Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Кудюров, А. В. Ильин, Результаты исследований по оценке отклонений линейаризованной траектории относительного движения от действительной в гравитационных полях планет, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 34–37

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 06:00:12

Приложения дифференциальных уравнений

УДК 531.55:521.2

Л.В. Кудюров, А.В. Ильин

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ОЦЕНКЕ ОТКЛОНЕНИЙ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ТРАЕКТОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ОТ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ ПЛАНЕТ

Рассматривается относительное движение материальной точки в центральных гравитационных полях различной мощности и оцениваются области применения линеаризованной теории. Для сравнения используются точная и линеаризованная теории.

Р и с. 1 Система координат

На рис. 1 изображена материальная точка М, которая движется в орбитальной системе координат xSy , связанной с другой точкой С, движущейся по эллиптической орбите в поле притягивающего центра О. Ось Sy направлена вдоль радиус-вектора r_c от центра, ось Sx – перпендикулярно Sy в сторону движения, ось Sz дополняет систему до правой.

Как известно, относительное движение в центральном силовом поле описывается векторным дифференциальным уравнением

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}}_e - m\ddot{\mathbf{r}}_k, \quad (1)$$

где $-m\ddot{\mathbf{r}}_e$, $-m\ddot{\mathbf{r}}_k$ – переносная и кориолисова силы инерции соответственно.

После несложных алгебраических преобразований уравнение (1) в проекциях на оси подвижной системы координат сводится к трем дифференциальным уравнениям относительного движения [1]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu x}{[x^2 + (r_c + y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \ddot{x}_c - \ddot{y}_c y - 2\ddot{y}_c x \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu(y + r_c)}{[x^2 + (r_c + y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \ddot{y}_c + \ddot{x}_c x + \frac{m}{r_c}, \quad \ddot{z} = -\frac{\mu z}{[x^2 + (r_c + y)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где μ – гравитационный параметр притягивающего центра.

Это точная система дифференциальных уравнений относительного движения материальной точки в центральном силовом поле. Если ввести безразмерные параметры

$$X = \frac{x}{a}; \quad Y = \frac{y}{a}; \quad Z = \frac{z}{a}; \quad R_c = \frac{r_c}{a}; \quad t = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t; \quad t_p = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} t_p; \quad \Theta = t - t_p, \quad (3)$$

где a – большая полуось орбиты цели, $a = \frac{r_a + r_p}{2}$, то уравнения (2) можно записать в безразмерном виде:

$$\ddot{X} = -Y - 2Y\ddot{\Theta} + \ddot{X} - \frac{X}{R_1^3}; \quad \ddot{Y} = X + 2X\ddot{\Theta} + \ddot{Y} + \frac{1}{R_c^2} - \frac{Y + R_c}{R_1^3}; \quad \ddot{Z} = -\frac{Z}{R_1^3}. \quad (4)$$

Если относительные расстояния x, y, z малы по сравнению с большой полуосью орбиты цели, т.е.

$$X \ll 1, Y \ll 1, Z \ll 1,$$

и орбита цели мало отличается от круговой, т.е. эксцентриситет мал ($e \ll 1$), то получим систему линеаризованных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{X}_1 = -2\ddot{X}_1, \quad \ddot{Y}_1 = 2\ddot{X}_1 + 3Y_1, \quad \ddot{Z}_1 = -Z_1, \quad (5)$$

которая имеет аналитическое решение.

Вопрос о степени достоверности уравнений (5) рассматривался и раньше, но эти исследования ограничивались рамками одного притягивающего центра, в частности Земли. Однако дальнейшее развитие теории и практики космического полета, особенно в пределах солнечной системы, неминуемо приведет к необходимости использования энергосберегающих траекторий относительного движения и более совершенных систем управления. Такие траектории могут быть получены, если для управления движением используются методы, основанные на законах орбитального движения (методы свободных траекторий), и, в частности, метод координатно-скоростной коррекции [2]. При этом стремление к увеличению полезного груза на борту космического аппарата повышает требования к простоте и компактности алгоритмов при автономном управлении. Поэтому задача оценки области применения линеаризованной теории в гравитационных полях планет солнечной системы представляется актуальной.

Р и с. 2 Фазовая траектория неуправляемого движения

Для решения этой задачи была разработана программа численного решения уравнений (4) и (5) для разных начальных условий с графическим и текстовым выводом полученных результатов. Интегрирование дифференциальных уравнений движения осуществлялось методом Рунге-Кутты. Были проведены численные исследования неуправляемого и управляемого относительных движений, начальные условия и результаты расчетов для которых сведены в табл. 1 и табл. 2 соответственно. Необходимо отметить, что исходные данные для неуправляемого движения в поле любого притягивающего центра выбирались таким образом, что отношение относительной дальности к большой полуоси опорной орбиты не превышало 0.01. Начальная относительная скорость при расчетах принималась равной нулю:

X_0, Y_0, Z_0 – начальные относительные расстояния по осям S_x, S_y и S_z соответственно, км;

R – расстояние, на котором приближенная и точная траектории близки, км;

t_1 – время, в течение которого траектории сохраняют "близость", с;

ΔV – модуль разности скоростей в конце участка "близости" траекторий, м/с;

ΔR – модуль разности расстояний в конце участка "близости" траекторий, км.

