Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Сеницкий, Интегральные представления решений гиперболического уравнения с переменными коэффициентами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998, выпуск 6, 120–123

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu13>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:54:05

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956.3

А.Ю. Сеницкий

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрены некоторые случаи интегрируемости гиперболического уравнения общего вида. Показано, что наряду с приемами преобразования уравнений, использующими групповой анализ, методы факторизации, предложенная процедура построения общего решения является весьма эффективной.

В настоящей работе предложена процедура построения общего решения гиперболического уравнения общего вида, которая является весьма эффективной наряду с приемами преобразования уравнений, использующих групповой анализ [1, 2] и факторизационные методы [3, 4].

В области $\Omega: \{t > 0, 1 < r < a\}$ рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 U(r, t)}{\partial t^2} + A(r) \frac{\partial U}{\partial r} + B(r) \cdot U = 0, \quad (1)$$

где $A(r), B(r) \in C[1, a]$.

Будем считать, что функция $U(r, t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, следовательно, ее можно представить интегралом Фурье, записываемым в виде пары формул:

$$\tilde{U}(r, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} U(r, t) e^{-ipt} dt; \quad (2)$$

$$U(r, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{U}(r, p) e^{ipt} dp. \quad (3)$$

Считая, что $U(r, 0) = \frac{\partial U(r, 0)}{\partial t} = 0$, применим преобразование (2) к (1). Тогда в пространстве изображений получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 \tilde{U}(r, p)}{\partial r^2} + A(r) \frac{\partial \tilde{U}(r, p)}{\partial r} + [B(r) + p^2] \tilde{U}(r, p) = 0. \quad (4)$$

Представим решение уравнения (4) в такой форме:

$$\tilde{U}(r, p) = \varphi(r) \cdot G(s), \quad (5)$$

$$s = p\Psi(r), \quad (6)$$

где $\varphi(r)$, $\Psi(r)$ и $G(s)$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов.

Подставляя (5), (6) в (4), приходим к дифференциальному соотношению

$$S^2 \left[\frac{d^2 G}{dS^2} + \frac{1}{(\Psi')^2} G \right] + S \left[\frac{\Psi'' \cdot \Psi}{(\Psi')^2} + \frac{2\varphi' \Psi}{\varphi \Psi'} + \frac{A \Psi}{\Psi'} \right] \frac{dG}{dS} + \frac{\Psi^2}{\varphi \cdot (\Psi')^2} [\varphi'' + A \varphi' + B \varphi] G = 0, \quad (7)$$

которое может быть удовлетворено различными способами.

Случай 1. Пусть

$$\frac{d^2 G}{dS^2} + \frac{1}{(\Psi')^2} G = 0; \quad (8)$$

$$\varphi(r) \cdot \Psi''(r) + 2\varphi'(r) \cdot \Psi'(r) + A(r)\varphi(r)\Psi'(r) = 0; \quad (9)$$

$$\Psi''(r) + A(r)\varphi'(r) + B(r)\varphi(r) = 0. \quad (10)$$

Полагая, что $\Psi'(r)=1$, т.е.

$$\Psi(r)=r, \quad (11)$$

общее решение уравнения (8) записывается в виде

$$G(s) = C_1(p)e^{is} + C_2(p)e^{-is}. \quad (12)$$

После подстановки равенства (12) в (5) и его обращения по формуле (3), получаем такое представление для оригинала [5]:

$$U(r, t) = \frac{\varphi(r)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} [C_1(p)e^{ip\Psi} + C_2(p)e^{-ip\Psi}] e^{ipt} dp = \varphi(r) [f_1(t + \Psi) + f_2(t - \Psi)]. \quad (13)$$

С учетом (11) равенство (9) существенно упрощается. Имеем

$$\varphi'(r) + \frac{1}{2} A(r) \cdot \varphi(r) = 0,$$

откуда находим

$$\varphi(r) = e^{-\frac{1}{2} \int A(r) dr}. \quad (14)$$

В результате подстановки (14) в (10) получаем следующую функциональную зависимость:

$$B(r) = \frac{1}{4} [2A'(r) + A^2(r)]. \quad (15)$$

Таким образом, приходим к такому утверждению.

