Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Ефимов, О задаче со смещением для уравнения смешанного типа первого рода, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 29–33

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu135>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:27:34

О ЗАДАЧЕ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ПЕРВОГО РОДА

Для уравнения смешанного типа первого рода поставлена и исследована задача со смещением, краевое условие которой содержит обобщенные операторы дробного интегродифференцирования. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y |y|^m U_{xx} + U_{yy} = 0, \quad m > 0 \quad (1)$$

в односвязной области D , ограниченной кривой Жордана Γ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(0,1)$, расположенной в полуплоскости $y > 0$, и характеристиками уравнения (1):

$$AC: x = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0 \text{ и } BC: h = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1.$$

Примем следующие обозначения:

$$b = \frac{m}{2(m+2)}, \quad 0 < b < \frac{1}{2},$$

D_1 и D_2 – эллиптическая и гиперболическая части смешанной области D соответственно; J – единичный интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$; $q_0(x) = \frac{x}{2} - i \left(\frac{m+2}{4} x \right)^{\frac{2}{m+2}}$ – аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,0) \in J$ с характеристикой AC ; $(I_{0+}^{a,b,h} f)(x)$ – обобщенный оператор дробного интегродифференцирования в смысле М. Сайго [1, 2]; $(I_{0+}^a f)(x)$ и $(D_{0+}^a f)(x)$ – операторы дробного интегродифференцирования в смысле Римана-Лиувилля [3, 4].

Под регулярным в области D решением уравнения (1) понимается функция $U(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$, удовлетворяющая уравнению (1) в D_1 и D_2 , и такая, что $U_y(x,0)$ на концах интервала J может обращаться в бесконечность порядка ниже $\frac{2}{m+2}$.

З а д а ч а. Найти регулярное в области D решение $U(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$U(x,y)|_{\Gamma} = j(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Gamma; \quad (2)$$

$$Ax^{1-2b+b} I_{0+}^{-b-c,b,c} x^{2b-1} U[q_0(x)] = BI_{0+}^{1-2b-c,2b-1,-1+2b+c-b} (a(x)U_y(x,0)) + \\ + (I_{0+}^{a_1,b_1,-1+2b+c-b} \Psi_1)(x) \quad \forall x \in J \quad (3)$$

и условиям сопряжения

$$U(x,-0) = U(x,+0), \quad x \in \bar{J}, \quad U_y(x,-0) = U_y(x,+0), \quad x \in J, \quad (4)$$

где A, B – заданные константы, на которые впоследствии будут наложены необходимые условия; b, c – действительные числа; $\Psi_1(x), j(x,y), a(x)$ – заданные непрерывные функции, причем

$$\Psi_1(x) \in H^l[0,1], \quad 0 < l \leq 1;$$

$$a_l > 1-2b, \quad 1-2b-a_l < c < 0, \quad b > 1, \quad b_l < 2b-b \quad (b < 1, \quad b_l < 2b-1); \quad (5)$$

$$a_l > 0, \quad 1-2b-a_l-l < c < \min[1-2b-a_l, 0], \quad b > 1, \quad b_l < 2b-b \quad (b < 1, \quad b_l < 2b-1).$$

Единственность решения задачи. В полуплоскости $y < 0$ уравнение (1) имеет вид

$$(-y)^m U_{xx} - U_{yy} = 0. \quad (6)$$

С помощью характеристических координат оно преобразуется в уравнение Эйлера-Дарбу-Пуассона

$$U_{xh} - \frac{b}{h-x}(U_x - U_h) = 0. \quad (7)$$

Хорошо известно [5], что решение уравнения (7), удовлетворяющее начальным данным

$$\lim_{(h-x) \rightarrow -0} U(x, h) = t(x), \quad x \in \bar{J},$$

$$\lim_{(h-x) \rightarrow -0} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{2b} (h-x)^{2b} (U_x - U_h) = n_2(x), \quad x \in J \quad (8)$$

имеет вид

$$U(x, h) = g_1 \int_x^h \frac{(h-x)^{1-2b} t(t) dt}{(h-t)^{1-b} (t-x)^{1-b}} - g_2 \int_x^h \frac{n_2(t) dt}{(h-t)^b (t-x)^b}, \quad (9)$$

где $g_1 = \frac{\Gamma(2b)}{\Gamma^2(b)}$; $g_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2b} \frac{\Gamma(1-2b)}{\Gamma^2(1-b)}$.

Из формулы (9) имеем

$$U[q_0(x)] = g_1 \Gamma(b) (I_{0+}^{b,0,b-1} t)(x) - g_2 \Gamma(1-b) (I_{0+}^{1-b,2b-1,b-1} n_2)(x), \quad (10)$$

где $U(x, 0) = t(x)$, $U_y(x, 0) = n_2(x)$.

