Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Малышев, Факторизация дифференциальных уравнений в частных производных, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 8–11

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:58:09

ФАКТОРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Развивается символический метод применительно для дифференциальных уравнений в частных производных, допускающих факторизацию. Показано, что применение символического метода позволило получить общее решение задачи Гурса, записанное через функцию Римана. Приводятся многочисленные примеры, иллюстрирующие предложенный подход.

Исследуются дифференциальные уравнения в частных производных, допускающие факторизацию. Применение символического метода позволяет получать общее решение задачи Гурса, записанное через функции Римана. Пусть $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ - оператор дифференцирования по пе-

ременной x_k , $\frac{1}{D_k} = \int_{x_{k0}}^{x_k} \dots$ - оператор интегрирования, $x = (x_1, \mathbf{K}, x_n)$ - n -мерный вектор,

$D = (D_1, \dots, D_n)$ - оператор градиента, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ - произвольный вектор. Положим $\xi^p = \xi_1^{p_1} \dots \xi_n^{p_n}$. Компоненты вектора ξ могут быть числами или операторами, в частности, для $\xi = D$ символ D^p обозначает дифференциальный оператор $D^p = D_1^{p_1} \mathbf{K} D_n^{p_n}$. Порядок дифференциального оператора D^p обозначается через $|p|$, $|p| = p_1 + \mathbf{K} + p_n$. Рассмотрим дифференциальный оператор порядка m : $L_m(D) \equiv \sum_{|p|=m} a^p D^p$, где коэффициенты a^p могут быть постоянными или функциями независимых переменных x [1].

В дальнейшем будем предполагать, что оператор $L_m(D)$ допускает одну из факторизаций:

$$1. \quad (D_1 - \mathfrak{A}_1) \sum_{|p| \leq m-1} a^p D^p \quad (\mathfrak{A}_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_1}),$$

$$2. \quad (\sum_{i=1}^n a_i D_i) \sum_{|p| \leq m-1} a^p D^p,$$

а исследуемые уравнения будут:

$$1^0 \quad (D_1 - \mathfrak{A}_1) \sum_{|p| \leq m-1} a^p D^p u = f; \quad (1)$$

$$2^0 \quad (\sum_{i=1}^n a_i D_i) \sum_{|p| \leq m-1} a^p D^p u = f. \quad (2)$$

Рассмотрим каждый из указанных случаев отдельно.

1. С помощью формул символического метода [2] уравнение (1) можно представить в виде

$$e^{a_1} D_1 e^{-a_1} \sum_{|p| \leq m-1} a^p D^p u = f.$$

Деля обе части полученного соотношения последовательно на экспоненту e^{a_1} и на D_1 , получим уравнение, порядок которого понизился на единицу.

$$\sum_{|p| \leq m-1} a^p D^p u = e^{a_1} \frac{1}{D_1} e^{-a_1} f + e^{a_1} j_1,$$

(j_1 - произвольная функция).

Если оператор $L_{m-1}(D)$ снова допускает факторизацию вида 1^0 , то процесс интегрирования можно продолжить. В итоге получим общее решение уравнения (1), зависящее от m произвольных функций j_i ($i = 1, \mathbf{K}, m$).

Случай 2^0 сводится к случаю 1^0 с помощью некоторых замен переменных. Найдем первые интегралы линейного уравнения $\sum_{i=1}^n a_i D_i V = 0$.

Пусть это будут функции $\psi_i(x)=c$, ($i=1, \dots, n-1$, $c_i=\text{const}$). Сделаем замену переменных: $\xi_i=\psi_i$, $\xi_n=\psi_n$. Тогда линейный множитель случая 2^0 превратится в линейный множитель случая 1^0 .

Действуя как выше, получим символическое представление уравнения (2). Итак, справедлива теорема.

Т е о р е м а 1. Если оператор $L_m(D)$ факторизуем, то уравнение (1) интегрируется в квадратурах.

