Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Ю. Цвелодуб, Обратная задача теории ползучести для неупрочняющегося тела, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014, выпуск 2(), 115–124

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1320>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 06:25:33

УДК 539.376

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ НЕУПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090, Россия, Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 15.

Формулируется и решается задача о формировании тела постоянными внешними силами в условиях установившейся ползучести в течение заданного времени t_* таким образом, чтобы после снятия нагрузок перемещения точек поверхности принимали заданные значения. Рассматривается случай малых деформаций. При определённых предположениях и ограничениях доказывается теорема единственности для решения данной задачи. Анализируются прикладные вопросы задачи нахождения внешних воздействий, которые необходимы для получения требуемой формы тела за заданное время в условиях реологического деформирования после снятия внешних сил (с учётом упругой разгрузки). Детально выполнен анализ тонкостенной изотропной пластины для случая плоского напряжённого состояния. Решение для перемещений ищется в виде ряда по малому параметру. Приводится модельное решение для круглой пластинки единичного радиуса под действием постоянных внешних нагрузок, которая после ползучести и упругой разгрузки должна иметь заданное поле перемещений.

Ключевые слова: установившаяся ползучесть, обратная краевая задача, формообразование, постоянные нагрузки, малые деформации, постулат Друккера для вязких деформаций, круглая тонкая пластина.

1. Рассмотрим односвязное тело объема V с поверхностью S , определяющие уравнения деформирования которого имеют вид [1]

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn}\sigma_{mn} + \varepsilon_{kl}^c, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где ε_{kl} , $\varepsilon_{kl}^c\sigma_{kl}$, $a_{klmn} = a_{mnlk}$ — компоненты тензоров полных деформаций, деформаций ползучести, напряжений и упругих податливостей соответственно; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3. Компоненты ε_{kl} предполагаются малыми и выражающимися через компоненты перемещений u_{kl} известными соотношениями Коши.

Компоненты скоростей деформаций ползучести $\dot{\varepsilon}_{kl}^c = \eta_{kl}$ (точка обозначает дифференцирование по времени t) являются функциями напряжений

$$\eta_{kl} = \eta_{kl}(\sigma_{mn}), \quad k, l, m, n = 1, 2, 3, \quad (2)$$

причем для произвольных бесконечно малых приращений $\delta\sigma_{kl}$ и соответству-

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1320>

© 2014 Самарский государственный технический университет.

Образец цитирования: И. Ю. Цвелодуб, “Обратная задача теории ползучести для неупрочняющегося тела” // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2014. № 2 (35). С. 115–124. doi: [10.14498/vsgtu1320](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1320).

Сведения об авторе: Игорь Юрьевич Цвелодуб (д.ф.-м.н.), заведующий лабораторией, лаборатория статической прочности, отдел механики деформируемого твёрдого тела.

E-mail address: itsvel@hydro.nsc.ru

ющих им приращений $\delta\eta_{kl}$ имеет место неравенство

$$\delta\sigma_{kl}\delta\eta_{kl} \geq 0. \quad (3)$$

Соотношения (2) описывают процесс ползучести неупрочняющегося тела. Неравенство (3) выражает известный постулат Друккера для вязких деформаций. Вопросы, связанные с выяснением ограничений, накладываемых условием (3) на функции (2), достаточно подробно изложены в [2, 3]. Общие теоремы для рассматриваемых сред приведены в [1].

Сформулируем обратную задачу теории ползучести: какие внешние нагрузки $p_k = p_k(t)$, $0 \leq t < t_*$, (считаем, что массовые силы отсутствуют) нужно приложить к поверхности тела, находящегося при $t < 0$ в естественном недеформированном состоянии, чтобы в момент времени $t = t_*$ после снятия этих нагрузок тело приняло заданную форму, т.е. при $t = t_*$ перемещения $u_k = u_k^r$ на S , где u_k^r — заданные функции точек поверхности ($k = 1, 2, 3$).

Решение этой задачи может быть неединственным, т.е. может существовать множество путей нагружения $p_k = p_k(t)$, при которых тело деформируется из исходного состояния в заданное. В данной работе рассмотрим только один частный случай: $p_k = \text{const}$ при $0 \leq t < t_*$ ($k = 1, 2, 3$).

