Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Репин, С. К. Кумыкова, Задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014, выпуск 1(), 37–47

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1280>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:19:56

УДК 517.956.326

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ
ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯО. А. Репин^{1,2}, С. К. Кумыкова³¹ Самарский государственный экономический университет,

Россия, 443090, Самара, ул. Советской Армии, 141.

² Самарский государственный технический университет,

Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

³ Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова

Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

Для вырождающегося гиперболического уравнения в характеристической области (двуугольнике) исследована внутреннекраевая задача с операторами дробного интегро-дифференцирования (в смысле Римана—Лиувилля), в которой значения решения уравнения на характеристиках поточно связаны со значением решения и производной от него на линии вырождения уравнения. Модифицированным методом Трикоми при ограничениях в виде неравенств на известные функции доказана теорема единственности. Вопрос существования решения задачи редуцирован к разрешимости сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши нормального типа.

Ключевые слова: задача Коши, задача со смещением, операторы дробного интегро-дифференцирования, сингулярное уравнение с ядром Коши, регуляризатор, гипергеометрическая функция Гаусса, гамма-функция Эйлера.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$|y|^m u_{xx} - u_{yy} + a|y|^{m/2-1} u_x = 0, \quad (1)$$

где $m = \text{const} > 2$; $a \neq 0$ — действительная постоянная, $|a| \leq m/2$ в конечной области Ω , ограниченной характеристиками

$$\begin{aligned} AC : x - \frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2} &= 0, & BC : x + \frac{2}{m+2} y^{(m+2)/2} &= 1, \\ AD : x - \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} &= 0, & BD : x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} &= 1. \end{aligned}$$

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$, $I \equiv AB$ — единичный интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$; $(I_{0+}^\alpha f)(x)$, $(I_{1-}^\alpha f)(x)$, $(D_{0+}^\alpha f)(x)$, $(D_{1-}^\alpha f)(x)$ — операторы дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля [1, с. 42–43]; $\Theta_0^i(x)$, $\Theta_1^i(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1280>

© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец цитирования: О. А. Репин, С. К. Кумыкова, “Задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения” // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2014. № 1 (34). С. 37–47. doi: [10.14498/vsgtu1280](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1280).

Сведения об авторах: Олег Александрович Репин (д.ф.-м.н., проф.), заведующий кафедрой, каф. математической статистики и эконометрики¹; профессор, каф. прикладной математики и информатики². Светлана Каншубиевна Кумыкова (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. теории функций и функционального анализа.

E-mail addresses: matstat@mail.ru (O.A. Repin, Corresponding author),

bsk@rect.kbsu.ru (S.K. Kumykova)

(1), выходящих из точки $(x, 0) \in I$, с характеристиками AC, BC, AD, BD соответственно, $i = 1, 2$.

ЗАДАЧА. Найти решение $u(x, y)$ уравнения (1) со свойствами

- 1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1 \cup I) \cap C^1(\Omega_2 \cup I) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$;
- 2) $u(x, +0) = u(x, -0), x \in \bar{I}$;
 $\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \mu(x) \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) + \lambda(x), x \in I$;
- 3) $A_i(x)I_{0+}^{p_i}\delta_i(x)u[\Theta_0^i(x)] + B_i(x)I_{1-}^{q_i}w_i(x)u[\Theta_1^i(x)] +$
 $+ C_i(x)u_{iy}(x, 0) + D_i(x)u_i(x, 0) = \gamma_i(x), \quad i = 1, 2, x \in I,$
 где $A_i(x), B_i(x), C_i(x), D_i(x), \gamma_i(x), \delta_i(x), w_i(x), \mu(x), \lambda(x)$ — заданные функции такие, что

$$\begin{aligned} A_i^2(x) + B_i^2(x) + C_i^2(x) + D_i^2(x) &\neq 0, \\ A_i(x), B_i(x), C_i(x), D_i(x), \gamma_i(x) &\in C^1(\bar{I}) \cap C^3(I), \quad \mu(x), \lambda(x) \in C^1(I), \\ p_i, q_i &\text{— действительные постоянные, причём } 0 < p_i, q_i < 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Отметим, что рассматриваемая задача относится к классу краевых задач со смещением [2] (по терминологии А. М. Нахушева).

2. Единственность решения задачи.