Подставив (10) в (3) и воспользовавшись свойствами операторов обобщенного дробного интегрирования [1], получим соотношения

$$(I_{0+}^{a,b,h} j)(x) = x^{-a-b-h} (I_{0+}^{a,-a-h,-a-b} j)(x); \quad (11)$$

$$(I_{0+}^{a,b,h} (I_{0+}^{g,d,a+h} j)(t))(x) = (I_{0+}^{a+g,b+d,h} j)(x), \quad (12)$$

справедливые при $a > 0$ и $g > 0$ соответственно.

На основании свойств (11) и (12), учитывая, что $b > 0$, $1-b > 0$, $c < 0$, $1-2b-c > 0$, имеем

$$x^{2b-1} (I_{0+}^{b,0,b-1} t)(x) = (I_{0+}^{b,1-2b,-b} t)(x), \quad x^{2b-1} (I_{0+}^{1-b,2b-1,b-1} n_2)(x) = (I_{0+}^{1-b,0,-b} n_2)(x);$$

$$(I_{0+}^{-b-c,b,c} (I_{0+}^{b,1-2b,-b} t)(t))(x) = (I_{0+}^{-c,1-2b+b,c} t)(x), \quad (I_{0+}^{-b-c,b,c} (I_{0+}^{1-b,0,-b} n_2)(t))(x) = (I_{0+}^{1-2b-c,b,c} n_2)(x);$$

$$x^{1-2b+b} (I_{0+}^{-c,1-2b+b,c} t)(x) = (I_{0+}^{-c,0,-1+2b+b-c} t)(x), \quad x^{1-2b+b} (I_{0+}^{1-2b-c,b,c} n_2)(x) = (I_{0+}^{1-2b-c,2b-1,-1+2b+b-c} n_2)(x).$$

Далее,

$$Ag_1 \Gamma(b) (I_{0+}^{-c,0,-1+2b+b-c} t)(x) - Ag_2 \Gamma(1-b) (I_{0+}^{1-2b-c,2b-1,-1+2b+b-c} n_2)(x) =$$

$$= BI_{0+}^{1-2b-c,2b-1,-1+2b+b-c} (a(x)n_2(x)) + (I_{0+}^{a_1,b_1,-1+2b+b-c} \Psi_1)(x). \quad (13)$$

Применяя к обеим частям (13) обратный оператор

$$(I_{0+}^{1-2b-c,2b-1,-1+2b+b-c})^{-1} = I_{0+}^{-1+2b+c,1-2b,-b}$$

и в силу того, что $c < 0$ и $a_1 > 0$, находим

$$Ag_1 \Gamma(b) (D_{0+}^{1-2b} t)(x) - Ag_2 \Gamma(1-b) n_2(x) = Ba(x)n_2(x) + (I_{0+}^{-1+2b+c+a_1,1-2b+b_1,-b} \Psi_1)(x);$$

$$(Ba(x) + Ag_2 \Gamma(1-b)) n_2(x) = Ag_1 \Gamma(b) (D_{0+}^{1-2b} t)(x) - (I_{0+}^{-1+2b+c+a_1,1-2b+b_1,-b} \Psi_1)(x). \quad (14)$$

При $\Psi_1(x) \equiv 0$ из (14) получим

$$n_2(x) = \left(\frac{Ag_1 \Gamma(b)}{Ba(x) + Ag_2 \Gamma(1-b)} \right) (D_{0+}^{1-2b} t)(x). \quad (15)$$

Дополнительно потребуем

$$\frac{Ag_1 \Gamma(b)}{Ba(x) + Ag_2 \Gamma(1-b)} > 0.$$

Единственность решения задачи вытекает из аналога принципа экстремума А.В. Бицадзе [6].

В самом деле, при $\Psi_1(x) \equiv 0$ положительный максимум и отрицательный минимум решения $U(x, y)$ задачи достигается лишь на Γ .

Очевидно, достаточно показать, что положительный максимум функции $U(x, y)$ в $\bar{D}_1$ не достигается в точке $x_0 \in J$. Пусть $\max_{\bar{D}_1} U(x, y) = t(x_0) > 0$. Тогда в соответствии с принципом экстремума для операторов дробного дифференцирования [7] из (15) и (5) заключаем, что $n(x_0) > 0$.

Последнее противоречит принципу Заремба-Жиро [8].

Аналогично доказывается, что $U(x, y)$ не может достигать отрицательного минимума в $\overline{D_1}$ в точке $x_0 \in J$.

