Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Огородников, Некоторые характеристические задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений и их связь с нелокальными краевыми задачами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 22–28

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:50:45

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СВЯЗЬ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ

В работе затронута проблема корректности задач с данными на параллельных характеристиках для нагруженных гиперболических дифференциальных уравнений и систем уравнений с кратными характеристиками на плоскости. Приведены примеры корректных постановок задач с данными на всей границе характеристического квадрата. Обоснована равносильность рассмотренных задач определенным нелокальным краевым задачам со смещением на параллельных характеристиках.

Введение. Хорошо известно, что для уравнений с частными производными гиперболического типа задача Дирихле и краевые задачи с данными на характеристиках из одного и того же семейства являются примерами некорректно поставленных задач [1].

В данной работе рассмотрена система нагруженных гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными:

$$\mathbf{u}_{xx} - \mathbf{u}_{yy} + A(x, y)\mathbf{u}_x + B(x, y)\mathbf{u}_y + C(x, y)\mathbf{u} = \sum_{k=1}^m F_k(x, y)\mathbf{u}[P_k(x, y)], \quad (1)$$

где A, B, C и F_k — действительные функциональные $[n \times n]$ -матрицы, $\mathbf{u}(x, y) = (u_1; u_2; \mathbf{K}; u_n)^T$ — вектор искомых функций, а P_k — некоторые точки на принадлежащих замыканию характеристической области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x + y < 1, 0 < x - y < 1\}$ многообразиях размерности 1.

Пусть $\Theta_0^+(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right)$, $\Theta_1^+(x) = \left(\frac{1+x}{2}, \frac{1-x}{2}\right)$, $\Theta_0^-(x) = \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right)$, $\Theta_1^-(x) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right)$ — суть аффиксы точек пересечения характеристик системы уравнений (1), выходящих из произвольной точки $x \in [0, 1]$, с характеристиками, ограничивающими область Ω . Рассмотрим условия

$$\mathbf{u}[\Theta_0^-(x)] = j_-(x), \quad \mathbf{u}[\Theta_1^+(x)] = y_+(x), \quad x \in [0, 1]; \quad (2)$$

$$\mathbf{u}[\Theta_0^+(x)] = j_+(x), \quad \mathbf{u}[\Theta_1^-(x)] = y_-(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (3)$$

Неравноправие характеристик как носителей данных Дарбу, известное в теории вырождающихся уравнений гиперболического типа [2], проявляет себя и в задачах с данными на параллельных характеристиках даже для простейших нагруженных волновых уравнений, в чем нетрудно убедиться на примере уравнения

$$u_{xx} - u_{yy} = Iu(x - y, 0), \quad I \in \mathbf{R}, \quad I \neq 0. \quad (4)$$

В работах [3, 4] для уравнения (4) обоснованы существование и единственность решения задачи с условиями вида (2) в скалярном случае при выполнении некоторых необходимых условий, наложенных на значения заданных функций $j_-(x)$, $y_+(x)$ и их производных при $x = 0$ и $x = 1$. Однако задача с данными (3) на параллельных характеристиках из другого семейства для уравнения (2) будет неразрешима единственным образом.

Если вместо уравнения (4) рассмотреть уравнение

$$u_{xx} - u_{yy} = Iu(x - y, 0) + mu(x + y, 0), \quad I, m \in \mathbf{R}, \quad I, m \neq 0, \quad (5)$$

то однозначно разрешимыми окажутся обе задачи.

Результат легко обобщается на системы уравнений вида

$$\mathbf{u}_{xx} - \mathbf{u}_{yy} = H\mathbf{u}(x - y, 0) + M\mathbf{u}(x + y, 0), \quad (6)$$

где $\mathbf{u}(x, y) = (u_1; u_2; \mathbf{K}; u_n)^T$ — вектор искомых функций; H, M — произвольные числовые невырожденные и, вообще говоря, некоммутативные $[n \times n]$ -матрицы [5].

В общем случае существование единственного решения задач с условиями (2) или (3) для системы уравнений (1) может быть обосновано методом Римана.

