Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Д. Джураев, А. Р. Хашимов, О существовании решений первой краевой задачи для уравнений третьего порядка составного типа в неограниченной области, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 5–7

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu130>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:54:36

Дифференциальные уравнения

УДК 517.956

Т.Д. Джурев, А.Р. Хашимов

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Доказаны теоремы существования первой краевой задачи для уравнения третьего порядка составного типа в классах функций, растущих на бесконечности.

Интенсивное развитие теории обобщенных функций позволило установить теоремы единственности и существования в соответствующих классах растущих функций для линейных уравнений эллиптического и параболического типов в областях с некомпактной границей в зависимости от геометрических характеристик области (см. [1, 2]). Для уравнений нечетного порядка, занимающих важное место в прикладных вопросах, аналогичные исследования до настоящего времени почти не проводились.

Поэтому целью данной работы является исследование в неограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}_+^n = \{x : x_1 > 0\}$ вопроса о существовании обобщенного решения задачи

$$lAu + Bu = f(x), \quad (1)$$

$$u|_{S_0 \cup S_1 \cup S_2} = 0, \quad l_0 u|_{S_1} = 0, \quad (2)$$

где

$$Au = a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + a^i(x)u_{x_i} + a(x)u;$$

$$Bu = b^{ij}(x)u_{x_i x_j} + b^i(x)u_{x_i} + a(x)u;$$

$$lu = l_0 u + a(x)u, \quad l_0 u = a^k(x)u_{x_k}, \quad \Gamma = \partial\Omega;$$

$$S_0 = \{x \in \Gamma : a^k(x)v_k(x) = 0\}, \quad S_1 = \{x \in \Gamma : a^k(x)v_k(x) > 0\};$$

$$S_2 = \{x \in \Gamma : a^k(x)v_k(x) < 0\}, \quad v(x) = (v_1, \mathbf{K}, v_n) —$$

единичный вектор внутренней нормали к Γ в точке x .

Здесь и в дальнейшем предполагается, что по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до n .

Отметим, что вопрос существования обобщенного решения задачи (1), (2) в ограниченной области исследован в работе [3].

Будем считать, что в некоторой окрестности любой своей точки гиперповерхность Γ представима в виде $x_j = c(x_1, \mathbf{K}, x_{j-1}, \mathbf{K}, x_{j+1}, \mathbf{K}, x_n)$ при каком-либо j , где c принадлежит классу C^2 .

Предположим, что все коэффициенты в (1), а также функции $a(x)$, $a^k(x)$ ($k = \overline{1, n}$) и их производные, встречающиеся в дальнейшем, ограничены и измеримы в любой конечной подобласти Ω .

Далее всюду подразумеваем, что

$$a^{ij} = a^{ji}, \quad a_0 |x|^2 \leq a^{ij} x_i x_j \leq a_1 |x|^2, \quad d^{ij} = d^{ji};$$

$$d_0 |x|^2 \leq d^{ij} x_i x_j \leq d_1 |x|^2, \quad c_1^{ij} = c_1^{ji}, \quad c_{10} |x|^2 \leq c_1^{ij} x_i x_j \leq c_{11} |x|^2;$$

$$\sum_{k=1}^n [a^k(x)]^2 \neq 0, \quad c_1^{ij} - a^i a - c_1^i < 0;$$

$$q^{ij} = c_1 - \frac{1}{2} c_{1x_i}^i + \frac{1}{2} c_{1x_i x_j}^{ij} + \frac{1}{2} (a^i a) \leq -c_0 < 0$$

при $x \in \Omega \cup \Gamma$, $x \in \mathbf{R}^n$; $a_0, a_1, d_0, d_1, c_{10}, c_{11}, c_0$ — положительные постоянные,

где

$$d^{ij} = c_1^{ij} - (a^i a^{kj})_{x_k} + a^i a^j + \frac{1}{2} (a^k a^{ij})_{x_k};$$

$$c_1^{ij} = b^{ij} + a a^{ij}, \quad c_1^i = b^i + a a^i - a_{x_k}^k a^i, \quad c_1 = b + a a - a_{x_k}^k a.$$

Пусть $\{\Omega_t\}$ — семейство конечных подобластей области Ω , зависящее от параметра $t \in \Pi = \{t : 0 \leq t \leq t^0\}$, $t^0 \leq \infty$. Будем предполагать, что $\Omega_t \subset \Omega_{t'}$, если $t < t'$. Обозначим $S_t = \partial\Omega_t \setminus \partial\Omega_{t'}$. Будем предполагать, что S_t — связная $(n-1)$ -мерная поверхность, обладающая той же гладкостью, что и $\partial\Omega$, а её граница $\partial S_t \subset \partial\Omega$.