ТЕОРЕМА. В области Ω не может существовать более одного решения задачи, если

$$\begin{aligned} \mu(x) = 1, \quad \lambda(x) = 0, \quad p_1 = p_2 = \alpha, \quad q_1 = q_2 = \beta, \\ \delta_1(x) = \delta_2(x) = x^{\alpha+\beta-1}, \quad w_1(x) = w_2(x) = (1-x)^{\alpha+\beta-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} E_i(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)}(1-x)^{1-\alpha}A_i(x) + \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)}x^{1-\beta}B_i(x) + \\ + x^{1-\beta}(1-x)^{1-\alpha}D_i(x) \neq 0, \quad i = 1, 2, x \in \bar{I} \end{aligned} \quad (4)$$

и выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \left[\frac{A_1(x)}{E_1(x)}(1-x)^{1-\alpha} \right]' \leq 0, \quad \left[\frac{B_1(x)}{E_1(x)}x^{1-\beta} \right]' \geq 0, \quad \frac{C_1(x)}{E_1(x)}x^{1-\beta}(1-x)^{1-\alpha} \leq 0, \\ \left[\frac{A_2(x)}{E_2(x)}(1-x)^{1-\alpha} \right]' \geq 0, \quad \left[\frac{B_2(x)}{E_2(x)}x^{1-\beta} \right]' \leq 0, \quad \frac{C_2(x)}{E_2(x)}x^{1-\beta}(1-x)^{1-\alpha} \geq 0, x \in \bar{I}, \end{aligned} \quad (5)$$

либо

$$\begin{aligned} \mu(x) > 0, \quad \lambda(x) = 0, \quad p_1 = p_2 = 1 - \beta, \\ q_1 = q_2 = 1 - \alpha, \quad \delta(x) = w(x) = 1; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i(x) = \frac{\Gamma(2 - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \alpha)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{2/(m+2)} (1-x)^\beta A_i(x) + \\ + \frac{\Gamma(2 - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \beta)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{2/(m+2)} x^\alpha B_i(x) + \\ + x^\alpha (1-x)^\beta C_i(x) \neq 0, \quad i = 1, 2, x \in \bar{I} \end{aligned} \quad (7)$$

и выполняются неравенства

$$\frac{A_1(x)}{\widetilde{E}_1(x)}(1-x)^\beta < 0, \quad \frac{B_1(x)}{\widetilde{E}_1(x)}x^\alpha < 0, \quad \frac{D_1(x)}{\widetilde{E}_1(x)}x^\alpha(1-x)^\beta < 0, \quad (8)$$

$$\frac{A_2(x)}{\widetilde{E}_2(x)}(1-x)^\beta > 0, \quad \frac{B_2(x)}{\widetilde{E}_2(x)}x^\alpha > 0, \quad \frac{D_2(x)}{\widetilde{E}_2(x)}x^\alpha(1-x)^\beta > 0, \quad x \in \bar{I}, \quad (9)$$

либо

$$p_1 = \alpha, \quad p_2 = 1 - \beta, \quad q_1 = \beta, \quad q_2 = 1 - \alpha, \quad \delta(x) = w(x) = 1; \quad (10)$$

выполняются условия (4), (5) в области Ω_1 , а в области Ω_2 справедливы условия (7), (9), где

$$\alpha = \frac{m - 2a}{2(m + 2)}, \quad \beta = \frac{m + 2a}{2(m + 2)}.$$

Доказательство. Переходя к доказательству единственности решения задачи, положим

$$\tau(x) = u(x, 0), \quad \nu_1(x) = \lim_{y \rightarrow 0+0} u_y(x, y), \quad \nu_2(x) = \lim_{y \rightarrow 0-0} u_y(x, y).$$

Пусть выполняются условия (3), (4) теоремы.