Характеристические задачи для одной системы нагруженных уравнений с равными матричными коэффициентами при младших производных. Рассмотрим систему уравнений

$$\mathbf{u}_{xx} - \mathbf{u}_{yy} + A(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) = [H(x)\mathbf{u}(x, y)](x - y, 0) + [M(x)\mathbf{u}(x, y)](x + y, 0), \quad (7)$$

где A — произвольная числовая, а $H(x)$, $M(x)$ — функциональные $[n \times n]$ -матрицы.

В характеристических координатах $x = x - y$, $h = x + y$ система уравнений (7) приводится к виду

$$U_{xh} + \frac{1}{2}AU_h = \frac{1}{4}H(x)U(x,x) + \frac{1}{4}M(h)U(h,h),$$

где $U(x,h) = \mathbf{u}\left(\frac{h+x}{2}, \frac{h-x}{2}\right)$, а вспомогательная задача Гурса с данными $U(0,h) = U_1(h)$,

$U(x,0) = U_2(x)$ редуцируется к системе нагруженных интегральных уравнений [6]

$$U(x,h) = U_2(x) + e^{-\frac{1}{2}Ax} [U_1(h) - U_0] + \frac{h}{4} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}A(x-s)} H(s)U(s,s)ds + \frac{1}{2}A^{-1} \left(E - e^{-\frac{1}{2}Ax} \right) \int_0^h M(s)U(s,s)ds,$$

где $U_0 = U(0,0) = U_1(0) = U_2(0)$, E — единичная матрица.

Возвращаясь к искомой вектор-функции $\mathbf{u}(x,y)$, получим представление регулярных в области Ω решений системы уравнений (7)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x,y) = & U_2(x-y) + e^{-\frac{1}{2}A(x-y)} [U_1(x+y) - U_0] + \frac{x+y}{4} \int_0^{x-y} e^{-\frac{1}{2}A(x-y-s)} H(s)\mathbf{u}(s,0)ds + \\ & + \frac{1}{2}A^{-1} \left(E - e^{-\frac{1}{2}A(x-y)} \right) \int_0^{x+y} M(s)\mathbf{u}(s,0)ds, \end{aligned} \quad (8)$$

если вектор-функции $U_1(x)$, $U_2(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, а матрицы $H(x)$, $M(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1)$.

Рассмотрим задачу с условиями (2). Подчиняя равенство (8) первому из них, найдем, что

$$U_2(x) = j_-(x). \quad (9)$$

Второе условие с учетом (9) приводит к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} j_-(x) + e^{-\frac{1}{2}Ax} [U_1(1) - j_-(0)] + \frac{1}{4} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}A(x-s)} H(s)\mathbf{u}(s,0)ds + \\ + \frac{1}{2}A^{-1} \left(E - e^{-\frac{1}{2}Ax} \right) \int_0^1 M(s)\mathbf{u}(s,0)ds = y_+(x), \end{aligned} \quad (10)$$

которая при $x=0$ позволяет определить значение вектора

$$U_1(1) = y_+(0), \quad (11)$$

а при $x=1$ с учетом (11) превращается в некоторое необходимое условие, связывающее значения заданных функций $j_-(x)$ и $y_+(x)$ на концах отрезка $[0,1]$:

$$\begin{aligned} j_-(1) + e^{-\frac{1}{2}A} [y_+(0) - j_-(0)] + \frac{1}{4} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}A(1-s)} H(s)\mathbf{u}(s,0)ds + \\ + \frac{1}{2}A^{-1} \left(E - e^{-\frac{1}{2}A} \right) \int_0^1 M(s)\mathbf{u}(s,0)ds = y_+(1). \end{aligned} \quad (12)$$

Для того чтобы исключить неизвестную вектор-функцию U_1 в равенстве (8), вычислим значение вектора $\mathbf{u}(x,y)$ при $y=0$ и выразим $U_1(x)$:

$$U_1(x) = j_-(0) + e^{\frac{1}{2}Ax} [\mathbf{u}(x,0) - j_-(x)] - \frac{x}{4} \int_0^x e^{\frac{1}{2}As} H(s)\mathbf{u}(s,0)ds - \frac{1}{2}A^{-1} \left(e^{\frac{1}{2}A} - E \right) \int_0^x M(s)\mathbf{u}(s,0)ds.$$