Т е о р е м а 1. Для того чтобы выражение (13) являлось замкнутым решением уравнения (1), достаточно выполнения условий (11), (15).

Случай 2. Пусть в рамках представлений (8) - (10) вместо (11) справедливо равенство

$$\frac{1}{[\Psi'(r)]^2} = \frac{1}{\Psi^2(r)}. \quad (16)$$

Тогда (8) является уравнением Эйлера и его общее решение записывается в элементарных функциях. Имеем

$$G(s) = C_1(p)M_1(\Psi) + C_2(p)M_2(\Psi). \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_{1,2}(\Psi) &= [\Psi(r)]^{\frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{4} - p^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad |p| < \frac{1}{2}; \\ M_{1,2}(\Psi) &= [\Psi(r)]^{\frac{1}{2} \pm i \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad |p| > \frac{1}{2}; \\ M_1(\Psi) &= [\Psi(r)]^{\frac{1}{2}}, \quad |p| = \frac{1}{2}; \\ M_2(\Psi) &= [\Psi(r)]^{\frac{1}{2}} \ln \Psi(r), \quad |p| = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Следовательно,

$$U(r, t) = \frac{\varphi(r)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} [C_1(p)M_1(\Psi) + C_2(p)M_2(\Psi)] e^{ipt} dp. \quad (19)$$

Из (16) следует, что $\Psi(r) = e^r$. Тогда справедливы такие соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \exp\left(-\frac{1}{2}r\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int A(r) dr\right), \\ B(r) &= \frac{1}{4} [2A'(r) + A^2(r) - 1] \end{aligned} \quad (20)$$

и имеет место следующее предложение.

Т е о р е м а 2. Для того чтобы решить (19), достаточно выполнения второго из равенств (20).

Рассмотрим теперь альтернативный (8) - (10) вариант построения общего решения уравнения (1).

Случай 3. Пусть имеет место (11), а также следующие равенства:

$$\frac{\Psi''(r) \cdot \varphi(r)}{[\Psi'(r)]^2} + 2 \frac{\varphi'(r)\Psi(r)}{\varphi(r)\Psi'(r)} + \frac{A(r)\Psi(r)}{\Psi'(r)} = 0; \quad (21)$$

$$\frac{\Psi^2(r)}{\varphi(r)[\Psi'(r)]^2} [A(r)\varphi'(r) + B(r)\varphi(r) + \varphi''(r)] = -6; \quad (22)$$

В этом случае равенство (8) принимает вид

$$s^2 \frac{d^2 G(s)}{ds^2} + (s^2 - 6)G(s) = 0.$$

Общее решение последнего уравнения можно представить следующим образом [6]:

$$G(s) = C_1(p) \left\{ \frac{3}{s} \cos[s + C_2(p)] + \left(1 - \frac{3}{s^2}\right) \sin[s + C_2(p)] \right\}. \quad (23)$$

Выполняя обращение равенств (5), (23), находим

$$U(r, t) = \frac{\varphi(r)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} C_1(p) \left\{ \frac{3}{s} \cos[s + C_2(p)] + \left(1 - \frac{3}{s^2}\right) \sin[s + C_2(p)] \right\} e^{ipt} dp. \quad (24)$$

Из соотношения (21) определяем

$$\varphi(r) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int A(r) dr \right].$$

Наконец, из уравнения (22) получаем

$$B(r) = \frac{1}{4} \left[2A'(r) + A^2(r) - \frac{24}{r^2} \right]. \quad (25)$$

Т е о р е м а 3. Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют соотношению (25), то выражение (24) является его общим решением.

Случай 4. Пусть выполняется условие (11) и справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\Psi''(r) \cdot \Psi(r)}{[\Psi'(r)]^2} + A(r) \frac{\Psi(r)}{\Psi'(r)} + 2 \frac{\varphi'(r)\Psi(r)}{\varphi(r)\Psi'(r)} = 1; \quad (26)$$

$$\frac{\Psi^2(r)}{[\Psi'(r)]^2 \varphi(r)} [\varphi''(r) + A(r)\varphi'(r) + B(r)\varphi(r)] = -v^2, \quad (27)$$

где $v \in \mathbb{R}$.

