Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Сербина, Решение одной начально-краевой задачи теории фильтрации с нелокальными краевыми условиями, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 16–21

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 16:16:51

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Приведено решение начально – краевой задачи фильтрации неустановившегося одномерного движения грунтовых вод, описываемой уравнением Буссинеска. Исследованы различные частные случаи основного уравнения, в частности сводящиеся к уравнению Лаврентьева – Бицадзе с нелокальными краевыми условиями. Сформулирован ряд краевых задач и построены их решения.

Аппроксимация обобщенного нелинейного уравнения Буссинеска. В классической теории фильтрации неустановившееся одномерное движение грунтовых вод со слабоизменяющейся свободной поверхностью и с горизонтальным водоупором описывается обобщенным уравнением Буссинеска:

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left[h \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \frac{k_0}{M_0} (h - H_0) + w, \quad (1)$$

где постоянные S и k означают водоотдачу и коэффициент фильтрации; $h = h(x, t)$ – уровень грунтовой воды в точке $x \geq 0$ в момент времени t ; k_0 – коэффициент фильтрации слабопроницаемого водоупора мощности M_0 ; $w = w(x, t)$ – разность между инфильтрацией и испарением; H_0 – напор воды в нижележащем водоносном пласте. Любое регулярное решение уравнения (1) удовлетворяет уравнению

$$S \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[h \frac{\partial h}{\partial t} \right] - \frac{k_0}{M_0} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (2)$$

Предположим, что $h_t = \partial h / \partial t$ в среднем прямо пропорционально расходу грунтовой воды на прогнозируемом участке $0 < x < l$ с постоянным коэффициентом g :

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx gS \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l h(x, t) dx. \quad (3)$$

Гипотеза (3) позволяет за приближенное решение уравнения (2) принять точное решение следующего уравнения:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = kgd'(t) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{1}{S} \left(\frac{k_0}{M_0} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t} \right), \quad (4)$$

где $d(t) = \int_0^l h(x, t) dx$.

Для широкого класса мелиоративных задач прогнозирования динамики грунтовых вод можно положить, что

$$kgd'(t) \approx c |t_* - t|^m \operatorname{sign}(t_* - t), \quad (5)$$

где $m = \text{const} > 0$, $c = \text{const} > 0$, t_* – экстремальное время, когда расход грунтовой воды в слое $0 < x < l$ достигает максимального значения, а затем падает до значения, не нарушающего экологию зоны аэрации.

Из (4) в силу (5) получим уравнение

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c |t_* - t|^m \operatorname{sign}(t_* - t) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{k_0}{S M_0} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (6)$$

Уравнение (6) на евклидовой плоскости точек (x, t) является уравнением смешанного типа: оно эллиплично при $t > t_*$, гиперболично при $t < t_*$ и параболично на критической линии $t_* = 0$.

Заменой переменных

$$y = t - t_*, \quad x = x / \sqrt{c}, \quad u(x, y) = h(x\sqrt{c}, y + t_*) \quad (7)$$

уравнение (6) приведем к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{sign } y |y|^m \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (8)$$

где $b = \frac{k_0}{S \cdot M_0}$, $f(x, y) = \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial y} w(x\sqrt{c}, y + t_*)$.

Для уравнения (8) на основании (3) и (5) получим нелокальное условие

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^r u(x, y) dx = A |y|^m \text{sign } y. \quad (9)$$

Здесь использованы обозначения $r = l/\sqrt{c}$, $A = -\sqrt{c}/kg$.

Итак, уравнение (8) смешанного эллипτικο-гиперболического типа является линейной математической моделью динамики грунтовых вод, адекватно отражающей явление конечности скорости распространения любого возмущения в пористых средах.

Введение новой независимой переменной $u = u \cdot \exp(by/2)$ позволяет записать уравнение (8) и условие (9) в виде

$$\text{sign } y |y|^m u_{xx} + u_{yy} - (b^2/4)u = f(x, y) \exp(by/2); \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \exp(-\frac{by}{2}) \int_0^r u(x, y) dx = A |y|^m \text{sign } y. \quad (11)$$

В случае горизонтального непроницаемого водоупора ($k_0=0$) в (8)-(11) можно положить $b=0$. Тогда условие (11) совпадает с (9), а уравнение (10) примет вид

$$\text{sign } y |y|^m \cdot u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad 0 < x < r. \quad (12)$$

Нелокальная начально-краевая задача для уравнения Лаврентьева–Бицадзе.

Рассмотрим уравнение (12) в случае, когда $m=0$, $f(x, y)=0$ в прямоугольной области $\Omega_n = \{(x, y): 0 < x < a, -na < y < b\}$, где a и b – заданные положительные числа, $n = 1, 2, 3, \dots$

Уравнение Лаврентьева–Бицадзе

$$\text{sign } y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (13)$$

описывает динамику грунтовых вод, при отсутствии внешнего воздействия на поток.