Вычисляя теперь значение вектор-функции U_1 в точке $x+y$ и подставляя соответствующее выражение вновь в формулу (8), получим представление искомого вектора $\mathbf{u}(x,y)$ через его неизвестные пока значения $\mathbf{u}(x+y,0)$ и $\mathbf{u}(x,0)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x,y) = & j_-(x-y) + e^{Ay} [\mathbf{u}(x+y,0) - j_-(x+y)] - \frac{x+y}{4} \int_{x-y}^{x+y} e^{-\frac{1}{2}A(x-y-s)} H(s)\mathbf{u}(s,0)ds + \\ & + \frac{1}{2}A^{-1} \left(E - e^{Ay} \right) \int_0^{x+y} M(s)\mathbf{u}(s,0)ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Дифференцируя по x равенство (10) и исключая из полученного соотношения $\int_0^1 M(s)\mathbf{u}(s,0)ds$, получим систему интегральных уравнений:

$$\left(e^{-\frac{1}{2}Ax} - E\right)H(x)\mathbf{u}(x,0) + \frac{1}{2}A \int_0^x e^{-\frac{1}{2}A(x-s)} H(s)\mathbf{u}(s,0)ds = \mathbf{f}(x), \quad (14)$$

где вектор $\mathbf{f}(x) = 4\left(e^{-\frac{1}{2}Ax} - E\right)[\mathbf{y}'_+(x) - \mathbf{j}'_-(x)] + 2Ae^{-\frac{1}{2}Ax}[(\mathbf{y}_+(x) - \mathbf{y}_+(0)) - (\mathbf{j}_-(x) - \mathbf{j}_-(0))]$.

Решение системы уравнений (14) имеет вид

$$H(x)\mathbf{u}(x,0) = H(0)\mathbf{j}_-(0) + 4[\mathbf{y}'_+(x) - \mathbf{y}'_+(0) - \mathbf{j}'_-(x) + \mathbf{j}'_-(0)] + 2A[\mathbf{y}_+(x) - \mathbf{y}_+(0) - \mathbf{j}_-(x) + \mathbf{j}_-(0)]. \quad (15)$$

Заметим, что так как $\mathbf{u}(1,0) = \mathbf{y}_+(1)$, то система уравнений (14) налагает на значения заданных функций $\mathbf{j}_-(x)$ и $\mathbf{y}_+(x)$ на концах отрезка $[0, 1]$ еще одно необходимое условие:

$$\left(e^{-\frac{1}{2}A} - E\right)H(1)\mathbf{y}_+(1) + \frac{1}{2}A \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}A(1-s)} H(s)\mathbf{u}(s,0)ds = \mathbf{f}(1). \quad (16)$$

В работе [7] было показано, что совокупность условий (12) и (16) равносильна следующим двум условиям:

$$H(0)\mathbf{j}_-(0) + \int_0^1 M(s)\mathbf{u}(s,0)ds = 4[\mathbf{y}'_+(0) - \mathbf{j}'_-(0)] + 2A[\mathbf{y}_+(0) - \mathbf{j}_-(0)]; \quad (17)$$

$$H(1)\mathbf{j}_+(1) + \int_0^1 M(s)\mathbf{u}(s,0)ds = 4[\mathbf{y}'_+(1) - \mathbf{j}'_-(1)] + 2A[\mathbf{y}_+(1) - \mathbf{j}_-(1)], \quad (18)$$

в которых следует использовать выражение $\mathbf{u}(x,0)$, определяемое из формулы (15) при дополнительном требовании обратимости матрицы $H(x)$ всюду на отрезке $[0, 1]$. Используя это же выражение в формуле (13), после некоторых вычислений получим искомое решение в явном виде.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть вектор-функции $\mathbf{j}_-(x)$, $\mathbf{y}_+(x) \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$, матрицы $M(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1)$, $H(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, причем матрица $H(x)$ обратима всюду на $[0,1]$. Тогда при выполнении условий (16) и (17) единственное решение $\mathbf{u}(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ уравнения (7) с данными (2) имеет вид (13), где $\mathbf{u}(x,0)$ предварительно определяется из уравнения (15).

