Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Базаров, Синтез замкнутой системы управления для объекта с распределенными параметрами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 212–215

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:58:11

$$L_s = -l + \sqrt{l^2 + 2PH / c_s}, \quad (5)$$

где H – заданное максимальное перемещение объекта.

Механизм перемещения аудиторной доски

Сравнивая (3) и (5), найдем радиус барабана:

$$R = (-l + \sqrt{l^2 + 2PH / c_s}) / (1 - e^{-kj_s}).$$

Из геометрических соображений следует

$$j_s = H / R + 2a - p, \quad DM_1 = M_1 Q \sin g / \sin b,$$

где $g = p - (H / R - j_s) - a$, $b = (H / R - j_s)$, $DE = DM_1 \sin a$. Длина невытянутой пружины $l_0 = l - l - L_s - DE$, где l – базовый размер механизма. Как показывают численные расчеты, жесткость пружины сильно зависит от величины угла a . С ростом a эквивалентная жесткость быстро уменьшается.

УДК 536.24

А.А. Базаров

СИНТЕЗ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЕКТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассмотрена процедура построения алгоритма решения оптимальной задачи для системы с распределенными параметрами. Предложен способ, базирующийся на комбинации теории синтеза оптимального управления для систем с сосредоточенными параметрами и метода конечно-элементных элементов.

Для синтеза замкнутых систем управления для объектов с распределенными параметрами (СРП) используются два подхода: аппроксимация системой с сосредоточенными параметрами (ССП) и применение аппарата синтеза систем управления для СПП; применение аппарата синтеза для СРП. Первый способ является более разработанным, но имеет такие недостатки, как упрощение системы и утрата некоторой части информации. Второй способ имеет более сложную теорию и требует весьма значительных вычислительных ресурсов, но позволяет получать более точные результаты. Среди множества методов синтеза для СРП все большее распространение приобретают численные методы, отличающиеся многообразием поисковых процедур, но малонаглядные. Вместе с тем первый способ обладает хорошо формализуемым и наглядным алгоритмом синтеза. С учетом изложенного предлагается методика синтеза, сочетающая преимущества обоих подходов.

Рассмотрим применение такого способа на примере задачи нагрева цилиндрической заготовки в индукционной установке периодического действия. Тепловая задача описывается дифференциальным уравнением в частных производных с соответствующими краевыми условиями:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = a(T) \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{c(T)g(T)} W(r, z, t); \quad (1)$$

$$I(T) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0; \quad (2)$$

$$I(T) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = a(R)[T_c - T(R, z, t)] + es_0 [T_c^4 - T^4(R, z, t)]; \quad (3)$$

$$I(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = a(r)[T_c - T(r, 0, t)] + es_0 [T_c^4 - T^4(r, 0, t)]; \quad (4)$$

$$I(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=Z} = a(r)[T_c - T(r, Z, t)] + es_0 [T_c^4 - T^4(r, Z, t)]; \quad (5)$$

$$T(r, z, 0) = T_0(r, z). \quad (6)$$

В аналитической формулировке задача с такими сложными граничными условиями не решается без соответствующих упрощений и замен. Для решения поставленной задачи, особенно для тел неклассической формы, наиболее удобен метод конечных элементов [1], позволяющий получить решение в нелинейной постановке для тел любой формы.

С помощью вариационного подхода или с помощью метода Галеркина основному уравнению ставится в соответствие энергетический функционал, который требуется минимизировать:

$$c = \iint_S \left[\frac{1}{2} I r \left(\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right) + c g \frac{\partial T}{\partial t} - WT \right] dr dz + \frac{1}{2} \int_{L_h} h (T^2 - 2T_c T) dL + \int_{L_q} q T dL. \quad (7)$$

Здесь L_h – граница с конвективным теплообменом; L_q – граница, которую пронизывает поток q ; $h = \frac{\alpha}{l}$. Для простоты записи поток излучения q представлен в компактном виде, хотя на каждом шаге по времени производится его пересчет.

Исследуемая область аппроксимируется совокупностью элементов с конечным числом узловых точек. Функционал (7) заменяем суммой отдельных вкладов элементов, определяя, таким образом функциональные соотношения относительно узловых неизвестных.