Введем обозначения: $\Omega^+ = \{(x, y): 0 < x < a, 0 < y < b\}$ – эллиптическая, а $\Omega_n^- = \{(x, y): 0 < x < a, -na < y < 0\}$ – гиперболическая части области Ω_n ; Δ_1 – треугольная область, ограниченная отрезком $\overline{AB}: 0 \leq x \leq a$ прямой $y=0$, характеристиками $AC: x+y=0$ и $BC: x-y=a$ уравнения (13); $\Omega = \Omega^+ \cup \Delta_1 \cup \overline{AB}$; $\overline{\Omega}_n$ – замыкание области Ω_n .

В дальнейшем под решением $u(x, y)$ уравнения (13) в области Ω_n будем понимать такое решение, которое обладает следующими свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C^2(\Omega^+) \cap C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}_n)$;
- 2) $u(x, y)$ в замыкании $\overline{\Omega}_n$ представимо в виде $u(x, y) = f_1(x-y) + f_2(x+y)$, где f_1 и f_2 – непрерывные функции.

В работе исследуется следующая смешанная задача S.

З а д а ч а S. Найти решение $u(x, y)$ уравнения (13), удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^a u(x, y) dx = m(y), \quad 0 < y < b; \quad (14)$$

$$u(x, -na) = h_n(x), \quad u(x, b) = h(x), \quad 0 \leq x \leq a; \quad (15)$$

$$u(a, y) = \Phi_a(y), \quad -an \leq y \leq b; \quad (16)$$

$$u(0, y) = \Phi_0(y), \quad -an \leq y \leq 0, \quad (17)$$

где $m(y)$, $h_n(x)$, $h(x)$, $\Phi_0(y)$, $\Phi_a(y)$ - заданные функции, $m(y) \in C^1[0, b]$, $\Phi_a(y) \in C[-an, b]$, $\Phi_0(y) \in C[-an, 0]$, $h_n(x)$, $h(x) \in C[0, a]$.

Краевые условия (15)-(17) являются локальными, а условие (14) представляет собой нелокальное условие типа условия А.А. Самарского.

Л е м м а 1. Пусть существует решение $u(x, y)$ задачи S. Тогда для любой точки $x \in [0, a]$ справедливо

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^n \{a_k [\Phi_a(x - ka) + \Phi_0(-x - (k-1)a)] - a_{k+1} [\Phi_a(-x - (k-1)a) + \Phi_0(x - ka)]\} + H_n(x), \quad (18)$$

где
$$a_k = \begin{cases} 1, & k \equiv 1 \pmod{2}; \\ 0, & k \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases} \quad H_n = \begin{cases} -h_n(a-x), & n \equiv 1 \pmod{2}; \\ h_n(x), & n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Доказательство леммы 1 можно провести методом математической индукции, опираясь на теорему о среднем значении для одномерного волнового уравнения.

С помощью леммы 1 и равенства $\frac{\partial}{\partial x}(u_x^2 - u_y^2) + 2 \frac{\partial}{\partial y}(u_x u_y) = 0$, справедливого для любой

гармонической в области Ω^+ функции $u(x, y)$, можно доказать следующую теорему единственности решения задачи S.

Т е о р е м а 1. Пусть $u(x, y)$ - решение однородной задачи, соответствующей задачи S, которое непрерывно дифференцируемо всюду в $\bar{\Omega}^+$, за исключением угловых точек границы Ω^+ , и обладает тем свойством, что $u_x(0, y), u_x(a, y) \in L^2(0, b)$. Тогда $u(x, y) \equiv 0$.

Решение смешанной задачи S будем искать в классе функций, обладающих тем свойством, что $u_{xx}(x, y) \in L[0, a]$ для любого $y \in (0, b)$.

Пусть $u = u(x, y)$ - решение задачи S. Тогда для любого $y \in (0, b)$ в силу условия (14) имеем

$$\int_0^a u_{xx}(x, y) dx = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^a u(x, y) dx = -m'(y).$$

Отсюда следует, что искомое решение удовлетворяет краевому условию с локальным смещением [1]:

$$u_x(a, y) - u_x(0, y) = -m'(y), \quad 0 < y < b. \quad (19)$$

Через $t(x)$ обозначим правую часть равенства (18). Решение $u(x, y)$ задачи S, согласно (15), (16) и (19), должно быть решением в области Ω^+ следующей краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (20)$$

З а д а ч а S₁. Найти регулярное в области Ω^+ решение $u(x, y)$ уравнения (13) из класса $C(\bar{\Omega}^+)$, которое удовлетворяет условию гладкости $u_x(x, y) \in C(0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$ и краевым условиям: $u(x, 0) = t(x)$, $u(x, b) = h(x)$, $0 \leq x \leq a$; $u(a, y) = \Phi_a(y)$, $u_x(a, y) - u_x(0, y) = m_1(y)$, $0 < y < b$, где $m_1(y) = -m'(y)$.