Положим $\Gamma_t = \Gamma \cap \partial\Omega_t$, $S_{0,t} = \{x \in \Gamma_t : a^k v_k = 0\}$, $S_{1,t} = \{x \in \Gamma_t : a^k v_k > 0\}$, $S_{2,t} = \{x \in \Gamma_t : a^k v_k < 0\}$. Для $h > 0$ определим $S_{1,h,t} = \{x \in S_{1,t} : r(x, \partial S_{1,t}) > h\}$, $S_{1,t}^h = S_{1,t} \setminus S_{1,h,t}$.

Пусть $E(\Omega_t)$ есть множество функций J из класса $C^2(\Omega_t)$ таких, что $J=0$ на Γ_t и для некоторого $h > 0$ будут $l_0 J = 0$ на $S_{0,t} \cup S_{2,t} \cup S_{1,t}^h$.

Через $H(\Omega_t)$ обозначим замыкание $E(\Omega_t)$ по норме

$$\|w\|_{H(\Omega_t)} = \left[\int_{\Omega_t} (d^{ij} w_{x_i} w_{x_j} + w^2) dx + \int_{S_{1,t}} a^k v_k a^{ij} w_{x_i} w_{x_j} ds \right]^{1/2}.$$

Рассмотрим билинейную форму

$$a_1(u, J) = \int_{\Omega_t} \left[a^k a^{ij} u_{x_i} J_{x_j} + (a^k a^{ij})_{x_j} u_{x_i} J_{x_k} - a^k a_i u_{x_i} J_{x_k} - \right. \\ \left. - c_1^{ij} u_{x_i} J_{x_j} + (c_1^{ij} - a^i a - c_1^i) u J_{x_i} + (c_1 - c_{1x_i}^i + c_{1x_i x_j}^{ij}) u J \right] dx. \quad (3)$$

О п р е д е л е н и е. Назовём обобщенным решением задачи (1), (2) в области Ω функцию $u(x)$, такую, что для любой конечной подобласти Ω_t области Ω , $u(x) \in H(\Omega_t)$ и выполняется соотношение

$$a_1(u, J) = \int_{\Omega_t} f \cdot J dx \quad (4)$$

для произвольной функции $J(x) \in E(\Omega_t)$, $J=0$ на S_t .

I. Пусть сначала $a^k = \text{const}$, $k = \overline{1, n}$, $a_1 > 0$. В данном случае в работе [3] доказано принятие обобщенным решением второго из условий (2) в среднем.

Для простоты изложения предположим сначала, что $S_t = \Omega \cap \{x : x_1 = t + g\}$ для любого $t \in [0, t_0]$, $g = \text{const}$.

Введем обозначения:

$$Q(u) = d^{ij} u_{x_i} u_{x_j} - q^{ij} u^2, \quad g = a_1 d_0^{-\frac{1}{2}} \cdot (a^1)^2, \quad P(t) = \sup_{S_t} B(x), \quad (5)$$

$$B(x) = \max \left\{ 2^{-1} \left(a^1 a^1 + c_1^i - (a^1 a^{ij})_{x_j} \right), 0 \right\}. \quad (6)$$

Положим

$$0 < I(t) \leq \inf_{v \in N} \left\{ \left[\int_{S_t} Q(v) ds \right] \cdot \left[\int_{S_t} v^2 ds \right]^{-1} \right\}, \quad (7)$$

где N — множество функций v , непрерывно дифференцируемых в окрестности S_t при $x \in \overline{\Omega}$ и равных нулю на $S_t \cap \Gamma$.