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Если существует решение рассматриваемой задачи для указанного случая ($p_k = \text{const}$ при $0 \leq t < t_*$, $k = 1, 2, 3$), то при некоторых условиях, указанных ниже, оно будет единственным.*

Доказательство. Рассмотрим процесс деформирования тела при заданных условиях: $0 \leq t < t_*$, $p_k = \text{const}$ на S , $k = 1, 2, 3$. Пусть существуют два решения этой задачи, разности соответствующих величин будем обозначать с помощью символа Δ . Так как $\Delta\dot{p}_k = 0$ на S , на основании уравнения виртуальных работ [4] получим

$$\int_V \Delta\dot{\sigma}_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}dV = 0. \quad (4)$$

Поле напряжений, возникающих в теле, в любой момент времени можно представлять в виде $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^e + \rho_{kl}$, где σ_{kl}^e соответствует решению чисто упругой задачи с теми же внешними нагрузками на S ; ρ_{kl} — компоненты остаточных напряжений, т.е. тех напряжений, которые возникли бы в теле после снятия внешних нагрузок в текущий момент времени [4]. Последние, как и их производные по t , являются самоуравновешенными при любом t , им соответствуют нулевые нагрузки на S . Кроме того, $\sigma_{kl}^e = \text{const}$, т.е. $\dot{\sigma}_{kl}^e = 0$, поскольку $p_k = \text{const}$ на S .

Интегрируя равенство (4) по t от 0 до t_* , с учётом (1), (2) и сделанных замечаний получим¹

¹При выводе (5) использовалась процедура интегрирования по частям, а также равенства $\dot{\sigma}_{kl}^e = 0$ и

$$\int_V a_{klmn}\Delta\sigma_{mn}^e\Delta\rho_{kl}dV = \int_V a_{klmn}\Delta\rho_{mn}\Delta\sigma_{kl}^e dV = \int_V a_{klmn}\Delta\dot{\rho}_{mn}\Delta\sigma_{kl}^e dV = 0,$$

так как поле $\Delta\varepsilon_{kl}^e = a_{klmn}\Delta\sigma_{mn}^e$ является совместным (соответствует решению упругой задачи), а поля $\Delta\rho_{kl}$, $\Delta\dot{\rho}_{kl}$ — самоуравновешенными [4].

$$\int_V [a_{klmn}(\Delta\sigma_{kl}^e\Delta\sigma_{mn}^e + \Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn}) + \Delta\sigma_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}^c] dV \Big|_0^{t_*} - \frac{1}{2} \int_V a_{klmn}\Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn} dV \Big|_0^{t_*} - \int_0^{t_*} \int_V \Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl} dV dt = 0. \quad (5)$$

Ввиду того, что $\Delta\sigma_{kl}^e(0) = \Delta\sigma_{kl}^e t_*$ и $\Delta\rho_{kl}(0) = \Delta\varepsilon_{kl}^c(0) = 0$, равенство (5) примет вид

$$I_1 - I_2 = 0, \quad I_1 = \int_V [a_{klmn}\Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn} + \Delta\sigma_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}] dV \Big|_{t=t_*},$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_V a_{klmn}\Delta\rho_{kl}\Delta\rho_{mn} dV \Big|_{t=t_*} + \int_0^{t_*} \int_V \Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl} dV dt.$$

Величину I_1 можно представить в форме

$$I_1 = \int_V \Delta\varepsilon_{kl}^r \Delta\sigma_{kl} dV \Big|_{t=t_*},$$

где $\varepsilon_{kl}^r = a_{klmn}\rho_{mn} + \varepsilon_{kl}$ — поле остаточных деформаций, возникающих в теле при $t = t_*$ после снятия внешних нагрузок. В силу уравнения виртуальных работ