Аналогично обосновывается существование единственного решения системы уравнений (7) с условиями (3) на другой паре параллельных характеристик. Действительно, подчиняя равенство (8) первому из них, найдем что

$$U_1(x) = \mathbf{j}_+(x). \quad (19)$$

Второе условие с учетом (19) приводит к системе интегральных уравнений:

$$U_2(1) + e^{-\frac{1}{2}A}[\mathbf{j}_+(1) - \mathbf{j}_+(0)] + \frac{x}{4} \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}A(1-s)} H(s)\mathbf{u}(s,0)ds + \frac{1}{2}A^{-1}\left(E - e^{-\frac{1}{2}A}\right) \int_0^x M(s)\mathbf{u}(s,0)ds = \mathbf{y}_-(x), \quad (20)$$

из которой при $x=0$ определяется значение вектора $U_2(1) = \mathbf{y}_-(0)$ и в конечном итоге – выражение для неизвестной вектор-функции $\mathbf{u}(x,0)$:

$$M(x)\mathbf{u}(x,0) = M(0)\mathbf{j}_+(0) + 2A\left(e^{\frac{1}{2}A} - E\right)\left[e^{\frac{1}{2}A}(\mathbf{y}'_-(x) - \mathbf{y}'_-(0)) - (\mathbf{j}'_+(x) - \mathbf{j}'_-(0))\right]. \quad (21)$$

Необходимые для разрешимости задачи условия будут следующими:

$$\frac{1}{2}A^{-1}\left(e^{\frac{1}{2}A} - E\right)M(0)\mathbf{j}_+(0) + \frac{1}{4} \int_0^1 e^{\frac{1}{2}As} H(s)\mathbf{u}(s,0)ds = e^{\frac{1}{2}A}\mathbf{y}'_-(0) - \mathbf{j}'_+(0), \quad (22)$$

$$\frac{1}{2}A^{-1}\left(e^{\frac{1}{2}A} - E\right)M(1)\mathbf{m}_-(1) + \frac{1}{4} \int_0^1 e^{\frac{1}{2}As} H(s)\mathbf{u}(s,0)ds = e^{\frac{1}{2}A}\mathbf{y}'_-(1) - \mathbf{j}'_+(1). \quad (23)$$

Исключая в равенстве (8) неизвестную вектор-функцию U_2 подобно тому, как это делалось в предыдущей задаче, получим следующее представление искомого вектора:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) = & \mathbf{u}(x - y, 0) + e^{-\frac{1}{2}A(x-y)} [\mathbf{j}_+(x+y) - \mathbf{j}_+(x-y)] + \frac{y}{2} \int_0^{x-y} e^{-\frac{1}{2}A(x-y-s)} H(s) \mathbf{u}(s, 0) ds + \\ & + \frac{1}{2} A^{-1} \left(E - e^{-\frac{1}{2}A(x-y)} \right) \int_{x-y}^{x+y} M(s) \mathbf{u}(s, 0) ds. \end{aligned} \quad (24)$$

Фигурирующая в равенствах (22), (23) и (24) вектор-функция $\mathbf{u}(x, 0)$ определяется из уравнения (21) при дополнительном требовании обратимости матрицы $M(x)$ всюду на отрезке $[0, 1]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть вектор-функции $\mathbf{j}_+(x)$, $\mathbf{y}_-(x) \in C^1[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, матрицы $M(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $H(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$, причем матрица $M(x)$ обратима всюду на $[0, 1]$. Тогда при выполнении условий (22) и (23) единственное решение $\mathbf{u}(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ уравнения (7) с данными (3) имеет вид (24), где $\mathbf{u}(x, 0)$ предварительно определяется из уравнения (21).

Доказательства существования решения в приведенных выше теоремах осуществляется непосредственной подстановкой решений (13) или (24) в систему уравнений (7); единственность решений и корректность задач по Адамару в топологии пространства вектор-функций $C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$ очевидны.

Замечание. Известно, что между локальными краевыми задачами для нелокальных, в частности, нагруженных дифференциальных уравнений и нелокальными краевыми задачами для локальных уравнений существует тесная связь [2]. Впервые этот факт отмечен в работе А.М. Нахушева [8].