Используя формулу решения задачи Коши для уравнения (1) в областях Ω_1, Ω_2 [3, с. 13–14] и удовлетворяя краевым условиям 3), получим соотношения между $\tau(x)$ и $\nu_i(x)$, принесённые на I из Ω_1 и Ω_2 соответственно:

$$\tau(x) = \overline{A}_i(x)I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\nu_i(x) + \overline{B}_i(x)I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\nu_i(x) + \overline{C}_i(x)\nu_i(x) + \overline{\gamma}_i(x), \quad (11)$$

где

$$\overline{A}_i(x) = -\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2/(m+2)}\frac{A_i(x)}{E_i(x)}(1-x)^{1-\alpha},$$

$$\overline{B}_i(x) = -\frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2/(m+2)}\frac{B_i(x)}{E_i(x)}x^{1-\beta},$$

$$\overline{C}_i(x) = -\frac{C_i(x)}{E_i(x)}x^{1-\beta}(1-x)^{1-\alpha},$$

$$\overline{\gamma}_i(x) = \frac{\gamma_i(x)}{E_i(x)}x^{1-\beta}(1-x)^{1-\alpha}, \quad i = 1, 2.$$

После преобразований, аналогичных [4, 5], получим, что

$$\int_0^1 \tau(x)\nu_i(x)dx = 0.$$

Затем нетрудно доказать равенство $\nu_i(x) = 0$ (см., например, [4]). Тогда из (11) при $\tilde{\gamma}_i(x) = 0$ имеем $\tau(x) = 0$. Следовательно, $u_i(x, y) \equiv 0$ как решения задачи Коши с нулевыми данными в областях Ω_1, Ω_2 , что и завершает

доказательство единственности решения исследуемой задачи для уравнения (1).

Если выполняются условия (6), (7) теоремы, то соотношения между $\tau(x)$ и $\nu_i(x)$ имеют вид

$$\nu_i(x) = \tilde{A}_i(x)D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) + \tilde{B}_i(x)D_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) + \tilde{D}_i(x)\tau(x) + \tilde{\gamma}_i(x), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i(x) &= -\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} \frac{A_i(x)}{\tilde{E}_i(x)} (1-x)^\beta, \quad \tilde{B}_i(x) = -\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} \frac{B_i(x)}{\tilde{E}_i(x)} x^\alpha, \\ \tilde{D}_i(x) &= -\frac{D_i(x)}{\tilde{E}_i(x)} x^\alpha (1-x)^\beta, \quad \tilde{\gamma}_i(x) = \frac{\gamma_i(x)}{\tilde{E}_i(x)} x^\alpha (1-x)^\beta, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

В силу принципа экстремума для гиперболических уравнений положительный максимум (отрицательный минимум) функции $u(x, y)$ в $\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2$ достигается на $\bar{I}$. Пусть положительный максимум функции $u(x, y)$ достигается в точке $(x_0, 0) \in I$.

Пользуясь тем, что дробные производные $D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)$, $D_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)$ в точке положительного максимума строго положительны (в точке отрицательного минимума строго отрицательны) [2, с. 82–83], получаем при выполнении условий (8), (9) $\nu_1(x_0) > 0$, $\nu_2(x_0) < 0$.

Это противоречит условию сопряжения 2) при $\mu(x) > 0$, $\lambda(x) = 0$, откуда и следует справедливость теоремы единственности решения рассматриваемой задачи для уравнения (1). $\square$

3. Существование решения задачи. Докажем существование решения задачи проведём для трёх случаев.

Случай 1. Пусть в областях Ω_1 и Ω_2 выполняются условия (3) и

$$C_2(x)E_1(x) - C_1(x)E_2(x) = 0.$$

Полагая $\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu(x)$ и удовлетворяя (11), требованию сопряжения 2), получим

$$A(x)I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\nu(x) + B(x)I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\nu(x) = F(x), \quad (13)$$

где

$$A(x) = \bar{A}_1(x) - \bar{A}_2(x), \quad B(x) = \bar{B}_1(x) - \bar{B}_2(x), \quad F(x) = \bar{\gamma}_2(x) - \bar{\gamma}_1(x).$$

Здесь $m > 2$, $0 < \alpha$, $\beta < 1$, $\alpha + \beta = m/(m + 2)$.

Разделим обе части (13) на $A(x) \neq 0$, а затем к обеим частям получившего соотношения применим оператор $D_{0+}^{1-\alpha-\beta}$.

В результате будем иметь

$$\nu(x) + D_{0+}^{1-\alpha-\beta}M(x)I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\nu(x) = D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\left[\frac{F(x)}{A(x)}\right], \quad (14)$$

где $M(x) = B(x)/A(x)$.