Тогда (7) трансформируется в уравнение Бесселя, т.е.

$$s^2 \frac{d^2 G(s)}{ds^2} + s \frac{dG(s)}{ds} + (s^2 - v^2)G(s) = 0.$$

Его решение записывается в виде

$$G(s) = C_1(p)I_v(s) + C_2(p)Y_v(s). \quad (28)$$

Здесь $I_v(s)$, $Y_v(s)$ - функции Бесселя "v"-го порядка I-го и II-го рода.

Выполняя обращение выражения (5), с учетом (28) определяем $U(r, t)$. Имеем

$$U(r, t) = \frac{\varphi(r)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} [C_1(p)I_v(s) + C_2(p)Y_v(s)] e^{ipt} dp. \quad (29)$$

Принимая во внимание (11), из (26) находим функцию

$$\varphi(r) = r^{1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \int A(r) dr \right]. \quad (30)$$

Далее, из (27) следует, что

$$B(r) = \frac{1}{4} \left[2A'(r) + A^2(r) + \frac{1 - 4v^2}{r^2} \right]. \quad (31)$$

Т е о р е м а 4. При выполнении условия (31) выражение (29) является замкнутым решением уравнения (1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1993. 462 с.
2. Зайцев В.Ф. Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. №3. С. 379-387.
3. Беркович Л.М. Факторизация и преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Н.Х. Розова. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1989. 192 с.
4. Сеницкий Ю.Э., Сеницкий А.Ю. О решении одного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, имеющего приложение в динамической теории упругости // Мат. физика и нелинейн. механика. 1990. Вып.13. С. 22-25.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. М.: Наука, 1969. 343 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 3-е изд. М.: Наука, 1965. 703 с.

УДК 519.63

Т.А. Бенгина, М.Ю. Лившиц

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА СТЕФАНА С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ КООРДИНАТ

Предлагается численный метод решения задачи типа Стефана, основанный на преобразовании координат, трансформирующий изменяющуюся во времени область в стационарную, и на конечно-разностной схеме решения полученной после этого задачи.

Задачи теплопроводности и диффузии с наличием фазовых переходов классифицируют как задачи с подвижной границей или задачи типа Стефана. Аналитические методы применяются в основном для исследования однофазных или двухфазных линейных моделей различных физических процессов. Получить точное решение нелинейной модели с помощью существующих аналитических методов практически невозможно. В связи с этим при моделировании все чаще используются численные методы решения подобных задач, однако и с их помощью не всегда удается достаточно точно отследить закон движения границы раздела фаз. Подобная проблема возникла при изучении математической модели процесса диффузионного насыщения металла. Многофазная диффузия описывается параболическим уравнением переноса для каждой из фаз, которые в совокупности с краевыми условиями и условиями сохранения баланса на границах фазовых переходов представляют собой задачу Стефана. Математическая модель газового азотирования имеет вид

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i(C) \frac{\partial C}{\partial x_i} \right), \quad (1)$$

где $\tau > 0$; $0 < x < L$; $C(x, \tau)$ — концентрация азота в точке x в момент времени τ ; $D_i(C)$ — коэффициент диффузии азота в i -той фазе.

Краевые условия

$$-D_i(C) \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=L} = \beta_i (\pi_N^0 - \pi_N^i), \quad (2)$$

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

где β_i — коэффициент массопереноса i -той фазы; π_N^0 — азотный потенциал печной атмосферы; π_N^i — равновесный азотный потенциал соответствующей фазы.

Начальные условия задачи:

$$C(x, \tau) \Big|_{\tau=0} = C_0(x) = 0, \quad (4)$$

$$\xi_i(0) = \xi_{i0},$$

где $\xi_i(\tau)$ — граница i -той фазы.

Условия на границах раздела фаз: