Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Кубанова, Об одной форме аналитического решения истечения газа в пористой среде, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 38–41

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:06:58

ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ИСТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Получено аналитическое решение для задачи истечения газа через пористую среду. В качестве модельной задачи использовалось уравнение течения газа в Эйлеровых координатах. Используя линеаризацию, задача сведена к решению волнового уравнения в двухфазной среде.

Современный научно-технический прогресс во всем мире непосредственным образом связан с глобальным использованием природных ресурсов, поэтому проблемы, поставленные и исследованные в настоящей работе, позволяют, в принципе, решать целый спектр практических задач этого направления. В частности, при изучении режима оползневых и лавинных процессов и их пространственно-временного прогноза; при исследовании природных резервуаров, заполненных природным флюидом: нефтью, газом, водой – с целью оптимизации процесса извлечения-добычи углеводородного сырья; при нанесении упрочняющих покрытий на поверхности деталей и при изучении многих других технологических процессов, которые вызывают большой исследовательский интерес.

Во многих случаях изменения параметров среды в некоторой области весьма малы по сравнению с величинами этих параметров. Тогда можно линеаризировать исходные уравнения относительно параметров в какой-либо точке [1] и получить решение этих уравнений в достаточно простом виде. В работе рассматривается такое решение задачи о нестационарном истечении газа из неподвижной пористой среды за поршнем, который движется с постоянной скоростью V_0 .

Рассмотрим двухфазную среду газ-твердые частицы (см. рисунок). Твердые частицы не движутся, образуя скелет. Пористость обозначим через f_0 . Давления всех фаз будем считать совпадающими и равными давлению двухфазной среды P .

Схема двухфазной среды

В области 1 (см. рисунок) для газа в эйлеровых переменных имеем уравнения

$$r_1^0 \frac{\partial V_1}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial r_1^0}{\partial t} + r_1^0 \frac{\partial V_1}{\partial x} = 0, \quad P_1 = P_0 \left(\frac{r_1^0}{r_0^0} \right)^g, \quad (1)$$

где r_1^0, P_1, V_1 - истинная плотность, давление и скорость газа в этой области; P_0, r_0^0 - соответствующие параметры при нормальных условиях. Путем линеаризации этих уравнений получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}, \quad (2)$$

a_0 - скорость звука в воздухе.

Его решение имеет вид

$$V_1 = f_1(x - a_0 t) + f_2(x + a_0 t). \quad (3)$$

Из условия $x = V_0 t$ получим, что $V_1 = V_0$ (когда частицы находятся на поршне, который движется с постоянной скоростью V_0) решение (3) запишется таким образом:

$$V_1 = f_1(x - a_0 t) + V_0 - f_1[-b(x + a_0 t)], \quad (4)$$

где $b = \frac{a_0 - V_0}{a_0 + V_0}$, $b < 1$.

Функция V_1 определяется из решения задачи в области 2 (где параметрам газа припишем индекс 2). В области 2 имеем

$$\left. \begin{aligned} r_2 \frac{\partial V_2}{\partial t} &= -f_0 \frac{\partial P}{\partial x} - kV_2, \\ \frac{\partial r_2}{\partial t} + r_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} &= 0, \\ P_2 &= P_0 \left(\frac{r_2^0}{r_0^0} \right)^g, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где k - коэффициент взаимодействия, $r_2 = f_0 r_2^0$ - плотность газа; V_2 - скорость газа во второй области.

После линеаризации этой системы получим

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} - K_1 \frac{\partial V_2}{\partial t}, \quad K_1 = \frac{K}{r_2}. \quad (6)$$

Начальные условия – нулевые:

$$V_2(x, t)_{t=0} = \frac{\partial V_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

Применив преобразования Лапласа к уравнению (6), найдем

$$\bar{V}_2 \bullet = \bullet P \int_0^\infty V_2(x, t) e^{-Pt} \cdot dt, \quad (8)$$

после чего получим

$$P^2 \bar{V}_2 = a_0^2 \frac{d^2 \bar{V}}{dx^2} - K_1 P \bar{V}_2, \quad (9)$$

где a_0 - скорость звука в двухфазной среде [2]; P - параметр преобразования.

