления функции w , задаваемой её значениями на равномерной сетке, т. е. $w_i = w(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Аппроксимируем производные конечно-разностными схемами

$$w'_i = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}; \quad w''_i = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2}.$$

Интегралы будем вычислять по квадратурной формуле трапеций:

$$\int_0^\pi f(\xi) d\xi = \frac{\pi}{n} \left(\frac{f(\xi_0)}{2} + f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_{n-1}) + \frac{f(\xi_n)}{2} \right).$$

Значения срезов функции в узлах сетки представляем формулами

$$w_+(\xi_i) = b_i w_i, \quad w_-(\xi_i) = (1 - b_i) w_i, \quad b_i = \begin{cases} 1, & w_i > 0, \\ 0, & w_i \leq 0. \end{cases}$$

Граничные условия шарнирного опирания аппроксимируем формулами

$$w_{-1} = w_{n+1} = 0, \quad w_0 = w_1/2, \quad w_n = w_{n-1}/2.$$

После преобразования уравнение (7) примет вид

$$A\tilde{w} + C\tilde{w} = \lambda Q\tilde{w}.$$

Таким образом, необходимое условие минимума функционала имеет вид

$$A\tilde{w} + C\tilde{w} - \lambda Q\tilde{w} = 0,$$

где матрицы A , Q — пятидиагональные:

$$A = \frac{1 + \alpha}{h^3} \begin{bmatrix} 3.25 & -3.5 & 1 & & & & \\ -3.5 & 6 & -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -3.5 \\ & & & & & 1 & -3.5 & 3.25 \end{bmatrix};$$

$$Q = \frac{1}{4h} \begin{bmatrix} 2.75 & -0.5 & -1 & & & & \\ -0.5 & 2 & 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ & & & -1 & 0 & 2 & -0.5 \\ & & & & -1 & -0.5 & 2.75 \end{bmatrix};$$

$$C = \text{diag} [k_1 b_i + k_2(1 - b_i) + 4\beta^4] h.$$

2. Комбинированный алгоритм. Для решения задачи будем использовать комбинированный алгоритм, который включает в себя применение на первой стадии алгоритма полного перебора вариантов (ППВ), а на последующих — локального перебора вариантов (ЛПВ) [6].

Для построения части собственного спектра уравнения применяется алгоритм ППВ форм изгиба, который заключается в следующем:

i) перебираются все 2^{m-1} возможных представления вектора формы

$$b = [b_1, b_2, \dots, b_{m-1}]^T;$$

ii) для каждого варианта вектора формы решается задача на собственные значения;

iii) запоминается собственная пара (число и форма), для которой форма изгиба согласуется с выбранным вектором формы.

В процессе применения алгоритма ППВ получаем качественно адекватную форму, то есть собственную форму, имеющую устойчивый с ростом m вид графика.

После этого будем применять алгоритм ЛПВ, используя в качестве приближения полученную качественно адекватную форму:

j) последовательно удваиваем число узлов сетки путём деления интервалов пополам;

jj) осуществляем перебор вариантов лишь вблизи корней последнего приближения к искомой собственной форме;

jjj) процесс продолжается до тех пор, пока соответствующее собственное значение не стабилизируется с требуемой точностью.

Проблема нахождения собственных пар для каждого вектора формы решалась с использованием QR-алгоритма, описанного в [8].

Исходная задача

$$A\tilde{w} + C\tilde{w} - \lambda Q\tilde{w} = 0$$

приводится к виду

$$Q^{-1}(A + C)\tilde{w} = \lambda\tilde{w}.$$

Введём следующее обозначение $\tilde{A} = Q^{-1}(A + C)$. Здесь $\tilde{A}$ — симметричная положительно определённая матрица, значит, она имеет вещественные собственные числа.

В соответствии с теоремами 3.2.20 и 3.2.46 из [7] реализуется следующий итерационный процесс:

$$1) \tilde{A}^0 = \tilde{A}; \quad 2) Q^{(k)} R^{(k)} = \tilde{A}^{(k-1)} \tilde{A}^{(k)} = R^{(k)} Q^{(k)}.$$

Все полученные матрицы $Q^{(i)}$ перемножаются. В результате столбцы полученной матрицы будут представлять собой собственные векторы, а на диагонали последней матрицы $A^{(k)}$ будут находиться собственные числа.

Таким образом с использованием QR-алгоритма на каждом шаге комбинированного алгоритма возможно эффективное отыскание собственных пар.

3. Численное решение. Применим комбинированный «ППВ+ЛПВ»-алгоритм (ППВ при $n = 6$, ЛПВ при $n = 24$) при $k_1 = 16$ и $k_2 = 18$. Значения параметра α будем изменять в пределах от 0 до 90. Зафиксируем значение параметра $4\beta^4 = 43.68$ и согласно формуле (6) получим следующие значения.

α	0	10	30	50	70	90
λ	17.5	61.7	91.9	112.1	132.3	152.5

Из полученных значений видно, что при увеличении параметра α ($\alpha = 0$ — оболочка, не подкреплённая стрингерами) прочность оболочки повышается, т. к. увеличивается значение λ , а значит, и значение первой критической силы.

Фиксируя значения L и ν , получаем зависимость λ от h/R и α . На рисунке приведены графики зависимости λ от h/R при $\alpha = 10, 50$ и 90 ($L = 200$ см, $\nu = 0.3$).