$$I_1 = \int_S \Delta\varepsilon_{kl}^r \Delta\sigma_{kl} dV.$$

Следовательно, и $I_2 = 0$, что возможно только в том случае, если во всем объёме тела $\Delta\rho_{kl}(t_*) = 0$ и $\Delta\sigma_{kl}\Delta\eta_{kl} = 0$ в любой момент времени t ($0 \leq t < t_*$), поскольку из (3) следует аналогичное неравенство для конечных разностей [3]. Последнее равенство для сжимаемого при ползучести тела возможно только при $\Delta\sigma_{kl} = 0$, а для несжимаемого — при $\Delta\sigma_{kl} = \Delta p \delta_{kl}$, где δ_{kl} — компоненты единичного тензора [3]. Из уравнений равновесия и в силу того, что $p_k = \text{const}$ на S , следует, что $\Delta p = \text{const}$.

Таким образом, для несжимаемой при ползучести среды два решения рассматриваемой задачи могут отличаться только на величину произвольного постоянного гидростатического давления. Это очевидно, поскольку последнее в этом случае не влияет на процесс ползучести [3], а упругие деформации, соответствующие этой величине, вычтутся из решения при разгрузке в момент $t = t_*$. Если на части поверхности тела известны внешние нагрузки или одна из диагональных компонент тензора напряжений (как, например, в случае плоского напряженного состояния), то $\Delta p = 0$. Утверждение доказано. $\square$

2. Рассмотрим случай плоского напряженного состояния, когда тело представляет собой изотропную тонкую пластинку и решение обратной задачи о её деформировании в заданное состояние при постоянных внешних нагрузках единственно. Считаем, что осреднённая плоскость пластинки занимает односвязную область, ограниченную замкнутым гладким контуром L . Соотношения (2) возьмём в виде общепринятых однородных функций степени n [5]. Тогда для скоростей полных деформаций в системе координат Oxy , выбранной в срединной плоскости пластинки, будем иметь

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_x - \nu \dot{\sigma}_y) + B\sigma_i^{n-1} \frac{2\sigma_x - \sigma_y}{2},$$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_y &= \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_y - \nu \dot{\sigma}_x) + B\sigma_i^{n-1} \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{2}, \\ \dot{\varepsilon}_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{xy} + B\sigma_i^{n-1} \frac{3}{2} \sigma_{xy},\end{aligned}\quad (6)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона; B , n — константы ползучести; $\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\sigma_{xy}^2}$ — интенсивность напряжений. Предполагаем, что $n > 1$, тем самым обеспечивается выполнимость (3) [2, 3].

Пусть после деформирования пластинки в течение времени t_* под действием постоянных внешних нагрузок и их последующего снятия при $t = t_*$ требуется получить перемещения точек границы L вида

$$\begin{aligned}u_x &= c[x + \delta u_{x1}(x, y) + \delta^2 u_{x2}(x, y) + \dots], \\ u_y &= c[y + \delta u_{y1}(x, y) + \delta^2 u_{y2}(x, y) + \dots],\end{aligned}\quad (7)$$

где c , δ — константы, $0 < \delta < 1$, т.е. u_x , u_y могут быть представлены в виде рядов по степеням малого параметра δ . Для определённости примем, что $c > 0$.

Для решения данной задачи применим метод возмущений [6]. При $\delta = 0$ условия (7) соответствуют однородному деформированному состоянию, вызванному равномерным растяжением по осям x и y . Для нахождения нулевого приближения положим $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0 = \text{const}$; $\sigma_0 > 0$ при $0 \leq t < t_*$. Из (6) получим, что после разгрузки при $t = t_*$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{2} B \sigma_i^n t_*.$$

Легко видеть, что в силу (7) должно быть $\varepsilon_x = \varepsilon_y = c$, следовательно,

$$\sigma_0 = \left(\frac{2c}{Bt_*} \right)^{1/n}.$$

Для нахождения последующих приближений все напряжения, перемещения и деформации при $0 \leq t < t_*$ представим в виде рядов по степеням δ . С использованием методики [6] из (6) для скоростей полных деформаций k -того приближения нетрудно получить