Задача Гурса. Найти решение уравнения

$$L_n(D)U=f \quad (3)$$

в области $G = \{x : x^0 \leq x \leq x^1\}$, удовлетворяющее краевым условиям

$$U(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \dots, x_n) = j_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad (4)$$

при условии согласования

$$j_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \dots, x_n) = j_i(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j^0, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), j < i \quad [3].$$

Рассмотрим оператор $L_n^*(D) \equiv \sum_{|p| \leq n} (-1)^p D^p a_p$, сопряженный к оператору $L_m(D)$ [1]. Решение уравнения $L_n^*(D)V=0$ есть функция Римана $V=R(x^0, x)$ со свойствами $R(x, x) \equiv 1, R(x^0, x^0) \equiv 1$. По переменным x^0 функция Римана удовлетворяет уравнениям $L_n(D)U=0$ [3, 6].

Задачу Гурса будем решать в предположении факторизации оператора

$$L_n^*(D)V \equiv \prod_{k=1}^n (D_k - a_k)V = 0, \quad (5)$$

$$\text{где } a_k = \mathfrak{A}_n = \frac{\partial a_k}{\partial x_k}, \quad a_k = \int_{x_k^0}^{x_k} a_k(x_1, \mathbf{K}, x_{k-1}, t_k, x_{k+1}, \mathbf{K}, x_n) dt_k.$$

Символическим методом приведем уравнения (5) к виду

$$e^{a_1} D_1 e^{a_2 - a_1} \mathbf{K} D_n e^{-a_n} V = 0. \quad (6)$$

Пусть $x = x^0 = \text{const}$; $j=1, \mathbf{K}, n-1$. Из (6) тогда получим $e^{a_n} D_n e^{-a_n} V = 0$. Отсюда $e^{-a_n} V = \Psi_n$ (Ψ_n – произвольная функция), $R = e^{a_n} \Psi_n$. Для нахождения Ψ_n положим $x_n = x_n^0$. В силу $R(x^0, x^0) \equiv 1$ получим $\Psi_n = 1$, то есть $R(x^0, x^0) \big|_{x_i = x_i^0} = e^{a_n(x_1^0, \mathbf{K}, x_{n-1}^0, x_n^0)}$.

Пусть теперь $x_p = x_p^0 = \text{const}$, $p=1, \dots, n-2$. Решаем уравнения $(D_{n-1} - \mathfrak{A}_{n-1})(D_n - \mathfrak{A}_n)V = 0$, $e^{a_{n-1}} D_{n-1} e^{a_n - a_{n-1}} D_n e^{-a_n} V = 0$. Отсюда: $V \equiv R \big|_{x_p = x_p^0} = e^{a_n} \frac{1}{D_n} e^{a_{n-1} - a_n} \Psi_{n-1} + e^{a_n} \Psi_{n-2}$ (Ψ_{n-1}, Ψ_{n-2} – произвольные функции). При $x_n = x_n^0$, $R \big|_{x_p = x_p^0} = \Psi_{n-2}$, то есть $j_2 = e^{a_{n-1}(x_1^0, \mathbf{K}, x_{n-1}^0, x_n^0)}$.

При $x_{n-1} = x_{n-1}^0$ имеем

$$R \big|_{x_p = x_p^0} = \left(e^{a_n} \frac{1}{D_n} e^{a_{n-1} - a_n} \Psi_{n-1} \right) \bigg|_{x_p = x_p^0} + \left(e^{a_n} \Psi_{n-2} \right) \bigg|_{x_p = x_p^0}$$

(здесь $\Psi_{n-2} = 1$ и крайние члены равны, следовательно, $\Psi_{n-1} = 0$). Таким образом, $R \big|_{x_p = x_p^0} = \left(e^{a_n} \Psi_{n-2} \right) \big|_{x_p = x_p^0} = e^{a(x_1^0, \mathbf{K}, x_{n-2}^0, x_{n-1}^0, x_n^0) + a_{n-1}(x_1^0, x_2^0, \mathbf{K}, x_{n-2}^0, x_{n-1}^0, x_n^0)}$. Продолжая процесс, в общем случае получим экспоненциальное представление функции Римана:

$$R(x, x^0) = e^{a_n(x_1, \mathbf{K}, x_n) + a_{n-1}(x_1, \mathbf{K}, x_{n-1}, x_n^0) + \mathbf{K} + a_1(x_1, x_2^0, \mathbf{K}, x_n^0)} \equiv \exp \left\{ \int_{x_n^0}^{x_n} a_n(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_{n-1}, t_n) dt_n + \int_{x_{n-1}^0}^{x_{n-1}} a_{n-1}(x_1, \mathbf{K}, t_{n-1}, x_n^0) dt_{n-1} + \mathbf{K} + \int_{x_1^0}^{x_1} a_1(t_1, x_2^0, \mathbf{K}, x_n^0) dt_1 \right\}. \quad (7)$$