При достаточно гладких входных данных $t(x)$, $h(x)$, $\Phi_a(y)$ и $m_1(y)$ существование решения задачи S₁ доказывается методом редукции к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, ядро которого однозначно определяется функцией Грина задачи Дирихле для уравнения (20) в области Ω^+ .

Решение задачи S в области $\bar{\Omega}_n^-$ строится как гладкое продолжение решения задачи S₁ из области Ω^+ в решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения.

Прикладные задачи, приводящие к задачам с нелокальным условием (14), требуют разработки приближенных методов решения этих задач. Поэтому мы остановимся на демонстрации

метода Фурье решения задачи S_1 , ограничиваясь случаем, когда $a = b = 1$, $h(x) = 0$, $\Phi_a(y) \equiv 0$, $m_1(y) \equiv 0$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Пусть требуется найти регулярное в области $\Omega^+ = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ решение $u(x, y)$ уравнения (20) из класса $C(\overline{\Omega}^+)$, такое, что $u_x \in C(0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1)$ и

$$u(x, 0) = t(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (21)$$

$$u(1, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (22)$$

$$u_x(0, y) - u_x(1, y) = 0, \quad 0 < y < 1; \quad (23)$$

$$u(x, 1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (24)$$

где $t(x) \in C[0, 1] \cap C^2]0, 1[$.

Найдем класс нетривиальных решений задачи (21)–(24) для уравнения (20), представимых в виде

$$u(x, y) = U(x)V(y). \quad (25)$$

Подставляя (25) в (20) и принимая во внимание (21)–(24), получим

$$U''(x) + I U(x) = 0, \quad 0 < x < 1; \quad (26)$$

$$U(1) = 0; \quad (27)$$

$$U'(0) = U'(1); \quad (28)$$

$$V''(y) - I V(y) = 0; \quad (29)$$

$$V(1) = 0. \quad (30)$$

В уравнении (26) введем новые независимые переменные:

$$X(t) = U(x), \quad x = 1 - t. \quad (31)$$

Тогда в силу (26)–(28) получаем

$$X''(t) + I X(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad (32)$$

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = X'(1). \quad (33)$$

Известно [2, 3], что числа $I_k = (2pk)^2$, $k = 0, 1, \dots$, и функции

$$X_0(t) = t, \quad X_{2k-1}(t) = t \cos(2pkt), \quad X_{2k}(t) = \sin(2pkt)$$

соответственно являются собственными значениями, собственными и присоединенными функциями задачи (32)–(33).

Следовательно, связь (31) позволяет утверждать, что система собственных и присоединенных функций задачи (26)–(28) задается следующим образом:

$$U_0(x) = 1 - x, \quad U_{2k-1}(x) = (1 - x) \cos(2pkx), \quad U_{2k}(x) = -\sin(2pkx). \quad (34)$$

Пусть $Y_0(t) = 2$, $Y_{2k-1}(t) = 4 \cos(2pkt)$, $Y_{2k}(t) = 4(1 - t) \sin(2pkt)$, $k = 1, 2, \dots$ - система собственных и присоединенных функций задачи

$$Y''(t) + I Y(t) = 0, \quad Y(0) = Y(1), \quad Y'(1) = 0.$$

Отсюда после замены $t = 1 - x$ получаем систему собственных и присоединенных функций: $u_0(x) = 2$, $u_{2k-1}(x) = 4 \cos(2pkx)$, $u_{2k}(x) = -4x \sin(2pkx)$, $k = 1, 2, \dots$ задачи, сопряженной задаче (26) – (28).

По условию $t(x) \in C[0, 1]$. Из базисной системы (34) следует, что функцию $t(x)$ можно разложить в биортогональный ряд [2, 3]

$$t(x) = t_0 U_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [t_{2k} U_{2k}(x) + t_{2k-1} U_{2k-1}(x)], \quad (35)$$

где $t_0 = (t, u_0)_0$; $t_{2k} = (t, u_{2k})_0$; $t_{2k-1} = (t, u_{2k-1})_0$. Здесь $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2[0, 1]$.