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{xk} &= \frac{\partial \dot{u}_{xk}}{\partial x} = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_{xk} - \nu \dot{\sigma}_{yk}) + \frac{f_0}{E} (\sigma_{xk} - \nu_1 \sigma_{yk}) + \eta_{x0k}, \\ \dot{\varepsilon}_{yk} &= \frac{\partial \dot{u}_{yk}}{\partial y} = \frac{1}{E} (\dot{\sigma}_{yk} - \nu \dot{\sigma}_{xk}) + \frac{f_0}{E} (\sigma_{yk} - \nu_1 \sigma_{xk}) + \eta_{y0k}, \\ \dot{\varepsilon}_{xyk} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_{xk}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_{yk}}{\partial x} \right) = \frac{1}{E} (1 + \nu) \sigma_{xyk} + \frac{f_0}{E} (1 + \nu_1) \sigma_{xyk} + \eta_{xy0k},\end{aligned}\quad (8)$$

где $\nu_1 = (3 - n)/(3 + n)$, $-1 < \nu_1 < 1/2$; $f_0 = BE\sigma_0^{n-1}(n + 3)/4$; η_{x0k} , η_{y0k} , η_{xy0k} — функции координат и времени, зависящие от компонент напряжений не выше $(k - 1)$ приближения. Например, для первого приближения $\eta_{x01} = \eta_{y01} = \eta_{xy01} = 0$, для второго

$$\eta_{x02} = \frac{B\sigma_0^{n-2}}{16} (n - 1) [(n + 9)\sigma_{x1}^2 + (n - 3)\sigma_{y1}(\sigma_{y1} + 2\sigma_{x1}) + 12\sigma_{xy1}^2],$$

$$\eta_{y02} = \frac{B\sigma_0^{n-2}}{16}(n-1)[(n+9)\sigma_{y1}^2 + (n-3)\sigma_{x1}(\sigma_{x1} + 2\sigma_{y1}) + 12\sigma_{xy1}^2],$$

$$\eta_{xy02} = \frac{3B\sigma_0^{n-2}}{4}(n-1)\sigma_{xy1}(\sigma_{x1} + \sigma_{y1}).$$

Всюду в дальнейшем индексы k , входящие в (8), будем опускать, считая функции η_{x0} , η_{y0} , η_{xy0} известными для рассматриваемого приближения.

Для каждого приближения введём функцию напряжений $\Phi = \Phi(x, y, t)$, при этом [7]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (9)$$

Подставляя (8), (9) в известное уравнение совместности скоростей деформаций, получим

$$\Delta^2 \dot{\Phi} + f_0 \Delta^2 \Phi = \dot{F}_0(x, y, t), \quad (10)$$

где Δ^2 — бигармонический оператор,

$$\dot{F}_0 = E \left(\frac{\partial^2 \eta_{xy0}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \eta_{y0}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta_{x0}}{\partial y^2} \right).$$

Интегрируя (10) как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\Delta^2 \Phi$ и учитывая, что $\Delta^2 \Phi = 0$ при $t = 0$ (что соответствует упругому распределению напряжений), найдём

$$\Delta^2 \Phi = e^{-f_0 t} \int_0^t \dot{F}_0 e^{f_0 t} dt. \quad (11)$$

Предположим, что функции η_{x0} , η_{y0} , η_{xy0} при любом $0 \leq t < t_*$ являются аналитическими в занятой пластиной области. Тогда возможен переход к комплексным переменным $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, при этом функции переменных x и y аналитически продолжаются в область комплексных значений при подстановке $x = (z + \bar{z})/2$, $y = (z - \bar{z})/2i$, а z и $\bar{z}$ считаются независимыми комплексными переменными [8]. При указанной замене (11) примет вид

$$16 \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = -E e^{-f_0 t} \int_0^t e^{f_0 t} \left(\frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \dot{\varepsilon}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \dot{I}}{\partial z \partial \bar{z}} \right) dt, \quad (12)$$

$$U(z, \bar{z}, t) = \Phi \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}, t \right), \quad \varepsilon = \int_0^t (\eta_{y0} - \eta_{x0} + 2i\eta_{xy0}) dt,$$

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t (\eta_{y0} - \eta_{x0} - 2i\eta_{xy0}) dt, \quad I = \int_0^t (\eta_{x0} + \eta_{y0}) dt.$$

Общее решение (12) представим в форме

$$U = U_0(z, \bar{z}, t) + U_1(z, \bar{z}, t) + U_2(z, \bar{z}), \quad (13)$$

где

$$U_0 = -\frac{E}{16} e^{-f_0 t} \int_0^t (\dot{F} + \dot{\bar{F}} + 2\dot{Q}) e^{f_0 t} dt, \quad F = \int_{z_0}^z \int_{z_0}^z \varepsilon dz dz,$$

$$\bar{F} = \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \varepsilon d\bar{z} d\bar{z}, \quad Q = \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \int_{z_0}^z I dz d\bar{z},$$

U_1, U_2 — бигармоничны, т.е. $U_i = (\bar{z}\varphi_i + z\bar{\varphi}_i + \chi_i + \bar{\chi}_i)/2$ ($i = 1, 2$) [7], причём последние выбираются таким образом, что сумма $U_0 + U_1$ соответствует решению, дающему нулевые нагрузки на L в любой момент t ($0 \leq t < t_*$), а U_2 — решению задачи теории упругости с искомыми граничными условиями. Отметим, что функции φ_2 и χ_2 не зависят от t , поскольку внешние нагрузки на L постоянны.

Компоненты напряжений определяются из соотношений (9), которые можно представить в виде

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (14)$$

Найдём общие напряжения для перемещений и их скоростей при $0 \leq t < t_*$. Для этого из первого уравнения (8) вычтем второе и прибавим третье, умноженное на $2i$. Это после введения комплексного перемещения $W = u_x + iu_y$ с учётом (14) даёт

$$2 \frac{\partial \dot{W}}{\partial \bar{z}} = -\frac{4(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial \bar{z}^2} - \frac{4(1+\nu_1)}{E} f_0 \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial \bar{z}^2} - \dot{\varepsilon},$$

отсюда

$$\dot{W} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial \dot{U}}{\partial \bar{z}} - \frac{2(1+\nu_1)}{E} f_0 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} \dot{\varepsilon} d\bar{z} + f_1(z, t). \quad (15)$$

Входящую в (15) функцию $f_1 = f_1(z, t)$ определим из условия удовлетворения сумме двух уравнений (8), которое можно записать так:

$$\frac{\partial \dot{w}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial \bar{z}} = \frac{4(1-\nu)}{E} \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{4(1-\nu_1)}{E} f_0 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + \dot{I}.$$

Подставляя в это соотношение выражение для $\dot{w}$ из (15), аналогичное представление для $\dot{w}$ и учитывая (13), получим

$$f_1' - \frac{4}{E}(\dot{\varphi}' + f_0 \varphi') = -\left[\bar{f}_1' - \frac{4}{E}(\dot{\bar{\varphi}}' + f_0 \bar{\varphi}')\right],$$

где $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, штрих обозначает дифференцирование по z . Последнее равенство возможно только при

$$f_1' - \frac{4}{E}(\dot{\varphi}' + f_0 \varphi') = ic_1(t),$$

где $c_1(t)$ — действительная функция. Отсюда

$$f_1(z, t) = \frac{4}{E}(\dot{\varphi} + f_0 \varphi) + ic_1(t)z + c_2(t),$$

где $c_2(t)$ — комплекснозначная функция. Отбрасывая в выражении для f_1 последние два слагаемых, дающие только жёсткое смещение, с учётом (13), (15) после некоторых упрощений найдём

$$\dot{w} = \frac{2(\nu - \nu_1)}{E} f_0 \frac{\partial U_0}{\partial \bar{z}} + \frac{1 + \nu}{8} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\dot{F} - \kappa \dot{\bar{F}} + 2\dot{Q}) + \frac{1 + \nu}{E} (\kappa \dot{\varphi} - z \dot{\varphi}' - \dot{\bar{\psi}}) + \frac{1 + \nu_1}{E} f_0 (\kappa_1 \varphi - z \bar{\varphi}' - \bar{\psi}), \quad (16)$$