Используя методику и результаты работы [6], а также монографии [7, с. 81–89], можно записать

$$I_1(x) = D_{0+}^{1-\alpha-\beta} M(x) I_{1-}^{1-\alpha-\beta} \nu(x)$$

в виде

$$I_1(x) = \cos[\pi(\alpha + \beta)] M(x) \nu(x) + \mu \int_0^x K_1(x, \xi) \nu(\xi) d\xi + \mu \int_x^1 K_2(x, \xi) \nu(\xi) d\xi,$$

где

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(1 - \alpha - \beta)} = \frac{\sin[\pi(\alpha + \beta)]}{\pi}, \\ K_1(x, \xi) &= \frac{d}{dx} \int_0^\xi \frac{M(t) dt}{(x - t)^{1-\alpha-\beta} (\xi - t)^{\alpha+\beta}}, \\ K_2(x, \xi) &= \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{M(t) dt}{(x - t)^{1-\alpha-\beta} (\xi - t)^{\alpha+\beta}}. \end{aligned}$$

Исследуем поведение ядер $K_1(x, \xi)$ и $K_2(x, \xi)$. Имеем

$$\begin{aligned} K_1(x, \xi) &= M(\xi) \frac{d}{dx} \int_0^\xi \frac{dt}{(x - t)^{1-\alpha-\beta} (\xi - t)^{\alpha+\beta}} - \\ &\quad - \frac{d}{dx} \int_0^\xi \frac{[M(\xi) - M(t)] dt}{(x - t)^{1-\alpha-\beta} (\xi - t)^{\alpha+\beta}}. \end{aligned}$$

Гладкость ядра $K_1(x, \xi)$ определяется гладкостью первого интеграла

$$\begin{aligned} I_2(x, \xi) &= M(\xi) \frac{d}{dx} \int_0^\xi \frac{dt}{(x - t)^{1-\alpha-\beta} (\xi - t)^{\alpha+\beta}} = \\ &= \frac{M(\xi)}{1 - \alpha - \beta} \frac{d}{dx} \left[\left(\frac{\xi}{x} \right)^{1-\alpha-\beta} F\left(1 - \alpha - \beta, 1; 2 - \alpha - \beta; \frac{\xi}{x}\right) \right] = \\ &= - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{1-\alpha-\beta} \frac{M(\xi)}{x - \xi}, \end{aligned}$$

где $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [1, с. 31].

Аналогично

$$\begin{aligned} K_2(x, \xi) &= M(\xi) \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{dt}{(x - t)^{1-\alpha-\beta} (\xi - t)^{\alpha+\beta}} - \\ &\quad - \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{[M(\xi) - M(t)] dt}{(x - t)^{1-\alpha-\beta} (\xi - t)^{\alpha+\beta}}, \end{aligned}$$

$$I_3(x, \xi) = M(\xi) \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{dt}{(x - t)^{1-\alpha-\beta} (\xi - t)^{\alpha+\beta}} =$$

$$= \frac{M(\xi)}{\alpha + \beta} \frac{d}{d\xi} \left[\left(\frac{x}{\xi} \right)^{\alpha + \beta} F \left(\alpha + \beta, 1; 1 + \alpha + \beta; \frac{x}{\xi} \right) \right] = \left(\frac{\xi}{x} \right)^{1 - \alpha - \beta} \frac{M(\xi)}{\xi - x}.$$

Тогда уравнение (14) примет вид

$$A^*(x)\nu(x) + \int_0^1 \frac{K^*(x, \xi)\nu(\xi)d\xi}{\xi - x} = F^*(x), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A^*(x) &= 1 + \cos[\pi(\alpha + \beta)]M(x), \\ K^*(x, \xi) &= \begin{cases} \mu K_1(x, \xi)(x - \xi), & \xi \leq x, \\ \mu K_2(x, \xi)(\xi - x), & \xi \geq x, \end{cases} \\ F^*(x) &= D_{0+}^{1-\alpha-\beta} \left[\frac{F(x)}{A(x)} \right]. \end{aligned}$$

Из установленных свойств ядер $K_1(x, \xi)$ и $K_2(x, \xi)$ заключаем, что ядро $K^*(x, \xi)$ дважды непрерывно дифференцируемо в квадрате $0 < x, \xi < 1$ при $\xi \neq x$ и допускает оценку

$$K^*(x, \xi) = O(1)(\xi - x)^{-1},$$

где $O(1)$ означает ограниченную в $\bar{I} \times \bar{I}$ величину.

В силу условий (2) и свойств дробных производных можно заключить, что $F^*(x) \in C^1(I)$.