Покажем, что рассмотренные выше задачи равносильны некоторым задачам со смещением на параллельных характеристиках.

Из равенства (10) дифференцированием по x нетрудно получить следующее уравнение относительно вектора $\mathbf{u}(x, 0)$:

$$H(x) \mathbf{u}(x, 0) + \int_0^1 M(s) \mathbf{u}(s, 0) ds = 4[\mathbf{y}'_+(x) - \mathbf{j}'_-(x)] + 2A[\mathbf{y}_+(x) - \mathbf{j}_-(x)], \quad (25)$$

к которому редуцируется задача с условиями (2). Необходимые для разрешимости задачи условия (17) и (18) теперь получаются с очевидностью из равенства (25) при $x = 0$ и $x = 1$.

Используя вновь эти условия (2) в равенстве (25), получим нелокальное краевое условие со смещением

$$\left(E \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} A \right) (\mathbf{u}[\Theta_1^+(x)] - \mathbf{u}[\Theta_0^-(x)]) = \frac{1}{4} H(x) \mathbf{u}(x, 0) + \frac{1}{4} \int_0^1 M(s) \mathbf{u}(s, 0) ds. \quad (26)$$

Аналогично, дифференцируя по x равенство (20) в задаче с условиями (3), получим систему уравнений

$$\frac{1}{2} A^{-1} \left(e^{\frac{1}{2}A} - E \right) M(x) \mathbf{u}(x, 0) + \frac{1}{4} \int_0^1 e^{\frac{1}{2}As} H(s) \mathbf{u}(s, 0) ds = e^{\frac{1}{2}A} \mathbf{y}'_-(x) - \mathbf{j}'_+(x), \quad (27)$$

равносильную следующему нелокальному краевому условию со смещением:

$$e^{\frac{1}{2}A} \frac{d}{dx} \mathbf{u}[\Theta_1^-(x)] - \frac{d}{dx} \mathbf{u}[\Theta_0^+(x)] = \frac{1}{2} A^{-1} \left(e^{\frac{1}{2}A} - E \right) M(x) \mathbf{u}(x, 0) + \frac{1}{4} \int_0^1 e^{\frac{1}{2}As} H(s) \mathbf{u}(s, 0) ds. \quad (28)$$

Пусть

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{t}(x), \quad \mathbf{t}(x) = (t_1; t_2; \mathbf{K}; t_n)^T, \quad (29)$$

является заданной вектор-функцией. Тогда задачи с условиями (2) или (3) для системы уравнений (7), в которой правые части представляют собой теперь известные, в силу условия (29), функции, эквивалентны нелокальным краевым задачам со смещением с условиями (26), (29) или (28), (29) соответственно.

Решения этих задач могут быть найдены по формулам (13) или (24) в классе функций $C(\overline{\Omega}) \cap C(\Omega)$, если $t(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$.

О редукции задачи Гурса для системы нагруженных дифференциальных уравнений к системе нагруженных интегральных уравнений методом Римана. Рассмотрим сейчас систему уравнений (1) с правой частью $F(x, y) = H(x, y)\mathbf{u}(x - y, 0)$, где $H(x)$ — заданная $[n \times n]$ -матрица, $H(x, y) \in C(\overline{\Omega})$.

В характеристических координатах $x = x - y$, $h = x + y$ указанная система уравнений запишется в виде

$$Lu \equiv U_{xh} + \mathbf{A}(x, h)U_x + \mathbf{B}(x, h)U_h + \mathbf{C}(x, h)U = \mathbf{H}(x, h)U(x, x), \quad (30)$$

где $4\mathbf{A}(x, h) = A(x, y) - B(x, y)$; $4\mathbf{B}(x, h) = A(x, y) + B(x, y)$; $4\mathbf{C}(x, h) = C(x, y)$;

$4\mathbf{H}(x, h) = H(x, y)$; $U(x, h) = \mathbf{u}(x, y)$ при $x = \frac{h+x}{2}$, $y = \frac{h-x}{2}$, а область Ω гомеоморфно преобразуется в характеристический квадрат: $0 < x < 1$, $0 < h < 1$.