где

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \quad \psi_i = \kappa'_i, \quad i = 1, 2; \\ \kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \quad \kappa_1 = \frac{3 - \nu_1}{1 + \nu_1}.$$

Интегрируя (16) по времени от 0 до t и учитывая, что при $t = 0$ выполняется $F = \bar{F} = Q = 0$, после несложных выкладок получим

$$w = \frac{\nu_1 - \nu}{8} f_0 e^{-f_0 t} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int_0^t (F + \bar{F} + 2Q) e^{f_0 t} dt + \frac{1 + \nu}{8} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (F - \kappa \bar{F} + 2Q) + \frac{1 + \nu}{E} (\kappa \varphi - z \bar{\varphi}' - \bar{\psi}) + \frac{1 + \nu_1}{E} f_0 \int_0^t (\kappa_1 \varphi - z \bar{\varphi}' - \bar{\psi}) dt. \quad (17)$$

После снятия внешних нагрузок при $t = t_*$ произойдёт упругая разгрузка, поэтому выражения для остаточных напряжений и перемещений получают-ся из (13), (14) (17) путём вычитания членов, соответствующих функциям $\varphi = \varphi(z)$ и $\psi_2 = \psi_2(z)$. Так, для остаточных перемещений найдём

$$w^r = g(z, \bar{z}) + \frac{1 + \nu_1}{E} f_0 t_* (\kappa_1 \varphi - z \bar{\varphi}'_2 - \bar{\psi}_2), \quad (18)$$

где

$$g = \frac{\nu_1 - \nu}{8} f_0 e^{-f_0 t_*} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \int_0^{t_*} (F - \kappa \bar{F} + 2Q) e^{f_0 t} dt + \frac{1 + \nu}{8} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (F - \kappa \bar{F} + 2Q)|_{t=t_*} + \frac{1 + \nu}{E} (\kappa \varphi_1 - z \bar{\varphi}'_1 - \bar{\varphi}_1)|_{t=t_*} + \frac{1 + \nu_1}{E} f_0 \int_0^{t_*} (\kappa_1 \varphi_1 - z \bar{\varphi}'_1 - \bar{\varphi}_1) dt.$$

Полученные выше общие соотношения для напряжений и перемещений определяют очевидную последовательность решения задачи о деформировании пластинки в заданное состояние. Она заключается в следующем. По известным величинам $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\bar{\varepsilon}}$, $\dot{I}$, которые являются функциями z , $\bar{z}$ и t , находят-ся $\dot{F}$, $\dot{\bar{F}}$, Q , F , $\bar{F}$, Q , а следовательно, из (13) и $U_0 = U_0(z, \bar{z}, t)$. Затем на L вычисляется значение

$$f = \frac{\partial U_0}{\partial x} + i \frac{\partial U_0}{\partial y} = 2 \frac{\partial U_0}{\partial \bar{z}},$$

которое компенсируется выбором функций $\varphi_1 = \varphi_1(z, t)$ и $\psi_1 = \psi_1(z, t)$ так, что суммарное решение, соответствующее $U_0 + U_1$, даёт ненулевые нагрузки на L при любом t ($0 \leq t < t_*$). Подобная задача нахождения φ_1 и ψ_1 рассмотрена в [7].

После того как найдены функции $\varphi_1 = \varphi_1(z, t)$ и $\psi_1 = \psi_1(z, t)$, для определения $\varphi_2 = \varphi_2(z)$ и $\psi_2 = \psi_2(z)$ из (18) получим

$$\frac{1 + \nu_1}{E} f_0 t_* \left(\kappa_1 \varphi_2 - z \bar{\varphi}_2' - \bar{\psi}_2 \right) = w^r - g$$

на L , где правая часть этого равенства неизвестна. Эта задача также рассмотрена в [7].

Легко видеть, что если область плоскости z , занятая пластиной, конформно отображается на круг единичного радиуса плоскости ζ при помощи функции $z = \omega(\zeta)$, являющейся полиномом, то решение для любого приближения может быть получено в замкнутом виде. Соответствующие формулы для нахождения φ_i и ψ_i ($i = 1, 2$) приведены в [7].