Общее решение уравнения (9) имеет вид

$$\bar{V}_2(P, x) = C_1(P) e^{x \left(\frac{P^2 + K_1 P}{a_0^2} \right)^{0.5}}, \quad x < 0. \quad (10)$$

На границе перехода из области 2 в область 1 ($x = 0$) необходимо ввести в рассмотрение поверхность разрыва параметров течения, по обе стороны от которой выполняются уравнения непрерывного движения. Запишем соотношения на разрыве:

$$\begin{aligned} r_1^0 V_1 &= f_0 r_2^0 V_2; \\ r_1^0 V_1 (V_1 - V_2) &= f_0 P_2 - P_1 - P'; \\ r_1^0 V_1 \left[\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + \frac{1}{g-1} \left(\frac{P_1}{r_1^0} - \frac{P_2}{r_2^0} \right) \right] &= f_0 P_2 V_2 - P_1 V_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Реакция P' выразится в следующем виде:

$$P' = (1 - f_0)(P_2 - P_1).$$

Примем на границе ($x = 0$) $P_1 = P_2$. Тогда из соотношения (11) определим связь параметров течения газа, т.е. граничные условия

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{cf_0 + 1}{f_0 + c}, \quad c = \frac{g+1}{g-1}. \quad (12)$$

Из второго уравнения системы имеем

$$\frac{r_2^0}{r_1^0} = \frac{V_1}{f_0 V_2} = \frac{cf_0 + 1}{f_0(f_0 + c)}.$$

Действительно, если имеем однофазное течение ($f_0 = 1$), то

$$V_1 = V_2, \quad r_2^0 = r_1^0.$$

Из этих граничных выражений после их линеаризации получим

$$\frac{\partial \tilde{V}_1^1}{\partial x} = \frac{cf_0 + 1}{f_0 + c} \cdot \frac{\partial \tilde{V}_2^1}{\partial x}. \quad (13)$$

Из решения (4) волнового уравнения для области 1 и из (10) для второй области при $x = 0$ находим

$$V_I = f_1(-a_0 t) + V_0 - f_1(-b a_0 t), V_2 = C_1(P);$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} = C_1(P) \frac{P}{a_0 V_0} \left(1 + \frac{K_1}{P}\right)^{0.5}, \frac{\partial V_I}{\partial x} = \frac{f_1'(-a_0 t) + b f_1'(-a_0 b t)}{V_0}.$$

Применив к последнему выражению также преобразование Лапласа, имеем

$$\frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x} = \left\{ -\frac{P}{a_0} \left[F_1\left(\frac{P}{-a}\right) - f_{1(0)} \right] + \frac{P}{a_0} \left[F_1\left(\frac{P}{-a_0 b}\right) - f_{1(0)} \right] \right\} V_0^{-1}.$$

Исходя из граничных условий (12) и соотношения (13), получим

$$C_1(P) = \left[V_0 + F_1\left(\frac{P}{-a_0}\right) - F_1\left(\frac{P}{-b a_0}\right) \right] \frac{(f_0 + c)}{(1 + c f_0)}. \quad (14)$$

С учетом выражения (13) получим

$$C_1(P) = \frac{(c + f_0) \left[2f_{1(0)} - F_1\left(\frac{P}{-a_0}\right) - F_1\left(\frac{P}{-b a_0}\right) \right]}{(c f_0 + 1) \left(1 + \frac{K_1}{P}\right)^{0.5}}. \quad (15)$$

Выражение в знаменателе представим в виде ряда и, приравнявая (14) и (15), получим

$$A_1 + A_2 F_1\left(\frac{P}{-a_0}\right) + A_3 F_1\left(\frac{P}{-b a_0}\right) = A_4 \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \times \frac{K_1^m}{P^m} \left[V_0 + F_1\left(\frac{P}{-a_0}\right) - F_1\left(\frac{P}{-b a_0}\right) \right], \quad (16)$$

где $A_1 = V_0 - 2f_{1(0)}$, $A_2 = 2$, $A_3 = 0$, $A_4 = -1$.

