Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Кудинов, Е. В. Стефанюк, С. А. Назаренко, Метод координатных функций в нестационарных задачах теплопроводности для многослойных конструкций, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 12–15

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu132>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:42:49

МЕТОД КООРДИНАТНЫХ ФУНКЦИЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Разрабатывается метод построения аналитического решения задачи теплопроводности для двухслойной бесконечно протяженной пластины при граничных условиях третьего рода. Дается достаточно простой алгоритм определения собственных чисел при помощи дополнительных граничных условий, получаемых из основного дифференциального уравнения. Приведены примеры решения конкретной задачи и выполнено сравнение данных расчета по предложенной методике с данными других авторов.

Метод координатных функций, изложенный в [1-6], позволяет находить простые по форме точные аналитические решения задач теплопроводности для бесконечно протяженных пластины, цилиндра и шара. Важной особенностью является введение дополнительных граничных условий, получаемых из основного дифференциального уравнения. Их необходимость связана с появлением дополнительного параметра m (собственные числа) после разделения переменных в исходном дифференциальном уравнении.

Рассмотрим применение этого метода к решению задачи теплопроводности для двухслойной бесконечно протяженной пластины при граничных условиях 3 – го рода в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial t_i(h,t)}{\partial t} = a_i \frac{\partial^2 t_i(h,t)}{\partial h^2} \quad (h_{i-1} \leq h \leq h_i; i=1,2; h_0=0; h_2=d); \quad (1)$$

$$t_i(h,0) = t_{0i}; \quad (2)$$

$$\partial t_i(0,t)/\partial h = 0; \quad (3)$$

$$t_1(h_1,t) = t_2(h_1,t); \quad (4)$$

$$I_1 \partial t_1(h_1,t)/\partial h = I_2 \partial t_2(h_1,t)/\partial h; \quad (5)$$

$$I_2 \partial t_2(h_2,t)/\partial h = a[t(h_2,t) - t_{cp}], \quad (6)$$

где t_i - температура i - того слоя; t - время; h - координата; a_i , I_i - коэффициенты теплопроводности и теплопроводности i - того слоя; t_{0i} - начальная температура; t_{cp} - температура среды; $d = d_1 + d_2$ - толщина двухслойной системы; d_1 , d_2 - толщины слоёв; a - коэффициент теплоотдачи.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры $x = h/d$; $Fo = at/d^2$; $Bi = ad/I$; $\Theta_i(x, Fo) = (t_i - t_{cp})/(t_{0i} - t_{cp})$; a - наименьший из коэффициентов теплопроводности a_i ($i=1,2$).

С учетом принятых обозначений задача (1) – (6) примет вид

$$\frac{\partial \Theta_i(x, Fo)}{\partial Fo} = \frac{a_i}{a} \frac{\partial^2 \Theta_i(x, Fo)}{\partial x^2} \quad (Fo > 0; x_{i-1} \leq x \leq x_i; i=1,2; x_0=0; x_2=1); \quad (7)$$

$$\Theta_i(x,0) = 1; \quad (8)$$

$$\partial \Theta_i(0, Fo)/\partial x = 0; \quad (9)$$

$$\Theta_1(x_1, Fo) = \Theta_2(x_1, Fo); \quad (10)$$

$$I_1 \partial \Theta_1(x_1, Fo)/\partial x = I_2 \partial \Theta_2(x_1, Fo)/\partial x; \quad (11)$$

$$\partial \Theta_2(1, Fo)/\partial x + Bi \Theta_2(1, Fo) = 0. \quad (12)$$

Следуя методу разделения переменных, решение задачи (7) – (12) отыскивается в виде

$$\Theta_i(x, Fo) = j_i(Fo) \Psi_i(x). \quad (13)$$

Подставляя (13) в (7), получим следующие два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$j_i'(Fo) + m j_i(Fo) = 0; \quad (14)$$

$$\frac{a_i}{a} \Psi_i''(x) + m \Psi_i(x) = 0, \quad (15)$$

где $m = \nu^2$.

Решение уравнения (14) известно и имеет вид

$$j_{ni}(Fo) = A_n \exp(-m_n Fo), \quad (16)$$

где A_n - неизвестные коэффициенты.

Граничные условия и условия сопряжения для уравнения (15) будут

$$\Psi_1'(0) = 0; \quad (17)$$

$$\Psi_1(x_1) = \Psi_2(x_1); \quad (18)$$

$$I_1 \Psi_1'(x_1) = I_2 \Psi_2'(x_1); \quad (19)$$

$$\Psi_2'(1) + Bi \Psi_2(1) = 0. \quad (20)$$

Решение уравнения (15) принимается в виде

$$\Psi_{ni}(x) = \sum_{k=0}^n C_{ki} N_{ki}(x) \quad (i=1,2), \quad (21)$$

где C_{ki} - неизвестные коэффициенты; N_{ki} - координатные функции.