Рассмотрим для исходной системы уравнений обычную задачу Гурса с данными

$$\mathbf{u}[\Theta_0^-(x)] = \mathbf{j}_-(x), \quad \mathbf{u}[\Theta_0^+(x)] = \mathbf{j}_+(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (31)$$

В характеристических координатах краевые условия (31) принимают вид:

$$U(x, 0) = \mathbf{j}_-(x), \quad U(0, h) = \mathbf{j}_+(h). \quad (32)$$

Полагая по непрерывности $\mathbf{j}_-(0) = \mathbf{j}_+(0)$, примем $U(0, 0) = \mathbf{j}_-(0)$.

Подобно тому, как определяется функция Римана в работе [9] для гиперболического дифференциального уравнения, будем называть матрицей Римана решение следующей системы интегральных уравнений:

$$V(x, h) - \int_{x_1}^x V(V, h) \mathbf{B}(V, h) dV - \int_{h_1}^h V(x, t) \mathbf{A}(x, t) dt + \int_{x_1}^x dV \int_{h_1}^h V(V, t) \mathbf{C}(V, t) dt = E, \quad (33)$$

которая, будучи системой интегральных уравнений Вольтерра, всегда имеет единственное решение, если матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{A}$, $\frac{\partial}{\partial h} \mathbf{B} \in C(\overline{\Omega})$.

Желая подчеркнуть зависимость матрицы $V(x, h)$ от x_1 и h_1 , ее обычно обозначают $R(x, h; x_1, h_1)$.

Из системы уравнений (33) непосредственно легко увидеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} R(x, h_1; x_1, h_1) - R(x, h_1; x_1, h_1) \mathbf{B}(x, h_1) &\equiv 0, \\ \frac{\partial}{\partial h} R(x_1, h; x_1, h_1) - R(x_1, h; x_1, h_1) \mathbf{A}(x_1, h) &\equiv 0, \end{aligned} \quad (34)$$

$$R(x_1, h_1; x_1, h_1) = E.$$

Очевидно, что таким образом определяемая матрица R удовлетворяет однородной системе уравнений

$$L^*(V) \equiv V_{xh} - (V\mathbf{A})_x - (V\mathbf{B})_h + V\mathbf{C} = 0, \quad (35)$$

сопряженной с данной системой (30), в которой правая часть считается на время заданным вектором.

Для любой вектор-функции $U(x, h): U(x, h) \in C(\overline{\Omega})$, а U_x , U_h , $U_{xh} \in C(\Omega)$ справедливо легко проверяемое с учетом (35) тождество [10]:

$$\frac{\partial^2}{\partial V \partial t} [R(V, t; x, h)U(V, t)] - R(V, t; x, h)L(U) = \frac{\partial}{\partial V} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial t} - R\mathbf{A} \right) U \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial V} - R\mathbf{B} \right) U \right],$$

интегрируя которое по ς и τ в промежутках $x_0 \leq V \leq x$, $h_0 \leq t \leq h$, где (x_0, h_0) — произвольная точка области Ω , получим

$$U(x, h) = R(x_0, h_0; x, h)U(x_0, h_0) + \int_{x_0}^x R(V, h_0; x, h) \left[\frac{\partial U(V, h_0)}{\partial V} + \mathbf{B}(V, h_0)U(V, h_0) \right] dV +$$

$$+ \int_{h_0}^h R(x_0, t; V, h) \left[\frac{\partial U(x_0, t)}{\partial t} + A(x_0, t) U(x_0, t) \right] dt + \int_{x_0}^x dV \int_{h_0}^h R(V, t; x, h) L[U(V, t)] dt. \quad (36)$$