В последнем равенстве переходим к оригиналам, которые выразим в виде степенных рядов:

$$f_1(-a_0 t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_0^n b_n t^n, f_1(-a_0 b t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b^n a_0^n b_n t^n. \quad (17)$$

После этого получим

$$A_1 + A_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_0^n b_n t^n + A_3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b^n a_0^n b_n t^n = A_4 V_0 \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \frac{K_1^m}{m!} t^m +$$

$$+ A_4 \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} K_1^m \frac{F_1\left(\frac{P}{-a_0}\right)}{P^m} - A_4 \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} K_1^m \frac{F_1\left(\frac{P}{-b a_0}\right)}{P^m}. \quad (18)$$

Вычислим m -кратный интеграл от t^v в пределах от 0 до t :

$$\int_{0(1)}^t t^n dt = \frac{1}{(n+1)} t^{n+1}; \quad \int_{0(2)}^t \frac{1}{(n+1)} t^{n+1} dt = \frac{1}{(n+1)(n+2)} t^{n+2};$$

$$\int_{0(3)}^t \frac{1}{(n+1)(n+2)} t^{n+2} dt = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} t^{n+3}; \quad \int_{0(1)}^t dt \dots \int_{0(m)}^t t^n dt = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)} t^{n+m} = a_{nm} t^{n+m}.$$

С учетом полученного правая часть (18) при переходе к оригиналам дает выражение

$$A_1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^n a_0^n (A_2 + A_3 b^n) b_n t^n = A_4 V_0 \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \frac{K_1^m}{m!} +$$

$$+ A_4 \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} K_1^m \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n b_n a_{nm} t^{n+m} (1 - b^n). \quad (19)$$

Из этого равенства определим коэффициенты b_n , а затем скорости частиц в областях 1 и 2. В частности, если возьмем в этих рядах два первых члена, то получим

$$A_1 V_0 + b_0 (A_2 + A_3) = 0, b_0 = -\frac{A_1 V_0}{A_2 + A_3} = -\frac{V_0^2}{2}, -a_0 b_1 (A_2 + b \cdot A_3) = A_4 V_0 \frac{K_1}{2},$$

$$b_1 = -\frac{A_4 V_0 K_1}{2 a_0 (A_2 + b \cdot A_3)} = \frac{V_0 K_1}{4 a_0}, b_1 > 0.$$

Тогда скорость частиц газа выразится так:

$$V_1 = V_0 \left\{ 1 - \frac{K_1}{4} \left[(1-b)t - (1+b) \frac{x}{a_0} \right] \right\}, x > 0. \quad (20)$$

На поверхности поршня $x = V_0 t$ получаем равенство $\left[(1-b)t - (1+b) \frac{V_0}{a_0} t \right] = 0$,

из которого следует, что скорость частиц газа V_1 равна скорости поршня V_0 , т.е. $V_1 = V_0$.

Для скорости частиц во второй области получим

$$\begin{aligned} \bar{V}_2 &= e^{\frac{x(2P+K_1)}{2a_0}} \left[V_0 + F_1 \left(\frac{P}{-a_0} \right) - F_1 \left(\frac{P}{-ba_0} \right) \right] \frac{(f_0 + c)}{(cf_0 + 1)} = \\ &= \frac{(f_0 + c)}{(cf_0 + 1)} e^{\frac{K_1 x}{2a_0}} \left[V_0 e^{-\frac{P|x|}{a_0}} + F_1 \left(-\frac{P}{a_0} \right) e^{-\frac{P|x|}{a_0}} - F_1 \left(\frac{P}{-ba_0} \right) e^{-\frac{P|x|}{a_0}} \right]. \end{aligned}$$

Переходя к оригиналам, найдем выражение для скорости V_2 при $|x| \cdot a_0^{-1} < t$:

$$V_2 = \frac{(f_0 + c)}{(cf_0 + 1)} e^{\frac{K_1 x}{2a_0}} \{ V_0 + f_1(x - a_0 t) - f_1[-b(x + a_0 t)] \}.$$

Выражение в фигурных скобках дает V_1 , тогда последнее равенство запишется в виде

$$V_2 = \frac{(f_0 + c)}{(cf_0 + 1)} V_1 e^{\frac{K_1 x}{2a_0}} \text{ при } x < 0. \quad (21)$$

Формула (21) дает аналитическое выражение для скорости истечения газа во второй области.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рахматулин Х.А. Газовая и волновая динамика. М.: МГУ, 1983. 280 с.
2. Кубанова А. К. О распространении одномерной плоской волны в двухфазной среде // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: ЕГУ, 1987.

Поступила 10.05.2003 г.