Заключение. В результате проведённого численного эксперимента видно, что при увеличении параметра α и при уменьшении h/R значение λ увеличивается, в результате чего повышается прочность оболочки. Полученные результаты согласуются с результатами, полученными в статье [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. Е. И. Михайловский, *Математические модели механики упругих тел*. Сыктывкар: Сыктывкарск. ун-т, 2007. 516 с. [E. I. Mikhailovsky, *Matematicheskiye modeli mekhaniki uprugikh tel* [Mathematical models of elastic bodies], Syktyvkar, Syktyvkar Univ. Press, 2007, 516 pp. (In Russian)]
2. В. В. Новожилов, К. Ф. Черных, Е. И. Михайловский, *Линейная теория тонких оболочек*. Л.: Политехника, 1991. 656 с. [V. V. Novozhilov, K. F. Chernykh, E. I. Mikhailovsky, *Lineynaya teoriya tonkikh obolochek* [Linear Theory of Thin Shells], Leningrad, Politekhnik, 1991, 656 pp. (In Russian)]
3. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*. М.: Наука, 1969. 984 с. [A. S. Vol'mir, *Ustoychivost' deformiruyemykh sistem* [Stability of Deformable Systems], Moscow, Nauka, 1969, 984 pp. (In Russian)]
4. А. П. Филин, *Элементы теории оболочек*. Л.: Стройиздат, 1989. 384 с. [A. P. Filin, *Elementy teorii obolochek* [Elements of Shells Theory], Leningrad, Stroyizdat, 1989, 384 pp. (In Russian)]
5. Е. И. Михайловский, *Элементы конструктивно-нелинейной механики*. Сыктывкар: Сыктывкарск. ун-т, 2011. 201 с. [E. I. Mikhailovsky, *Elementy konstruktivno-nelineynoy mekhaniki* [Elements of constructive nonlinear mechanics], Syktyvkar, Syktyvkar Univ. Press, 2011, 201 pp. (In Russian)]

6. Е. И. Михайловский, Е. В. Тулубенская, "Алгоритм локального перебора вариантов в одной существенно нелинейной спектральной задаче" // *ПММ*, 2010. Т. 74, №2. С. 299–310; Ye. I. Mikhailovskii, Yu. V. Tulubenskaya, "An algorithm for the local exhaustive search for alternatives in an essentially non-linear eigenvalue problem", *J. Appl. Math. Mech.*, 2010, vol. 74, no. 2, pp. 214–222 doi: [10.1016/j.jappmathmech.2010.05.012](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.05.012).
7. D. S. Watkins, *Fundamentals of matrix computations*, New York, John Wiley & Sons, 2002, xiii+620 pp. doi: [10.1002/0471249718](https://doi.org/10.1002/0471249718).
8. M. Panju, "Iterative Methods for Computing Eigenvalues and Eigenvector", *The Waterloo Mathematics Review*, 2011, vol. 1, pp. 9–19, arXiv: [1105.1185](https://arxiv.org/abs/1105.1185) [math.NA].

Поступила в редакцию 26/XI/2013;
в окончательном варианте — 24/XII/2013;
принята в печать — 19/III/2014.

MSC: 74B20; 74K25, 74K05

A LONGITUDINAL STABILITY OF A RIBBED COVER IN A MULTIMODULUS ELASTIC MEDIUM

A. Yu. Korablev, E. I. Mikhailovsky,
E. V. Tulubenskaya, N. A. Belyaeva

Syktyvkar State University,
55, Oktyabr'skiy pr., Syktyvkar, 167001, Russian Federation.

The stability of a longitudinal compressed hinge-supported cylindrical cover stiffened by stringers and located on the border of two Winkler's ambiences is considered. The derivation of the equations was carried out under the assumptions: using a simplified theory of Donnell–Vlasov, axisymmetric deformation of a cover, only normal load acts on the shell. The problem is solved using a combined exhaustive search algorithm. This method includes full and local search of variants to search a form deflection and a critical force. Full search of variants is required to construct a form deflection of a shell. Local search of variants is necessary to clarify a critical force. As a result of numerical experiments we found out that increasing the number of stringers reinforces the shell. These results are consistent with the results obtained in the other works.

Keywords: *stability, hinge-supported cylindrical cover, combined exhaustive search algorithm.*

Received 26/XI/2013;
received in revised form 24/XII/2013;
accepted 19/III/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1278>
© 2014 Samara State Technical University.

Citation: A. Yu. Korablev, E. I. Mikhailovsky, E. V. Tulubenskaya, N. A. Belyaeva, "A Longitudinal Stability of a Ribbed Cover in a Multimodulus Elastic Medium", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2 (35), pp. 89–95. doi: [10.14498/vsgtu1278](https://doi.org/10.14498/vsgtu1278). (In Russian)

Author Details: *Anatoly Yu. Korablev*, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Modeling and Cybernetics. *Eugeniy I. Mikhailovsky* (12.07.1937–11.07.2013) (Dr. Phys. & Math. Sci.). *Elena V. Tulubenskaya* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Dept. of Mathematical Modeling and Cybernetics. *Nadezhda A. Belyaeva* (Dr. Phys. & Math. Sci.), Professor, Dept. of Mathematical Modeling and Cybernetics.

E-mail addresses: astroori@mail.ru (A.Yu. Korablev, *Corresponding author*),
vemamile@rambler.ru (E.V. Tulubenskaya), belyayevana@mail.ru (N.A. Belyaeva)