В качестве простейшего примера рассмотрим задачу о круглой пластинке единичного радиуса, которая деформируется под действием постоянных внешних нагрузок в течение времени t_* и которая при $t = t_*$ после снятия этих нагрузок должна иметь на границе радиальное и окружное остаточные перемещения вида

$$u_r = c + \delta \alpha \cos 3\theta, \quad u_\theta = \delta \beta \sin 3\theta,$$

где c, α, β — константы.

Используя изложенную выше методику и опуская достаточно громоздкие выкладки, для первого приближения получим

$$U_0 = \varphi_1 = \psi_1 = 0, \quad \varphi = \frac{a}{12B\sigma_0^{n-1}t_*} z^4, \quad \psi_2 = -\frac{b}{6B\sigma_0^{n-1}t_*} z^2,$$

где

$$\sigma_0 = \left(\frac{2c}{Bt_*} \right)^{1/n}, \quad a = \frac{4(\alpha + \beta)}{\kappa_1}, \quad b = 2(a + \alpha - \beta);$$

для второго приближения —

$$\begin{aligned} U_0 = & -\frac{AG(t)}{36} a^2 \left(\frac{(2n+3)(z^7 \bar{z} + \bar{z}^7 z)}{14} + \frac{2n+51}{16} z^4 \bar{z}^4 \right) + \\ & + \frac{AG(t)}{36} ab \left(\frac{z^6 + \bar{z}^6}{10} + 3z^3 \bar{z}^3 \right) + \frac{3}{4} b^2 z^2 \bar{z}^2, \\ \varphi_1 = & \frac{AG(t)}{18} \left[\frac{2n+3}{14} a^2 z^7 + \left(\frac{2n+51}{8} a^2 - \frac{9}{2} ab + \frac{3}{4} b^2 \right) z \right], \\ \psi_1 = & -\frac{AG(t)}{30} ab z^5, \quad G(t) = 1 - e^{-f_0 t}, \quad A = \frac{n-1}{B^2 \sigma_0^{2n-1} t_*^2 (n+3)}, \\ \varphi_2 = & -\frac{A(n+3)}{36} \left[\frac{2}{7} a^2 z^7 + \left(\frac{2n+27}{2} a^2 - 12ab + 3b^2 \right) \frac{z}{2n} \right], \quad \psi_2 = \frac{A(n+3)}{45} ab z^5. \end{aligned}$$

Из вышеперечисленных формул вытекает, что для получения заданной формы пластинки к её границе следует приложить следующие постоянные усилия (с учётом двух приближений):

$$\sigma_r = \sigma_0 + \frac{2\delta}{3B\sigma_0^{n-1}t_*} \left(\alpha - \beta + \frac{2(\alpha + \beta)}{\varkappa_1} \right) \cos 3\theta -$$

$$- \frac{(n-1)\delta^2}{9B^2\sigma_0^{2n-1}t_*^2} \left[\frac{3}{n} \left(\frac{2(\alpha + \beta)^2}{\varkappa_1} + (\alpha - \beta)^2 \right) + \frac{8(\alpha^2 - \beta^2)}{\varkappa_1} \cos 6\theta \right],$$

$$\sigma_{r\theta} = \left(\frac{2(\alpha + \beta)}{\varkappa_1} - \alpha + \beta \right) \left(\frac{2\delta}{3B\sigma_0^{n-1}t_*} \sin 3\theta - \frac{8(n-1)(\alpha + \beta)\delta^2}{9B^2\sigma_0^{2n-1}t_*^2\varkappa_1} \sin 6\theta \right),$$

а при $t = t_*$ эти нагрузки снять.