Формула (7) другим способом получена в [3] и [5]. Нетрудно показать, что сопряженным оператором к оператору $L_n^*(D) \equiv \prod_{k=1}^n (D_k - a_k)$ будет оператор $L_n(D) \equiv \prod_{k=n}^1 (D_k + a_k)$.

Отсюда следует теорема 2.

Т е о р е м а 2. Если оператор $L_n(D)$ факторизуем, то и сопряженный к нему оператор $L_n^*(D)$ также факторизуем и, наоборот, из факторизации оператора $L_n^*(D)$ следует факторизация оператора $L_n(D)$.

С л е д с т в и е. Если оператор $L_n(D)$ или $L_n^*(D)$ факторизуем, то уравнение $L_n(D)U=f$ ($L_n^*(D)V=F$) интегрируется в квадратурах.

Доказательство получается интегрированием символическим методом.

Приступим теперь к решению задач Гурса для уравнения

$$L_n(D) \equiv \prod_{k=m}^1 (D_k + a_k) U = f.$$

Применяя символический метод, получим $\prod_{k=m}^1 e^{-a_k} D_k e^{a_k - a_{k-1}} U = f \quad (a_0 = 0)$. Окончательно

$$U = e^{-a_1} \frac{1}{D_1} e^{a_1 - a_2} \mathbf{K} \frac{1}{D_n} e^{a_n} f + e^{-a_1} \frac{1}{D_1} e^{a_1 - a_2} \mathbf{K} \frac{1}{D_{n-1}} e^{a_{n-1} - a_n} \Psi_m + \mathbf{K} + e^{-a_1} \frac{1}{D_1} \Psi_2 + e^{-a_1} \Psi_1. \quad (8)$$

Здесь $\Psi_1, \dots, \Psi_n$ - произвольные функции, подлежащие определению при выполнении краевых условий.

Пусть $x_n = x_n^0$, тогда $\Psi_n = [e^{-a_{n-1}} D_{n-1} e^{a_{n-1} - a_{n-2}} \mathbf{K} D_1 e^{a_1} j_n]_{x_n = x_n^0}$.

При $x_{n-1} = x_{n-1}^0$ имеем

$$\Psi_{n-1} = [e^{-a_{n-2}} D_{n-2} e^{a_{n-2} - a_{n-3}} \mathbf{K} D_1 e^{a_1} j_{n-1}]_{x_{n-1} = x_{n-1}^0}. \quad (9)$$

■

При $x_1 = x_1^0 - \Psi_1 = j_1(x_1, \dots, x_n)$.

Формулы (8), (9) дают решение задачи Гурса. Эти формулы допускают представление через функции Римана и тогда они совпадают с известными формулами [3].

Покажем это для случая $n=2$. Решим задачу Гурса для уравнения

$$L(D)U \equiv U_{xy} + a(x,y)U_x + b(x,y)U_y + c(x,y)U = f(x,y) \quad (10)$$

в прямоугольнике $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$ с краевыми условиями

$$U(x_0, y_0) = j(y), \quad U(x, y_0) = \Psi(x), \quad j(y_0) = \Psi(x_0). \quad (11)$$

Предполагая, что уравнение (10) факторизуемо, запишем его в виде

$$L(D)U \equiv (D_y + a)(D_x + b)U = f \quad (c = ab + by). \quad (12)$$

Сопряженное уравнение будет

$$L^*(D)V \equiv (D_x - a)(D_y - b)V = 0. \quad (13)$$

Обозначим $a = a_y, b = b_x, (a = \int_{y_0}^y a(x, t) dt, \quad b = \int_{x_0}^x b(t, y) dt)$.