Например, для Земли при таких начальных условиях фазовая траектория неуправляемого движения представлена на рис. 2.

Важно отметить следующий факт. Предварительные расчеты показали, что точность линеаризованной траектории сильно зависит от времени. С увеличением продолжительности движения отклонение приближенной траектории (по относительным дальности и скорости) от точной перестает соответствовать необходимым условиям точности расчета (не более 1%). В табл. 1 это время обозначено символом t_1 . В приведенном примере точная траектория "опережает" приближенную и по относительной скорости, и по относительному расстоянию. Как показали численные исследования, линеаризованные уравнения описывают относительное дви-

жение с достаточной степенью точности на более продолжительном участке траектории в гравитационных полях большей мощности.

Т а б л и ц а 1

Результаты расчетов для неуправляемого движения

Планета	μ , км ³ /с ³	X_0 , км	Y_0 , км	Z_0 , км	R , км	t_1 , с	ΔR , км	ΔV , м/с
Меркурий	$2,16 \cdot 10^4$	24	8	5	100	2400	5	3
Венера	$6,2 \cdot 10^5$	60	16	12	150	1550	7	5
Земля	$3,98 \cdot 10^5$	62	17	13	210	2300	10	7
Марс	$4,2 \cdot 10^4$	32	10	7	120	2600	8	6
Юпитер	$1,26 \cdot 10^8$	709	120	22	760	3800	17	23
Сатурн	$3,78 \cdot 10^7$	583	96	16	630	5200	15	20
Уран	$5,8 \cdot 10^8$	258	50	7	350	4000	14	25
Нептун	$6,86 \cdot 10^6$	253	40	6	250	3500	10	15
Луна	$4,89 \cdot 10^3$	17,5	3	1	21	2500	2	1

В качестве примера управляемого движения рассмотрен маневр попадания в зону 300 м от "цели" по координатной схеме [3]. При этом сухая масса космического аппарата составляет 5000 кг, масса топлива – 3000 кг, массовый расход топлива – 1,5 кг/с, скорость истечения газов – 2500 м/с.

Т а б л и ц а 2

Результаты расчетов для управляемого движения

Планета	X_0 , км	Y_0 , км	ΔV , м/с		t_k , с		R_k , км		V_k , м/с	
			К	С	К	С	К	С	К	С
Меркурий	6,6	1,5	3,11	3,02	3351	3292	0,294	0,424	0,41	0,14
Венера	9,5	2,5	5,02	4,90	3295	3208	0,291	0,532	0,66	0,15
Земля	9,5	2,5	5,20	5,08	3178	3094	0,293	0,533	0,69	0,16
Марс	8,2	2,5	5,2	4,27	3591	3459	0,296	0,535	0,51	0,16
Юпитер	16,8	6	5,93	5,81	5967	5670	0,291	0,994	0,77	0,10
Сатурн	16,8	6	4,17	4,09	8482	8060	0,290	0,992	0,54	0,07
Уран	14	5	5,14	5,03	5738	5452	0,290	0,857	0,65	0,11
Нептун	15	5	5,16	5,05	5874	5616	0,292	0,857	0,67	0,10
Луна	5,5	1	1,63	1,58	4551	4524	0,290	0,374	0,25	0,08

Р и с. 3 Фазовые траектории сближения

Для получения исчерпывающей информации по решению поставленной задачи оказалось весьма эффективным исследование управляемого относительного движения в фазовой плоскости аналогично тому, как это было сделано для неуправляемого движения. В табл. 2 приведены начальные координаты импульсов скорости (ΔV), время маневра (t_k), конечная относительная дальность (R_k) и конечная относительная скорость (V_k). С целью использования полученных результатов при отработке функционирования метода координатно-скоростной коррекции в задаче облета Луны с выходом на гелиоцентрическую орбиту были проведены соответствующие исследования в гравитационном поле естественного спутника Земли. В целях наглядности на рис. 3 приведены результаты расчетов только для двух планет – Меркурия и Юпитера.

Из приведенных графиков видно, что для планет большей мощности фазовые траектории (точная и линеаризованная) достаточно близки на значительной части траектории и лишь на конечных участках имеют существенную разницу. Это различие хорошо видно из представленных значений по конечной относительной дальности R_k и конечной относительной скорости V_k .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Антони М.Л. Сазаки Ф.Т. Проблемы встречи на близких к круговым орбитах // Ракетная техника и космонавтика. Т.3. №9.1965. С. 129-137.
2. Анишаков Г.П., Кудюров Л.В. Об одном методе "мягкой" встречи на орбите // Космические исследования. №6. 1971. С. 1-12.
3. Кудюров Л.В. Теоретические основы координатно-скоростной коррекции траекторий относительного маневрирования // Вестн. СамГТУ. Сер. Техн. науки. 2000. Вып. 10. С. 28-39.

Поступила 25.02.2003 г.