При $I > 0$ общее решение уравнения (29) имеет вид

$$V(y) = C_1 \operatorname{ch}(\sqrt{I} y) + C_2 \operatorname{sh}(\sqrt{I} y), \quad (36)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Удовлетворив (36) условию (30) и дополнительному условию $V(0) = 1$, получим

$$V(y) = \operatorname{sh}(\sqrt{I}y) - \operatorname{cth}(\sqrt{I}) \operatorname{ch}(\sqrt{I}y). \quad (37)$$

Из (37) при $I = I_k = (2pk)^2$, $k = 0, 1, \dots$ приходим к следующей системе функций, удовлетворяющих (29) и (30):

$$V_0(y) = 1 - y, \quad V_k(y) = \operatorname{sh}(2pky) - \operatorname{cth}(2pk) \operatorname{ch}(2pky), \quad k = 1, 2, \dots \quad (38)$$

Решение задачи (21) – (24) для уравнения (20) будем искать в виде ряда

$$u(x, y) = t_0 U_0(x) V_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} [t_{2k} U_{2k}(x) V_k(y) + t_{2k-1} v_k(x, y)], \quad (39)$$

где $v_k(x, y) = U_{2k-1}(x) V_k(y) - 2\sqrt{I_k} U_{2k}(x) z_k(y)$.

Непосредственным вычислением, как и в случае уравнения теплопроводности [2, 3], можно убедиться, что функция $u(x, y)$, задаваемая формулой (39), будет решением уравнения (20) и будет удовлетворять условиям (21), (22) тогда и только тогда, когда

$$z_k(0) = 0, \quad z_k(1) = 0, \quad z_k''(y) - I_k z_k(y) = -V_k(y). \quad (40)$$

Действительно, пусть $u_k(x, y) = t_{2k} U_{2k}(x) V_k(y) + t_{2k-1} v_k(x, y)$. Легко видеть, что

$$\Delta u_k = t_{2k} [U_{2k}''(x) V_k(y) + U_{2k}(x) V_k''(y)] + t_{2k-1} [U_{2k-1}''(x) V_k(y) - 2\sqrt{I_k} U_{2k}''(x) z_k(y) + U_{2k-1}(x) V_k''(y) - 2\sqrt{I_k} U_{2k}(x) z_k''(y)].$$

Отсюда в силу свойств систем функций (34) и (38) получаем

$$\Delta u_k(x, y) = t_{2k-1} [V_k(U_{2k-1}'' + I_k U_{2k-1}) - 2\sqrt{I_k} U_{2k}(z_k'' - I_k z_k)],$$

$$U_{2k-1}'' + I_k U_{2k-1} = -2\sqrt{I_k} U_{2k}. \quad (41)$$

Поэтому $\Delta u_k = -2t_{2k-1} \sqrt{I_k} U_{2k} [V_k + z_k'' + I_k z_k] = 0$. Из (41) следует (40).

Поскольку функция $t(x) \in C[0, 1] \cap C^2]0, 1[$ и представима в виде (35), то легко видеть, что (39) удовлетворяет условиям (21)-(24). Из (39) имеем

$$\lim_{y \rightarrow +0} u_y = v(x) = -t_0 U_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \{V_k'(0) [t_{2k} U_{2k}(x) + t_{2k-1} U_{2k-1}(x)] - 2\sqrt{I_k} t_{2k-1} U_{2k}(x) z_k'(0)\}.$$

После того как найдены $t(x)$, $v(x)$, решение $u(x, y)$ задачи S в области Ω_n^- определяется как решение смешанной задачи

$$u(x, 0) = t(x), \quad u_y(x, 0) = v(x), \quad 0 < x < 1; \quad (42)$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad -an \leq y \leq 0 \quad (43)$$

для одномерного волнового уравнения

$$u_{yy} = u_{xx}. \quad (44)$$

В случае, когда $n=1$, функция $t(x) = -h_1(1-x)$ и решение задачи S в области Δ_1 находится как решение задачи Коши (42) для уравнения (44). Оно имеет вид

$$u(x, y) = \frac{-h_1(1-x-y) - h_1(1-x+y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} v(t) dt. \quad (45)$$

Из (45) в силу (44), принимая во внимание, что $t(0) = -h_1(1) = 0$, $t(1) = -h_1(0) = 0$, легко видеть, что

$$u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = \Psi_0(x), \quad u\left(\frac{1+x}{2}, \frac{x-1}{2}\right) = \Psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (46)$$

где $2\Psi_0(x) = -h_1(1-x) - \int_0^x v(t) dt$, $2\Psi_1(x) = -h_1(1-x) + \int_1^x v(t) dt$.

Решение задачи S в любой точке $(x, y) \in \Omega_1^-$, лежащей вне области Δ_1 , определяется с помощью формулы (46) и теоремы о среднем значении для уравнения (44).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
2. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294-304.
3. *Ионкин Н.И., Моисеев Е.И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 7. С. 1284-1295.

Поступила 3.06.2003 г.