В качестве элементов использовались симплекс-элементы, т. е. такие, для которых интерполяционный полином имеет первую степень координат. Вершины треугольников, обозначаемые индексами в направлении против часовой стрелки, образуют локальную систему узлов. Для произвольного элемента e_i пробная функция $\hat{T}^{e_i}(r, z)$ выбирается линейной, т. е.

$$\hat{T}^{e_i}(r, z) = a_1^{e_i} + a_2^{e_i} r + a_3^{e_i} z; \quad r, z \in e_i, \quad (8)$$

где $a_1^{e_i}$, $a_2^{e_i}$, $a_3^{e_i}$ – постоянные, в общем случае различные для разных элементов. Значения этих постоянных определяются из выражений

$$a_1 = \frac{1}{2S^e} \cdot (a_i \bar{T}_i + a_j \bar{T}_j + a_k \bar{T}_k); \quad a_2 = \frac{1}{2S^e} \cdot (b_i \bar{T}_i + b_j \bar{T}_j + b_k \bar{T}_k); \quad a_3 = \frac{1}{2S^e} \cdot (c_i \bar{T}_i + c_j \bar{T}_j + c_k \bar{T}_k), \quad (9)$$

где a_i , b_i , c_i – вычисляются по формулам $a_i = r_i r_k - r_j r_k$, $b_i = z_j - z_k$, $c_i = r_k - r_j$, а постоянные a_j , a_k , b_j , b_k , c_j , c_k определяются путем циклической перестановки индексов; $2S^e$ представляет собой удвоенную площадь элемента.

Подставляя (9) в (8), получим

$$\hat{T}^{e_i} = N_i \bar{T}_i + N_j \bar{T}_j + N_k \bar{T}_k = N^e T^e \quad (10)$$

где N^e является матрицей базисных функций,

$$N^e = [N_i, N_j, N_k], \quad (11)$$

а $T^e = [\bar{T}_i, \bar{T}_j, \bar{T}_k]^T$ представляет собой вектор узловых значений температуры.

Используя выражения (10), (11), определяем вклады элементов в матрицы жесткости, демпфирования и в вектор источников:

$$\begin{aligned} [C^e] &= \int_S I [N]^T [N] dS; & [K^e] &= \int_S [B]^T [D] [B] dS + \int_{L_h} h [N]^T [N] dL; \\ \{F^e\} &= - \int_S W [N]^T dS - \int_{L_h} h T_c [N]^T dL + \int_{L_q} q [N]^T dL. \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } [D] = \begin{bmatrix} rI_{rr}^{(e)} & 0 \\ 0 & rI_{zz}^{(e)} \end{bmatrix}; \quad [B] = \frac{1}{2 * S^e} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}.$$

Процесс ансамблирования осуществляется с помощью процедуры поэлементного объединения. Такой способ безразличен к разнородности конечных элементов, из которых собрана исследуемая система. В результате ансамблирования преобразованных элементарных матриц $[K]^e$, $[C]^e$ формируются глобальные матрицы ансамбля КЭ $[K]$, $[C]$, которые являются симметричными ленточными матрицами размерностью $(S * S)$ с шириной полуленты m_k . Величина S равна $S = N''$, N'' – количество узлов.

Полученные матрицы $[K]$, $[C]$ и $\{F\}$ с учетом замены временной производной $\frac{dT}{dt}$ конечно-разностным аналогом объединяем в систему уравнений (схема Галеркина):

$$\left(\frac{[C]}{\Delta t} + \frac{2}{3} [K] \right) \{T\}_{n+1} = \left(\frac{[C]}{\Delta t} - \frac{1}{3} [K] \right) \{T\}_n + \{F\}_n, \quad (12)$$

где Δt – временной шаг, n – номер шага. Выражение (12) перепишем в виде

$$[\hat{K}] \{T\}_{n+1} = \{\hat{F}\}.$$

На этом этапе можно перейти к исследованию задачи синтеза. Возвратимся к дифференциальной форме представления расчетной системы (12):

$$[K] \cdot \{T\} + [C] \cdot \frac{d\{T\}}{dt} - \{F\} = 0. \quad (13)$$

Такой вид характеризует исходную систему с распределенными параметрами, описываемую уравнениями (1) – (6), как систему с сосредоточенными параметрами, так как выражение (13) является обыкновенным дифференциальным уравнением. Перепишем (13) в более привычном для ССП виде

$$\frac{d\{T\}}{dt} = [A] \cdot \{T\} + [B] \cdot \{F\}. \quad (14)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$[A] = \frac{[K]}{[C]} = [C]^{-1} [K]; \quad [B] = \frac{1}{[C]} = [C]^{-1}.$$

Уравнение (14) дополняется начальными условиями

$$\{T(t_0)\} = \{T\}_0. \quad (15)$$

Дальнейшие действия направлены на применение теории оптимального управления для ССП для синтеза оптимальной замкнутой системы управления.

Требуется обеспечить достижение заданного целевого состояния $\{T\}_d$ с наименьшими затратами ресурса управления. Имеющееся в нашем случае ненулевое состояние $\{T\}_d$ приводится к рассматриваемому простой заменой переменных $\{T^*\} = \{T\} - \{T\}_d$. Качество управления определяется квадратичным критерием вида [2]

$$I(u(t)) = \frac{1}{2} \{T\}^T [S_f] \{T(t_f)\} + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (\{T\}^T [F] \{T\} + \{u\}^T [E] \{u\}) dt, \quad (16)$$

где матрицы динамики $[A(t)]$, $[B(t)]$ в общем случае зависят от времени, весовые матрицы $[S_f]$, $[F(t)]$ симметричны и положительно полуопределены, а весовая матрица $[E(t)]$ симметрична и положительно определена.