В качестве координатных для первого и второго слоя примем функции

$$N_{k1} = x^k \quad (k=0, 2, 4, 6...); \quad (22)$$

$$N_{k2} = x^k \quad (k=0, 1, 3, 5...). \quad (23)$$

Неизвестные коэффициенты C_{ki} ($k=0, n$; $i=1,2$) находятся из граничных условий (17) – (20). Так как число неизвестных коэффициентов может быть сколь угодно большим, а граничных условий и условий сопряжения только четыре, то необходимо ввести дополнительные граничные условия. Такие условия можно получить путем выполнения уравнения (15) и производных от него различных степеней в точке $x=0$ и $x=1$. В качестве первого дополнительного условия возьмем условие

$$\Psi_1(0) = \text{const} = 1, \quad (24)$$

вытекающее из граничного условия (17). Другие дополнительные граничные условия (в точке $x=0$) будут иметь вид

$$\Psi_1''(0) = -m_2/a_1; \quad (25)$$

$$\Psi_1'''(0) = 0; \quad (26)$$

$$\Psi_1^{IV}(0) = m^2 a_2/a_1; \quad (27)$$

$$\Psi_1^V(0) = 0; \quad (28)$$

$$\Psi_1^{VI}(0) = -m^3 a_2/a_1; \quad (29)$$

$$\Psi_1^{VII}(0) = 0; \quad (30)$$

$$\Psi_1^{VIII}(0) = m^4 a_2/a_1; \quad (31)$$

$$\Psi_1^{IX}(0) = 0; \quad (32)$$

$$\Psi_1^X(0) = -m^5 a_2/a_1 \text{ и т.д.} \quad (33)$$

Для получения дополнительного граничного условия в точке $x=1$ продифференцируем уравнение (12) по Fo :

$$\frac{\partial^2 \Theta_2(1, Fo)}{\partial x \partial Fo} + Bi \frac{\partial \Theta_2(1, Fo)}{\partial Fo} = 0. \quad (34)$$

Продифференцируем уравнение (7) по x и запишем полученное соотношение для точки $x=1$:

$$\frac{\partial^2 \Theta_2(1, Fo)}{\partial x \partial Fo} = \frac{a_i}{a} \frac{\partial^3 \Theta_2(1, Fo)}{\partial x^3}. \quad (35)$$

Соотношение (34) перепишем с учетом уравнения (7):

$$\frac{\partial^2 \Theta_2(1, Fo)}{\partial x \partial Fo} = -Bi \frac{a_i}{a} \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial x^2}. \quad (36)$$

Сравнивая (35), (36), получим

$$\frac{\partial^3 \Theta_2(1, Fo)}{\partial x^3} + Bi \frac{\partial^2 \Theta_2(1, Fo)}{\partial x^2} = 0. \quad (37)$$

Из (37) имеем следующее дополнительное граничное условие:

$$\Psi_2^{III}(1) + Bi\Psi_2^{II}(1) = 0. \quad (38)$$

Для нахождения коэффициентов C_{ki} подставим (21) в (17) – (20), (24) – (27), (38). При этом в соотношении (21) для первого слоя ограничимся пятью членами ряда, а для второго слоя – четырьмя. В итоге будем иметь 9 алгебраических линейных уравнений (по числу основных и дополнительных граничных условий) с 9 – ю неизвестными C_{k1} ($k = \overline{0,4}$) и C_{k2} ($k = \overline{0,3}$).

Анализ этой системы уравнений позволяет заключить, что в 5 уравнений, содержащих неизвестные C_{k1} , входят лишь по одному неизвестному (уравнения разделяются), которые легко могут быть определены. Этими неизвестными будут

$$C_{01} = 1; \quad C_{11} = 0; \quad C_{21} = -\frac{1}{2}m\frac{a_2}{a_1}; \quad C_{31} = 0; \quad C_{41} = \frac{1}{24}m^2\frac{a_2}{a_1}.$$

Для определения коэффициентов C_{k2} ($k = \overline{0,3}$) необходимо решать четыре алгебраических линейных уравнения, составленные из граничных условий (18) – (20), (38).

Найдем решение задачи (7) – (12) при следующих исходных данных [7]: $h_1 = 0,002m$; $h_2 = 0,006m$; $a_1 = 12,5 \cdot 10^{-6} m^2/c$; $a_2 = 6 \cdot 10^{-6} m^2/c$; $I_1 = 45,24 Bm/(m \cdot K)$; $I_2 = 16,24 Bm/(m \cdot K)$; $Bi = 2$; $a = a_2 = 6 \cdot 10^{-6} m^2/c$.