Существование решения задачи. Сделаем следующее предположение: кривая Γ совпадает с «нормальным контуром» Γ_0 :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = \frac{1}{4}$$

и функция $j(x, y) \equiv 0$.

Тогда функциональное соотношение между $t(x)$ и $n(x) = U_y(x, +0)$ из эллиптической области $\overline{D_1}$, принесенные на J , имеет вид [5, с. 173]

$$t(x) = -k_1 \int_0^1 \left[|x-t|^{-2b} - (x+t-2xt)^{-2b} \right] n(t) dt, \quad (16)$$

где $k_1 = \frac{1}{4p} [2(1-2b)]^{2b} \frac{\Gamma^2(b)}{\Gamma(2b)}$.

Учитывая условие склеивания (4), соотношения (14) и (16), исключим $t(x)$. В результате получим уравнение для определения $n(x)$:

$$\begin{aligned} n(x) = & \left(\frac{Ag_1 \Gamma(b)}{Ba(x) + Ag_2 \Gamma(1-b)} \right) D_{0+}^{1-2b} \left(-k_1 \int_0^1 \left[|x-t|^{-2b} - (x+t-2xt)^{-2b} \right] n(t) dt \right) - \\ & - \frac{1}{Ba(x) + Ag_2 \Gamma(1-b)} \left(I_{0+}^{-1+2b+c+a_1, 1-2b+b_1, -b} \Psi_1 \right)(x). \end{aligned} \quad (17)$$

Будем считать, что функция $n(x)$ в интервале $(0,1)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $h > 0$ и интегрируема на отрезке $[0,1]$.

Приведем уравнение (17) к сингулярному интегральному уравнению. Известно, что если $n(x)$ имеет вид (17), то

$$\begin{aligned} D_{0+}^{1-2b} \left(-k_1 \int_0^1 \left[|x-t|^{-2b} - (x+t-2xt)^{-2b} \right] n(t) dt \right) = \\ = -\frac{k_1}{\Gamma(2b)} \left(\int_0^1 \left(\frac{t}{x} \right)^{1-2b} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt} \right) n(t) dt + ptgpb n(x) \right) \end{aligned}$$

На основании последнего соотношения уравнение (17) примет вид

$$\begin{aligned} n(x) = & \left(\frac{Ag_1 \Gamma(b)}{Ba(x) + Ag_2 \Gamma(1-b)} \right) \left(-\frac{k_1}{\Gamma(2b)} \int_0^1 \left(\frac{t}{x} \right)^{1-2b} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt} \right) n(t) dt + ptgpb n(x) \right) - \\ & - \frac{1}{Ba(x) + Ag_2 \Gamma(1-b)} \left(I_{0+}^{-1+2b+c+a_1, 1-2b+b_1, -b} \Psi_1 \right)(x), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & \left(1 - \left(\frac{Ag_1 \Gamma(b)}{Ba(x) + Ag_2 \Gamma(1-b)} \right) \left(-\frac{k_1}{\Gamma(2b)} \right) ptgpb \right) n(x) - \\ & - \left(\frac{Ag_1 \Gamma(b)}{Ba(x) + Ag_2 \Gamma(1-b)} \right) \left(-\frac{k_1}{\Gamma(2b)} \right) \int_0^1 \left(\frac{t}{x} \right)^{1-2b} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt} \right) n(t) dt = \\ & = -\frac{1}{Ba(x) + Ag_2 \Gamma(1-b)} \left(I_{0+}^{-1+2b+c+a_1, 1-2b+b_1, -b} \Psi_1 \right)(x). \end{aligned}$$

И окончательно будем иметь

$$C_2(x)n(x) + C_1(x) \int_0^1 \left(\frac{t}{x} \right)^{1-2b} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt} \right) n(t) dt = F(x); \quad (18)$$

где

$$C_1(x) = -\frac{Ag_1 \Gamma(b) k_1}{Ba(x) \Gamma(2b) + Ag_2 \Gamma(1-b) \Gamma(2b)};$$

$$C_2(x) = C_1(x) \pi g p b - 1,$$

$$F(x) = -\frac{1}{Ba(x) + Ag_2 \Gamma(1-b)} \left(I_{0+}^{-1+2b+c+a_1, 1-2b+b_1, -b} \Psi_1 \right)(x).$$

Исследуем свободный член $F(x)$ интегрального уравнения (18). Рассмотрим два варианта принадлежности функции $F(x)$ классу гельдеровских функций.

В а р и а н т 1. Пусть $-1+2b+c+a_1 > 0$ или $c > 1-2b-a_1$. Так как $c < 0$, $1-2b > 0$ и $a_1 > 0$, то

$$1-2b-a_1 < c < 0, a_1 > 1-2b.$$

Воспользуемся теоремой 1 [11].