Таким образом, уравнение (15) при $A^*(x) \neq 0$ есть сингулярное интегральное уравнение [8, с. 157] с ядром Коши.

Условие

$$[A^*(x)]^2 + \pi^2[K^*(x)]^2 \neq 0$$

гарантирует существование регуляризатора, приводящего уравнение (15) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Отсюда и из единственности искомого решения следует существование решения исследуемой задачи.

Случай 2. Пусть в областях Ω_1 и Ω_2 выполняются требования (6), (7). Тогда на основании условия сопряжения 2) и соотношений (12) имеем

$$D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) + N(x)D_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) + P(x)\tau(x) = Q(x),$$

где

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{\tilde{B}_1(x) - \mu(x)\tilde{B}_2(x)}{\tilde{A}_1(x) - \mu(x)\tilde{A}_2(x)}, \quad P(x) = \frac{\tilde{D}_1(x) - \mu(x)\tilde{D}_2(x)}{\tilde{A}_1(x) - \mu(x)\tilde{A}_2(x)}, \\ Q(x) &= \frac{\mu(x)\tilde{\gamma}_2(x) + \lambda(x) - \tilde{\gamma}_1(x)}{\tilde{A}_1(x) - \mu(x)\tilde{A}_2(x)}, \quad \tilde{A}_1(x) - \mu(x)\tilde{A}_2(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Действуя на обе части оператором $I_{0+}^{1-\alpha-\beta}$ и используя результаты [4, с. 98–103], после преобразований получим

$$\bar{A}^*(x)\tau(x) + \int_0^1 \frac{\bar{K}^*(x, \xi)\tau(\xi)d\xi}{\xi - x} = \bar{F}^*(x),$$

где

$$\begin{aligned}\bar{A}^*(x) &= 1 + \pi \operatorname{ctg}[\pi(\alpha + \beta)]N(x), \quad \bar{F}^*(x) = I_{0+}^{1-\alpha-\beta}Q(x), \\ \bar{K}^*(x, \xi) &= \begin{cases} \frac{\sin[\pi(\alpha + \beta)]}{\pi} [K_5(x, \xi) - K_3(x, \xi)](x - \xi) + \\ + \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha - \beta)} P(\xi)(x - \xi)^{1-\alpha-\beta} & \text{при } x \geq \xi, \\ \frac{\sin[\pi(\alpha + \beta)]}{\pi} [K_6(x, \xi) - K_4(x, \xi)](\xi - x) & \text{при } x \leq \xi, \end{cases} \\ K_3(x, \xi) &= \int_0^\xi \frac{N'(t)dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}}, \\ K_4(x, \xi) &= \int_0^x \frac{N'(t)dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}}, \\ K_5(x, \xi) &= \frac{d}{dx} \int_0^\xi \frac{N(t)dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}}, \\ K_6(x, \xi) &= \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{N(t)dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}}.\end{aligned}$$

Теперь достаточно повторить аргументацию доказательства существования решения задачи первого случая.

Случай 3. Пусть в области Ω_1 выполняется условие (3), а в области Ω_2 — условие (10). Краткости ради положим $C_1(x) = 0$, $\mu(x) = 1$, $\lambda(x) = 0$.

Учитывая условия сопряжения (2), соотношение (11) при $i = 1$ и соотношение (12) при $i = 2$, получим уравнение

$$\begin{aligned}\tau(x) - \bar{A}_1(x)I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tilde{A}_2(x)D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) - \bar{A}_1(x)I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tilde{B}_2(x)D_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) - \\ - \bar{B}_1(x)I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tilde{A}_2(x)D_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) - \bar{B}_1(x)I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tilde{B}_2(x)D_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tau(x) - \\ - \bar{A}_1(x)I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tilde{D}_2(x)\tau(x) - \bar{B}_1(x)I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tilde{D}_2(x)\tau(x) = \\ = \bar{A}_1(x)I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tilde{\gamma}_2(x) + \bar{B}_1(x)I_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tilde{\gamma}_2(x) + \bar{\gamma}_1(x).\end{aligned}\quad (16)$$

Преобразуем уравнение (16). Рассмотрим вначале второе слагаемое (без учёта внешнего коэффициента $-\bar{A}_1(x)$):

$$I_{11}(x) = I_{0+}^{1-\alpha-\beta}\tilde{B}_2(x)D_{1-}^{1-\alpha-\beta}\tau(x).$$