После определения коэффициентов C_{ki} составляется интеграл взвешенной невязки уравнения (15):

$$\int_0^{x_1} \left(\frac{a_1}{a} \sum_{k=0}^4 C_{k1} \frac{\partial^2 N_{k1}}{\partial x^2} + m \sum_{k=0}^4 C_{k1} N_{k1} \right) dx + \int_{x_1}^1 \left(\frac{a_2}{a} \sum_{k=0}^3 C_{k2} \frac{\partial^2 N_{k2}}{\partial x^2} + m \sum_{k=0}^3 C_{k2} N_{k2} \right) dx = 0. \quad (39)$$

Вычисляя интеграл в соотношении (39), относительно параметра m получим алгебраический полином вида

$$-8,02234 \cdot 10^{-2} \cdot m^2 + 1,19421 \cdot 10^{-3} \cdot m^3 - 1,21949 + 1,25019 \cdot m = 0. \quad (40)$$

Его корни

$$m_1 = 1,044343; \quad m_2 = 22,316056; \quad m_3 = 43,816549. \quad (41)$$

Собственные функции, соответствующие каждому собственному числу, находятся из (21).

Соотношение (13) с учетом (16), (21) для каждого собственного числа принимает вид

$$\Theta_{ki}(x, Fo) = A_k \Psi_{ki}(x, m_k) \exp(-m_k Fo). \quad (42)$$

Каждое частное решение вида (42) точно удовлетворяет граничным условиям (9), (12) и условиям сопряжения (10), (11) и приближенно (в зависимости от числа приближений – количества найденных из полинома (40) собственных чисел) удовлетворяет уравнению (7). Но ни одно из этих частных решений, в том числе и их сумма

$$\Theta_{ki}(x, Fo) = \sum_{k=1}^m A_k \Psi_{ki}(x, m_k) \exp(-m_k Fo) \quad (k = \overline{1,3}; i = 1,2), \quad (43)$$

не удовлетворяют начальному условию (8). Для того чтобы соотношение (43) удовлетворяло начальному условию, составим его невязку и потребуем ортогональность невязки к каждой собственной функции $\Psi_{ni}(x, m)$, т.е.

$$\int_0^{x_1} \left[\sum_{k=1}^m A_k \Psi_{k1}(x, m_k) - 1 \right] \Psi_{j1}(x, m_j) dx + \int_{x_1}^1 \left[\sum_{k=1}^m A_k \Psi_{k2}(x, m_k) - 1 \right] \Psi_{j2}(x, m_j) dx = 0. \quad (44)$$

Определяя интегралы в (44), относительно неизвестных коэффициентов A_k ($k = \overline{1,m}$), получим систему алгебраических линейных уравнений. Например, для трех приближений ($m = 3$) коэффициенты A_k имеют значения

$$A_1 = 1,119281; \quad A_2 = -0,500714; \quad A_3 = 0,404640.$$

После определения A_k решение задачи (7) – (12) в замкнутом виде находится из (43).

Результаты расчетов по формуле (43) в сравнении с данными [7] и с расчетом по методу конечных разностей (метод прогонки) представлены на рисунке.

Графики распределения температуры в двухслойной пластине:
 — метод прогонки; о – по данным [7]; х – по формуле (43) (третье приближение);
 Δ - по формуле (5.58) [8] (шестое приближение с координатными функциями (5.20), (5.21) [8])

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Габдушев Р.Ж. Об одном методе определения собственных значений краевой задачи Штурма – Лиувилля // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2001. Вып. 12. С. 17-23.
2. Кудинов В.А., Дикоп В.В., Габдушев Р.Ж., Стефанюк С.А. Об одном методе определения собственных чисел в нестационарных задачах теплопроводности // Изв. РАН. Энергетика. 2002. №4. С. 112 – 117.
3. Кудинов В.А., Дикоп В.В., Габдушев Р.Ж., Назаренко С.А. Определение собственных чисел в задачах теплопроводности для бесконечного цилиндра // Тр. 3-й Российской нац. конф. по теплообмену. Т. 7. Теплопроводов В.А., Дикоп В.В., Габдушев Р.Ж., Назаренко С.А. Об одном методе определения собственных чисел в краевых задачах нестационарной теплопроводности // Дифференциальные уравнения и их приложения: Межвуз. сб. науч. тр. Самара: СамГТУ, 2002. Вып. 1. С. 118 – 122.
4. Кудинов В.А., Дикоп В.В., Габдушев Р.Ж., Назаренко С.А. Определение собственных чисел краевой задачи Штурма – Лиувилля // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2002. Вып. 16. С. 46 – 48.
5. Кудинов В.А., Дикоп В.В., Габдушев Р.Ж., Назаренко С.А. Определение собственных чисел в задачах теплопроводности для бесконечного цилиндра // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2002. Вып. 16. С. 49 – 52.
6. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высш. шк., 1978. 328 с.
7. Кудинов В.А., Карташов Э.М. и др. Тепломассоперенос и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Энергоатомиздат, 1997. 426 с.

Поступила 21.02.2003 г.