Пусть функция $\Phi(t)$ положительная при $t \in \Pi$ такая, что

$$\Phi(t) \geq I^{-\frac{1}{2}}(t) + P(t) I^{-1}(t). \quad (8)$$

В дальнейшем на протяжении всей работы изложение будет вестись в зависимости от типа области. Исходя из этого, рассмотрим два класса областей Ω , для которых выполнено одно из условий:

- А) $\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \geq e \quad \forall t \in \Pi, e = \text{const}, 0 < e < 1;$
- В) $\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} < e \quad \forall t \in \Pi.$

Пусть $t(b)$ является решением уравнения

$$\frac{dt}{db} = \frac{\Phi}{et + \Phi_t} \text{ в случае А)} \quad (9)$$

или уравнения

$$\frac{dt}{db} = \frac{\Phi}{et + e} \text{ в случае В)}, \quad (10)$$

удовлетворяющим условию $t(0) = 0$, где функция Φ такова, что правые части (9) и (10) будут абсолютно непрерывны.

Для задачи (1), (2) будут справедливы следующие теоремы (см. [4]).

Теорема 1 (аналог принципа Сен–Венана). Пусть $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1), (2) в области Ω из класса А), причем

$$(a^1 a^i)_{x_i} - (a^1 a^{ij})_{x_i x_j} + 3c_{1x_i x_j}^{ij} - 2a^i a - 2c_1^1 \geq 0 \text{ и } f(x) = 0 \text{ в } \Omega_{t^0}. \quad (11)$$

Тогда при любых R_0 и R , таких, что $0 \leq R_0 \leq R$, имеет место оценка

$$\int_{\Omega_{t(R_0)}} Q(u) dx \leq \exp \left\{ - \int_{t(R_0)}^{t(R)} \frac{es ds}{\Phi(s)} \right\} \int_{\Omega_{t(R)}} Q(u) dx. \quad (12)$$

Теорема 2 (аналог принципа Сен–Венана). Пусть $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1), (2) в области Ω из класса В), причем выполнены условия (9). Тогда при любых R_0 и R , таких, что $0 \leq R \leq R_0$, имеет место оценка

$$\int_{\Omega_{t(R_0)}} Q(u) dx \leq \frac{t(R) + 1}{t(R_0) - 1} \exp \{ -(R - R_0) \} \int_{\Omega_{t(R)}} Q(u) dx. \quad (13)$$

Теорема 3 Пусть для каждой из областей $\Omega_{t(R)}$ имеем $\Lambda(\Omega_{t(k)}) > 0$, а функция $f(x)$ определена в Ω и удовлетворяет соотношениям

$$\Lambda^{-1}(\Omega_{t(k)}) \int_{\Omega_{t(k)}} f^2 dx \leq C_5 \exp \left\{ (1-d) \int_0^{t(k)} \frac{es ds}{\Phi(s)} \right\}, \quad k = 1, 2, \mathbf{K},$$

где $d = \text{const}$, $0 < d < 1$, постоянная C_5 не зависит от k , $t(k)$ — функция, определенная в (12). Тогда существует единственное обобщенное решение $u(x)$ задачи (1), (2), для которого справедливы неравенства

$$\int_{\Omega_{t(k)}} Q(u) dx \leq C_6 \exp \left\{ (1-d) \int_0^{t(k)} \frac{es ds}{\Phi(s)} \right\}, \quad k = 1, 2, \mathbf{K}.$$

Для областей из класса В) справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть для каждой из областей $\Omega_{t(R)}$ имеем $\Lambda(\Omega_{t(k)})$ и пусть функция $f(x)$ определена в Ω , удовлетворяет соотношениям

$$\Lambda^{-1}(\Omega_{t(k)}) \int_{\Omega_{t(k)}} f^2 dx \leq C_7 \exp \{ (1-d)k \}, \quad k = 1, 2, \mathbf{K},$$

где $d = \text{const}$, $0 < d < 1$, $e = \text{const}$, $0 < e < 1$, постоянная C_7 не зависит от k , $t(k)$ — функция, определенная в (13). Тогда существует единственное обобщенное решение $u(x)$ задачи (1), (2), для которого справедливы неравенства

$$\int_{\Omega_{t(k)}} Q(u) dx \leq C_7 \exp \{ (1-d)k \}, \quad k = 1, 2, \mathbf{K}.$$

З а м е ч а н и е. Аналогичные результаты могут быть получены, когда $S_t = \Omega \cap \{ |x| = t + g \}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. // УМН. 1976. Т. XXXI. Вып. 6(113). С. 142–166.
2. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. // Математический сборник. 1980. № 4. С. 588–610.
3. Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: НГУ, 1990. 131 с.
4. Хашимов А.Р. // Узбекский математический журнал. 2001. № 5–6. С. 64–71.

Поступила 25.05.2003 г.