Вычисления, проведённые для второго случая, дают возможность записать $I_{11}(x)$ в виде

$$\begin{aligned}I_{11}(x) &= \pi \operatorname{ctg}[\pi(\alpha + \beta)]\tilde{B}_2(x)\tau(x) + \\ &+ \frac{\sin[\pi(\alpha + \beta)]}{\pi} \int_0^x [K_7(x, \xi) - K_8(x, \xi)]\tau(\xi)d\xi + \\ &+ \frac{\sin[\pi(\alpha + \beta)]}{\pi} \int_x^1 [K_9(x, \xi) - K_{10}(x, \xi)]\tau(\xi)d\xi,\end{aligned}$$

где ядра $K_7(x, \xi), \dots, K_{10}(x, \xi)$ имеют такой же вид, что и ядра $K_3(x, \xi), \dots, K_6(x, \xi)$, только функцию $N(t)$ надо заменить функцией $\tilde{B}_2(t)$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} I_{12}(x) &= I_{0+}^{1-\alpha-\beta} \tilde{A}_2(x) D_{0+}^{1-\alpha-\beta} \tau(x) = \\ &= \frac{\sin[\pi(\alpha + \beta)]}{\pi} \int_0^x \frac{\tilde{A}_2(t) dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tau(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}}. \end{aligned}$$

В силу равенства

$$\begin{aligned} I_{13}(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tilde{A}_2(t) dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}} \int_0^t \frac{\tau(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} = \\ &= \int_0^x \frac{\tilde{A}_2(t) dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tau(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} + \int_0^x \frac{\tilde{A}_2'(t) dt}{(x-t)^{\alpha+\beta}} \int_0^t \frac{\tau(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} \end{aligned}$$

имеем (после перемены порядка интегрирования)

$$I_{12}(x) = \frac{\sin[\pi(\alpha + \beta)]}{\pi} \int_0^x K_{11}(x, \xi) \tau(\xi) d\xi,$$

где

$$K_{11}(x, \xi) = \frac{d}{dx} \int_\xi^x \frac{\tilde{A}_2(t) dt}{(x-t)^{\alpha+\beta} (t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} - \int_\xi^x \frac{\tilde{A}_2(t) dt}{(x-t)^{\alpha+\beta} (t-\xi)^{1-\alpha-\beta}}.$$

Очевидно, что поведение ядра $K_{11}(x, \xi)$ аналогично поведению в смысле гладкости интегралов

$$\begin{aligned} I_{14}^{(1)}(x) &= \tilde{A}_2(x) \frac{d}{dx} \int_\xi^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha+\beta} (t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} = \\ &= \tilde{A}_2(x) \frac{d}{dx} B(\alpha + \beta, 1 - \alpha - \beta) = 0, \end{aligned}$$

и

$$I_{14}^{(2)}(x) = A_2'(x) B(1 + \beta, 1 - \alpha - \beta),$$

где $B(a, b)$ — бета-функция [1, с. 31].

Рассмотрим

$$\begin{aligned} I_{15}(x, \xi) &= I_{1-}^{1-\alpha-\beta} \tilde{A}_2(x) D_{0+}^{1-\alpha-\beta} \tau(x) = \\ &= \frac{\sin[\pi(\alpha + \beta)]}{\pi} \int_x^1 \frac{\tilde{A}_2(t) dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tau(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}}. \end{aligned}$$

Проводя необходимые вычисления, получим

$$I_{15}(x, \xi) = \frac{\sin[\pi(\alpha + \beta)]}{\pi} \left[\int_0^x K_{12}(x, \xi) \tau(\xi) d\xi + \int_x^1 K_{13}(x, \xi) \tau(\xi) d\xi \right],$$

где

$$K_{12}(x, \xi) = \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\tilde{A}_2(t) dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} - \int_x^1 \frac{\tilde{A}_2(t) dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} + \frac{\tilde{A}_2(1)}{(1-x)^{\alpha+\beta}(1-\xi)^{1-\alpha-\beta}},$$

$$K_{13}(x, \xi) = \frac{d}{dx} \int_\xi^1 \frac{\tilde{A}_2(t) dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} - \int_\xi^1 \frac{\tilde{A}_2'(t) dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} + \frac{\tilde{A}_2(1)}{(1-x)^{\alpha+\beta}(1-\xi)^{1-\alpha-\beta}}.$$

Гладкость $K_{12}(x, \xi)$ и $K_{13}(x, \xi)$ будет определяться соответственно гладкостью

$$I_{16}(x, \xi) = \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} = \left(\frac{1-\xi}{1-x} \right)^{\alpha+\beta} \frac{1}{\xi-x};$$

$$I_{17}(x, \xi) = \frac{d}{dx} \int_\xi^1 \frac{dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(t-\xi)^{1-\alpha-\beta}} = \left(\frac{1-\xi}{1-x} \right)^{\alpha+\beta} \frac{1}{\xi-x}.$$

Преобразуем интеграл

$$\begin{aligned} I_{18}(x, \xi) &= I_{1-}^{1-\alpha-\beta} \tilde{B}_2(x) D_{1-}^{1-\alpha-\beta} \tau(x) = \\ &= -\frac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi} \int_x^1 \frac{\tilde{B}_2(t) dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}} \frac{d}{dt} \int_t^1 \frac{\tau(\xi) d\xi}{(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}} = \\ &= \frac{\sin[\pi(\alpha+\beta)]}{\pi} \int_x^1 K_{14}(x, \xi) \tau(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$K_{14}(x, \xi) = \frac{d}{dx} \int_x^\xi \frac{\tilde{B}_2(t) dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}} + \int_x^\xi \frac{\tilde{B}_2'(t) dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}}.$$

Гладкость ядра $K_{14}(x, \xi)$ будет определяться гладкостью

$$I_{19} = \frac{d}{dx} \int_x^\xi \frac{dt}{(t-x)^{\alpha+\beta}(\xi-t)^{1-\alpha-\beta}} = \frac{d}{dx} B(1-\alpha-\beta, \alpha+\beta) = 0.$$

Следовательно, ядро $K_{14}(x, \xi)$ особенностей не имеет и его гладкость будут определять функции $\tilde{B}_2(x)$ и $\tilde{B}_2'(x)$.

Теперь уравнению (16) можно придать вид

$$\mu(x) \tau(x) + \int_0^1 \frac{K^{**}(x, \xi) \tau(\xi) d\xi}{\xi-x} = F_1^*(x), \quad (17)$$

где

$$\mu(x) = 1 - \bar{A}_1(x) \cdot \tilde{B}_2(x) \pi \operatorname{ctg}[\pi(\alpha + \beta)],$$

$$K^{**}(x, \xi) = \begin{cases} \left[\frac{\sin[\pi(\alpha + \beta)]}{\pi} (K_{11}(x, \xi) \bar{A}_1(x) - K_7(x, \xi) - K_8(x, \xi) - \right. \\ \left. - B_1(x) K_2(x, \xi)) - \frac{\bar{A}_1(x) \tilde{D}_2(\xi)}{\Gamma(1 - \alpha - \beta)} \right] (x - \xi) & \text{при } x \geq \xi, \\ \left[\frac{\sin[\pi(\alpha + \beta)]}{\pi} \bar{B}_1(x) (K_{13}(x, \xi) - K_{14}(x, \xi)) - \right. \\ \left. - \frac{\bar{B}_1(x) \tilde{D}_2(\xi)}{\Gamma(1 - \alpha - \beta)} \right] (\xi - x) & \text{при } \xi \geq x, \end{cases}$$

$$F_1^*(x) = \bar{A}_1(x) I_{0+}^{1-\alpha-\beta} \tilde{\gamma}_2(x) + \bar{B}_1(x) I_{-}^{1-\alpha-\beta} \tilde{\gamma}_2(x) + \bar{\gamma}_1(x).$$