В заключение отметим, что в случае линейной вязкоупругой среды Максвелла, т.е. при $n = 1$, задачи, аналогичные рассмотренным выше, могут быть решены без использования метода малого параметра, поскольку общие соотношения (6) между скоростями деформаций и напряжениями и линеаризованные (8) при $n = 1$, совпадают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ/ REFERENCES

1. И. Ю. Цвелодуб, “К теории нелинейной вязкоупругости” // *Изв. АН. СССР. Мех. тверд. тела*, 1982. №2. С. 70–75; I. Yu. Tselodub, “On the theory of nonlinear viscoelasticity”, *Mechanics of solids*, 1982, vol. 17, no. 2, pp. 59–63.
2. И. Ю. Цвелодуб, “Устойчивость в малом и её приложения к исследованию определяющих уравнений ползучести” // *Изв. АН. СССР. Мех. тверд. тела*, 1978. №2. С. 125–128. [I. Yu. Tselodub, “Stability in the small and its application to the study of determining creep equations”, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1978, no. 2, pp. 125–128 (In Russian)].
3. И. Ю. Цвелодуб, “О построении определяющих уравнений установившейся ползучести” // *Изв. АН. СССР. Мех. тверд. тела*, 1979. №3. С. 104–110. [I. Yu. Tselodub, “On the construction of the governing equations of steady creep”, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1979, no. 3, pp. 104–110 (In Russian)].
4. W. T. Koiter, “General theorems for elastic-plastic solids”, *Progress in Solid Mechanics*. V. 6, eds. I. N. Sneddon, R. Hill, Amsterdam, North-Holland, 1960, pp. 165–221; В. Т. Койтер, *Общие теоремы теории упруго-пластических сред*. М.: Иностран. лит., 1961. 79 с.
5. Ю. Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с. [Yu. N. Rabotnov, *Polzuchest' elementov konstruksiy* [Creep of Structure Elements], Moscow, Nauka, 1966, 752 pp. (In Russian)].
6. Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов, *Метод возмущений в теории упругопластического тела*. М.: Наука, 1978. 208 с. [D. D. Ivlev, L. V. Ershov, *Metod vozmushcheniy v teorii uprugoplasticheskogo tela* [Perturbation Method in the Theory of an Elastic-Plastic Body], Moscow, Nauka, 1978, 208 pp. (In Russian)].
7. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. М.: Наука, 1966. 707 с.; N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Netherlands, Springer, 1977, xxxi+732 pp. doi: [10.1007/978-94-017-3034-1](https://doi.org/10.1007/978-94-017-3034-1).
8. И. Н. Векуа, *Новые методы решения эллиптических уравнений*. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 296 с.; I. N. Vekua, *New Methods for Solving Elliptic Equations*, Amsterdam, North-Holland, 1967, xii+358 pp.

Поступила в редакцию 25/IV/2014;
в окончательном варианте — 13/V/2014;
принята в печать — 16/V/2014.

MSC: 74G75; 74C10, 74K20

**CREEP THEORY INVERSE PROBLEM
FOR NON-WORK-HARDENING BODY***I. Yu. Tsvelodub**M. A. Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of RAS,
15, Lavrentyeva pr., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.*

The body formation by constant external forces in the conditions of the steady-state creep during set time problem is formulated and solved so that after removal of loadings the movements of points of a surface accepted preset values. The case of small deformations is considered. At certain assumptions and restrictions the uniqueness theorem for the solution of this task is proved. Applied questions of a problem of finding the external influences which are necessary for receiving a demanded shape of a body for set time in the conditions of rheological deformation after removal of external forces (taking into account elastic unloading) are analyzed. The analysis of a thin-walled isotropic plate for a case of a flat tension is made in details. The solution for movements is searched in the form of an expansion in small parameter. The model solution for a round plate of single radius under the influence of constant external loadings which should have the set field of movements after creep and elastic unloading is provided.

Keywords: *steady-state creep, inverse boundary problem, shaping, constant loadings, small deformations, Drukker's postulate for viscous deformations, round thin plate.*

Received 25/IV/2014;
received in revised form 13/V/2014;
accepted 16/V/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: <http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1320>
© 2014 Samara State Technical University.

Citation: I. Yu. Tsvelodub, "Creep theory inverse problem for non-work-hardening body", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 2 (35), pp. 115–124. doi: [10.14498/vsgtu1320](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1320). (In Russian)

Author Details: *Igor Yu. Tsvelodub* (Dr. Phys. & Math. Sci.), Head of Laboratory, Laboratory of Static Strength, Dept. of Structural Mechanics.

E-mail address: itsvel@hydro.nsc.ru