В предположении, что $U(x, h)$ является регулярным решением системы уравнений (30) из тождества (36) после интегрирования по частям получаем интегральное представление этого решения:

$$\begin{aligned} U(x, h) = & R(x, h_0; x, h) U(x, h_0) + R(x_0, h; x, h) U(x_0, h) - R(x_0, h_0; x, h) U(x_0, h_0) + \\ & + \int_{x_0}^x \left[B(V, h_0) R(V, h_0; x, h) - \frac{\partial}{\partial V} R(V, h_0; x, h) \right] U(V, h_0) dV + \\ & + \int_{h_0}^h \left[A(x_0, t) R(x_0, t; x, h) - \frac{\partial}{\partial t} R(x_0, t; x, h) \right] U(x_0, t) dt + \int_{x_0}^x dV \int_{h_0}^h R(V, t; x, h) H(V, t) U(V, V) dt. \end{aligned} \quad (37)$$

Тем самым задача Гурса с условиями (32) для нагруженной системы дифференциальных уравнений (30) с помощью формулы (37) сводится к системе нагруженных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} U(x, h) = & R(x, 0; x, h) j_-(x) + R(0, h; x, h) j_+(h) - R(0, 0; x, h) j_-(0) + \\ & + \int_0^x \left[B(V, 0) R(V, 0; x, h) - \frac{\partial}{\partial V} R(V, 0; x, h) \right] j_-(V) dV + \int_0^h \left[A(0, t) R(0, t; x, h) - \frac{\partial}{\partial t} R(0, t; x, h) \right] j_+(t) dt + \\ & + \int_0^x \int_0^h R(V, t; x, h) H(V, t) dt U(V, V) dV. \end{aligned} \quad (38)$$

Если рассмотреть равенство (38) при $h = x$, то для неизвестной вектор-функции $U(x, x)$ получим систему интегральных уравнений Вольтера:

$$U(x, x) - \int_0^x K(x, V) U(V, V) dV = \Phi(x), \quad (39)$$

где ядро интегрального оператора

$$K(x, V) = \int_0^x R(V, t; x, x) H(V, t) dt,$$

а вектор-функция

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & R(x, 0; x, x) j_-(x) + R(0, x; x, x) j_+(x) - R(0, 0; x, x) j_-(0) + \\ & + \int_0^x \left[B(V, 0) R(V, 0; x, x) - \frac{\partial}{\partial V} R(V, 0; x, x) \right] j_-(V) dV + \int_0^x \left[A(0, t) R(0, t; x, x) - \frac{\partial}{\partial t} R(0, t; x, x) \right] j_+(t) dt. \end{aligned}$$

При сделанных предположениях относительно гладкости функциональных матричных коэффициентов системы уравнений (30) система интегральных уравнений (39) будет иметь единственное решение. Это решение может быть найдено методом Пикара [11]. Используя найденное решение в формуле (37), получим решение задачи Гурса (32) для уравнения (30) в замкнутой форме.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хачев М.М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Нальчик: Эльбрус, 1998. 168 с.
2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
3. Аттасев А.Х. Задача с данными на параллельных характеристиках для нагруженного волнового уравнения // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Киев: ИМ АН УССР, 1990. С. 10 - 11.
4. Аттасев А.Х. Краевые задачи с характеристическим носителем для нагруженного гиперболического уравнения с волновым оператором в главной части // Нелокальные задачи и их приложения к автоматизированным системам: Сб. науч. тр. Нальчик: КБГУ, 1989. С. 16 - 22.
5. Вдовина Н.Н., Огородников Е.Н. Краевая задача с данными на всей границе области для одной нагруженной системы дифференциальных уравнений с волновым оператором // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. одиннадцатой межвуз. конф. Ч. 3. Самара: СамГТУ, 2001. С. 15 - 19.
6. Огородников Е.Н., Радченко В.П. Некоторые неклассические краевые задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений с волновым оператором в характеристическом квадрате // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Тез. докл. второй междунар. конф. Нальчик: НИИ ПМА, 2001. С. 14.
7. Огородников Е.Н. О корректности некоторых аналогов задачи Гурса для систем нагруженных дифференциальных уравнений с волновым оператором // Тр. Средневолж. мат. о-во. Т. 3 - 4. № 1. Саранск: СВМО, 2002. С. 204 - 210.

8. *Нахушев А.М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21. № 1. С. 92 - 101.
9. *Жегалов В.И., Миронов А.Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань: Казан. мат. о-во, 2001. 226 с.
10. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
11. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. М.: ИИЛ, 1960. 299 с.

Поступила 18.07.2003 г.