Условие нормальной разрешимости уравнения (17) имеет вид

$$\mu^2(x) + \pi^2 [K^{**}(x, x)]^2 \neq 0.$$

Проведённые вычисления дают возможность провести далее доказательство существования решения задачи аналогично первому случаю, что затруднений не вызывает.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Integrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of their Applications*, Minsk, Nauka i Tekhnika, 1987, 688 pp. (In Russian)]
2. А. М. Нахушев, *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*, М.: Наука, 2006. 287 с. [A. M. Nakhushhev, *Zadachi so smeshcheniyem dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with shifts for partial differential equations], Moscow, Nauka, 2006, 287 pp. (In Russian)]
3. М. М. Смирнов, *Вырождающиеся гиперболические уравнения*, Минск: Высшая школа, 1977. 158 с. [M. M. Smirnov, *Vyrozhdaiushchiesya giperbolicheskiye uravneniya* [Degenerate Hyperbolic Equations], Minsk, Vysshaya Shkola, 1977, 158 pp.]
4. С. К. Кумыкова, “Краевая задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения” // *Дифференц. уравнения*, 1980. Т. 16, № 1. С. 93–104; S. K. Kumykova, “Boundary-value problem with translation for a hyperbolic equation degenerate in the interior of a region”, *Differ. Equations*, 1980, vol. 16, no. 1, pp. 68–76.
5. О. А. Репин, С. К. Кумыкова, “Нелокальная задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011. № 4(25). С. 25–36. doi: [10.14498/vsgtu1014](https://doi.org/10.14498/vsgtu1014). [O. A. Repin, S. K. Kumykova, “Nonlocal problem for a equation of mixed type of third order with generalized operators of fractional integro-differentiation of arbitrary order”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2011, no. 4(25), pp. 25–36. (In Russian)].
6. С. К. Кумыкова, Ф. Б. Нахушева, “Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области” // *Дифференц. уравнения*, 1978. Т. 14, № 1. С. 50–65; S. K. Kumykova, F. B. Nakhusheva, “A boundary-value problem for a hyperbolic equation degenerate in the interior of a region”, *Differ. Equations*, 1978, vol. 14, no. 1, pp. 35–46.

7. О. А. Репин, *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов*, Самара: Саратов. гос. ун-т, Самарский филиал, 1992. 164 с. [O. A. Repin, *Krayevyye zadachi so smeshcheniyem dlya uravneniy giperbolicheskogo i smeshannogo tipov* [Boundary value problems with shift for equations of hyperbolic and mixed type], Samara, Saratov State Univ., Samara Branch, 1992, 164 pp. (In Russian)]
8. Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, М.: Наука, 1968. 512 с. [N. I. Muskhelishvili, *Singulyarnyye integral'nyye uravneniya* [Singular Integral Equations], Moscow, Nauka, 1968, 512 pp. (In Russian)]

Поступила в редакцию 04/XII/2013;
в окончательном варианте — 11/II/2014;
принята в печать — 26/II/2014.

MSC: 35L80; 35L20, 35C15

A BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH SHIFT FOR A HYPERBOLIC EQUATION DEGENERATE IN THE INTERIOR OF A REGION

O. A. Repin^{1,2}, S. K. Kumykova³

¹ Samara State Economic University,
141, Sovetskoy Armii st., Samara, 443090, Russian Federation.

² Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russian Federation.

³ Kabardino-Balkarian State University,
173, Chernyshevskogo st., Nalchik, 360004, Russian Federation.

For a degenerate hyperbolic equation in characteristic region (lune) a boundary-value problem with operators of fractional integro-differentiation is studied. The solution of this equation on the characteristics is related point-to-point to the solution and its derivative on the degeneration line. The uniqueness theorem is proved by the modified Tricomi method with inequality-type constraints on the known functions. Question of the problem solution's existence is reduced to the solvability of a singular integral equation with Cauchy kernel of the normal type.

Keywords: *Cauchy problem, boundary-value problem with shift, fractional integro-differentiation operators, singular equation with Cauchy kernel, regularizer, Gauss hypergeometric function, Euler gamma function.*

Received 04/XII/2013;
received in revised form 11/II/2014;
accepted 26/II/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1280>
© 2014 Samara State Technical University.

Citation: O. A. Repin, S. K. Kumykova, "A Boundary-value Problem with Shift for a Hyperbolic Equation Degenerate in the Interior of a Region", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 1 (34), pp. 37–47. doi: [10.14498/vsgtu1280](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1280). (In Russian)

Authors Details: *Oleg A. Repin* (Dr. Phys. & Math. Sci.), Head of Dept., Dept. of Mathematical Statistics and Econometrics¹; Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science². *Svetlana K. Kumykova* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Associate Professor, Dept. of Function Theory.

E-mail addresses: matstat@mail.ru (O.A. Repin, *Corresponding author*),
bsk@rect.kbsu.ru (S.K. Kumykova)