Т е о р е м а 1. Пусть $a > 0$, $b < \min[0, h+1]$, $0 < l \leq 1$ и $j(x) \in H^l[0,1]$. Тогда

$$\left(I_{0+}^{a,b,h} j \right)(x), \left(I_{1-}^{a,b,h} j \right)(x) \in H^{\min[l, -b]}[0,1].$$

По условию теоремы 1 необходимо иметь

$$-1+2b+c+a_1 > 0; 1-2b+b_1 < \min[0, 1-b]; 0 < l \leq 1; \Psi_1(x) \in H^l[0,1].$$

Пусть $\min[0, 1-b] = 1-b$. Тогда $1-b < 0$ и $b > 1$. Поэтому $1-2b+b_1 < 1-b$ и окончательно $b_1 < 2b-b$.

Возможен и другой случай. Пусть $\min[0, 1-b] = 0$. Тогда $1-b > 0$ и $b < 1$. Поэтому $1-2b+b_1 < 0$ и $b_1 < 2b-1$. Тогда

$$\left(I_{0+}^{-1+2b+c+a_1, 1-2b+b_1, -b} \Psi_1 \right)(x) \in H^{\min[l, -1+2b-b_1]}[0,1].$$

И окончательно имеем: если $a_1 > 1-2b$, $1-2b-a_1 < c < 0$, $b > 1$, $b_1 < 2b-b$ (или $b < 1$, $b_1 < 2b-1$), то

$$F(x) \in H^{\min[1+2b, \min[l, -1+2b-b_1]]}[0,1].$$

В а р и а н т 2. Пусть теперь $-1 \leq -l < -1+2b+c+a_1 < 0$ или $1-2b-a_1-l < c < 1-2b-a_1$. Так как $c < 0$, $1-2b > 0$ и $a_1 > 0$, то $1-2b-a_1-l < c < \min[1-2b-a_1, 0]$.

Воспользуемся теоремой 2 [11].

Т е о р е м а 2. Пусть $0 < -a < l \leq 1$ и $b < \min[0, h+1]$. Если $j(x) \in H^l[0,1]$, то

$$\left(I_{0+}^{a,b,h} j \right)(x), \left(I_{1-}^{a,b,h} j \right)(x) \in H^{\min[l+a, -b]}[0,1].$$

По условию теоремы 2 необходимо иметь

$$0 < 1-2b-c-a_1 < l \leq 1; 1-2b+b_1 < \min[0, 1-b]; \Psi_1(x) \in H^l[0,1].$$

Пусть $\min[0, 1-b] = 1-b$. Тогда $1-b < 0$ и $b > 1$. Поэтому $1-2b+b_1 < 1-b$. И окончательно $b_1 < 2b-b$.

Возможен и другой случай. Пусть $\min[0, 1-b] = 0$. Тогда $1-b > 0$ и $b < 1$. Поэтому $1-2b+b_1 < 0$ и $b_1 < 2b-1$. Тогда

$$\left(I_{0+}^{-1+2b+c+a_1, 1-2b+b_1, -b} \Psi_1 \right)(x) \in H^{\min[l-1+2b+c+a_1, -1+2b-b_1]}[0,1].$$

И окончательно имеем: если $a_1 > 0$, $1-2b-a_1-l < c < \min[1-2b-a_1, 0]$, $b > 1$, $b_1 < 2b-b$ (или $b < 1$, $b_1 < 2b-1$), то

$$F(x) \in H^{\min[1+2b, \min[l-1+2b+c+a_1, -1+2b-b_1]]}[0,1].$$

Применив теперь обычную схему вычислений (см. напр. [5, с. 220–222], [6, с. 382–383]), уравнение (18) можно свести к сингулярному интегральному уравнению нормального типа с ядром Коши. А с помощью известного метода регуляризации Карлемана-Векуа [9, 10] приходим к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Saigo M. // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. Vol. 11. № 2. P. 135 – 143.
2. Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Саратов: Изд-во Саратов. гос. ун-та, 1992. 164 с.

3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
4. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их приложения. Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. 299 с.
5. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Высш. шк. 1985. 304 с.
6. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
7. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк. 1995. 301 с.
8. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 203 с.
9. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
10. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
11. *Saigo M. and Kilbas A.A.* Generalized fractional integrals and derivatives in Holder spaces // Transform methods and Special Functions, Sofia 94 (Proceedings of International Workshop), Sci. Cult. Publ., Singapore, 1995. P. 282 – 293.

Поступила 4.04.2003 г.