Для решения задачи составим гамильтониан и уравнение для сопряженных переменных:

$$H(\{T\}, \{u\}, \{I\}, t) = \frac{1}{2} (\{T\}^T [F] \cdot \{T\} + \{u\}^T [E] \cdot \{u\}) + \{I\}^T ([A] \cdot \{T\} + [B] \cdot \{u\}), \quad (17)$$

$$\{I\}^T = - \left(\frac{\partial H}{\partial \{T\}} \right) = -[F] \cdot \{T\} - [A]^T \{I\}, \quad \{I(t_f)\} = [S_f] \cdot \{T(t_f)\} \quad (18)$$

Необходимое условие $\frac{\partial H}{\partial \{u\}} = 0$ дает уравнение

$$\{u\} = -[E]^{-1}[B]^T \{I\}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (14), (18), получим систему

$$\begin{aligned} \dot{\{T\}} &= [A] \cdot \{T\} - [B] \cdot [E]^{-1}[B]^T \cdot \{I\}, \quad \{T(t_0)\} = \{T_0\}; \\ \dot{\{I\}} &= -[F] \cdot \{T\} - [A]^T \{I\}, \quad \{I(t_0)\} = [S_f] \cdot \{T(t_f)\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Эта система определяет линейную двухточечно-граничную задачу, для решения которой применим так называемое преобразование Риккати [3]:

$$\{I(t)\} = [S(t)] \cdot \{T(t)\}, \quad (21)$$

где $[S(t)]$ - симметричная положительно определенная ($n \times n$) – матрица. Воспользовавшись (21), получим из (20)

$$\dot{\{T\}} = [A] \cdot \{T\} - [B] \cdot [E]^{-1}[B]^T [S] \cdot \{T\}; \quad (22)$$

$$\left([S] \cdot \{T\} + \dot{\{T\}} [S] \right) = -[F] \cdot \{T\} - [A]^T [S] \cdot \{T\} \quad (23)$$

Теперь можно заменить $\dot{\{T\}}$ в (23) его выражением (22):

$$\left([S] + [S] \cdot [A] + [A]^T [S] - [S] \cdot [B] \cdot [E]^{-1}[B]^T [S] + [F] \right) \cdot \{T(t)\} = 0.$$

Для того, чтобы это уравнение выполнялось при произвольных $\{T(t)\}$, необходимо, чтобы обращался в нуль матричный множитель при $\{T(t)\}$. Таким образом, получается так называемое уравнение Риккати

$$\dot{[S]} = -[S] \cdot [A] - [A]^T [S] + [S] \cdot [B] \cdot [E]^{-1}[B]^T [S] - [F], \quad [S(t_f)] = [S_f] \quad (24)$$

Граничное условие для $[S]$ получается непосредственно из сравнения (17) и (21). Оптимальный закон управления с обратной связью по состояниям, или просто оптимальный регулятор, задается выражением

$$\{u(t)\} = -[K(t)] \cdot \{T(t)\}, \quad \text{где } [K(t)] = [E]^{-1}[B]^T [S(t)].$$

Итак, выведены зависимости, определяющие пропорциональный регулятор с зависящим от времени матричным коэффициентом усиления $[K(t)]$. Этот регулятор минимизирует критерий (16) на траекториях системы (14), (15), при этом матричный коэффициент усиления $[K(t)]$ может быть определен однократно вне контура управления, так как он не зависит ни от $\{x(t)\}$, ни от $\{u(t)\}$; для определения $[K(t)]$ необходимо решить (23) в обратном времени.

Для решения краевой задачи (24) целесообразно использовать те же вычислительные процедуры, что и для расчета температуры, поэтому заменим операцию дифференцирования по времени конечно-разностной процедурой:

$$\frac{[S]_{i+1} - [S]_i}{\Delta t} = -[S]_{i+1} [A] - [A]^T [S]_{i+1} + [S]_{i+1} [B] \cdot [E]^{-1}[S]_{i+1} - [F]. \quad (25)$$

Особенностью задачи (25) является то, что значение искомой матрицы $[S]$ известно в конечный момент времени, так как оно задается при постановке оптимальной задачи. Исходя из этого имеем обратную задачу, и соответственно процедура поиска решения включает начальное значение $[S]$ на каждом шаге по времени, являющееся результатом решения на предыдущем шаге.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 318 с.
2. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. школа, 1998. 573 с.
3. *Рей У.* Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983. 367 с.