Решение уравнения (13) дает функцию Римана для уравнения (12):

$$R(x, y, x_0, y_0) = e^{a(x, y) + b(x, y_0)} = \exp \left\{ \int_{y_0}^y a(x, t) dt + \int_{x_0}^x b(t, y_0) dt \right\}.$$

Решение задачи Гурса для уравнения (12), согласно (8) и (9), будет

$$U = e^{-b} \frac{1}{D_x} e^{b-a} \frac{1}{D_y} e^a f + e^{-b} \frac{1}{D_x} \{e^{b-a} [b\Psi + \Psi']\}_{y=y_0} + e^{-b} j. \quad (14)$$

Выразим это решение через функцию Римана. Для этой цели в (14) внесем все экспоненты под знаки интегралов:

$$U = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y e^{-b(x, y) + b(x, y) - a(x, y) + a(x, h)} f(x, h) dh dx + \int_{x_0}^x e^{-b(x, y) + b(x, y) - a(x, y)} [b(x, y_0) \Psi(x) + \Psi'(x)] dx + e^{-b(x, y)} j(y).$$

Но

$$-b(x, y) + b(x, y) = -\int_{x_0}^x b(t, y) dt + \int_{x_0}^x b(t, y) dt = -\int_x^x b(t, y) dt,$$

$$a(x, y) = \int_{y_0}^y a(x, t) dt, \quad e^{-b(x, y)} = R(x_0, y; x, y), \quad e^{-\int_{y_0}^y a(x, t) dt - \int_x^x b(t, y) dt} = R(x, y_0; x, y).$$

Интегрируя по частям в интеграле, содержащем Ψ' , окончательно получим

$$U = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y R(x, h, x, y) f(x, h) dh dx + \int_{x_0}^x [b(x, y_0) R(x, y_0, x, y) - \frac{\partial}{\partial x} R(x, y_0, x, y)] \Psi(x) - R(x_0, y_0, x, y) \Psi(x_0) + R(x_0, y, x, y) j(y). \quad (15)$$

Формула (15) дает решение задачи Гурса для уравнения (10), (11) (с заданной факторизацией (12)).

Рассмотрим уравнение $(Dy + a)(Dx + b)V = 0$ при $x = x_0$. Его решение будет

$$R(x_0, y_0, x_0, y) = e^{\int_{y_0}^y a(x_0, t) dt}.$$

Заменим y_0 на h и продифференцируем по h :

$$\frac{\partial}{\partial h} R(x_0, h, x_0, y) - R(x_0, h, x_0, y) a(x_0, h) = 0.$$

Добавим к формуле (15) нулевое слагаемое

$$U = \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y R(x, h, x, y) f(x, h) dh dx + \int_{x_0}^x [b(x, y_0) R(x, y_0, x, y) - \frac{\partial}{\partial x} R(x, y_0, x, y)] \Psi(x) dx + \int_{y_0}^y [a(x_0, h) R(x_0, h, x, y) - \frac{\partial}{\partial h} R(x_0, h, x, y)] j(h) dh + R(x_0, y_0, x, y) \Psi(x) + R(x_0, y_0, x, y) j(y) - R(x_0, y_0, x, y) \Psi(x_0). \quad (16)$$

Теперь формула (16) совпадает с формулой (1.20) из [3], полученной другим способом без учета факторизации уравнения.

Итак, использование символического метода в случае факторизации дифференциальных уравнений в частных производных облегчает нахождение решений этих уравнений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Курант Р. Уравнение с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
2. Малышев Ю.В. Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и сложными функциями // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2002. Вып. 16. С. 5-9.
3. Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими производными. Казань: Казан. мат. о-во. 2001. 227 с.
4. Триколин Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИИЛ, 1957. 444 с.
5. Волкодав В.Ф., Захаров В.Н. Функции Римана для одного класса дифференциальных уравнений в трехмерном евклидовом пространстве и ее применения. Самара: СамГТУ, 1996. 53 с.
6. Лернер М.Е. Принципы максимума для уравнений гиперболического типа и новые свойства функции Римана. Самара: СамГТУ, 2001. 113 с.

Поступила 5.03.2003 г.