Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Х. Алтынбаев, Численное интегрирование уравнений движения небесных объектов методом Тейлора с использованием банка данных координат и скоростей больших планет, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 42–47

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:20:48

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ОБЪЕКТОВ МЕТОДОМ ТЕЙЛОРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАНКА ДАННЫХ КООРДИНАТ И СКОРОСТЕЙ БОЛЬШИХ ПЛАНЕТ

Разработан алгоритм и составлены программы численного интегрирования уравнений движения небесных объектов методом Тейлора. Создан банк данных координат и скоростей больших планет. На основе полученного банка данных изучено движение потока Квадрантид, комет Биелы, Грига – Шеллерупа и проведен сравнительный анализ с результатами исследований, полученными другими численными методами.

Раздел теоретической астрономии, изучающий движение небесных тел, можно считать основным разделом астрономических наук, поскольку познание движения небесных тел является фундаментом познания космоса. Это изучение началось с открытия различного рода периодичностей в видимом движении небесных тел. После открытия закона всемирного тяготения и выявления его доминирующего значения основной задачей, ставившейся перед астрономической дисциплиной, стал вывод всех следствий этого закона.

Основным содержанием небесной механики является задача n -тел, т.е. изучение движения n материальных точек, притягивающихся друг к другу по закону Ньютона. Эта задача полностью решена только в случае $n=2$. При $n \geq 3$ задача точного аналитического решения не имеет [1]. Задача трёх и более тел аналитическими методами решается путём разложения в степенные ряды по малым параметрам элементов орбит (эксцентриситет, наклонение). Однако это не представляет движение с необходимой точностью на интервалах времени более ста лет.

Целью данной работы является численное интегрирование уравнений движения малых тел Солнечной системы под действием сил притяжения со стороны больших планет методом Тейлора.

Для этого предстояло решить ряд задач.

1. Разработать алгоритм и составить программу численного интегрирования уравнений движения больших планет.
2. Создать банк данных координат и скоростей больших планет.
3. На основе полученного банка данных разработать программу численного интегрирования уравнений движений малых тел Солнечной системы.

Интегрирование уравнений движения возмущаемого тела методом Тейлора. Уравнения движения возмущаемого тела в прямоугольных координатах с началом в центре Солнца могут быть приведены к одному уравнению матричного вида:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{X}{r^3} + \sum_i k^2 m_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i^3} - \frac{X_i}{r_i^3} \right), \quad (1)$$

где X – матрица-столбец с элементами x, y, z ; X_i – матрица столбец с элементами x_i, y_i, z_i ; m, x, y, z – масса и гелиоцентрические координаты возмущаемого тела; m_i, x_i, y_i, z_i – массы и гелиоцентрические координаты больших планет; r, Δ_i, r_i – расстояния, вычисляемые по формулам $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $\Delta_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$; $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$.

Решение уравнений (1) в точке $X(t_0+t)$, если оно известно в точке $X(t_0)$, методом Тейлора находится по формулам

$$X(t_0+t) = X(t_0) + \frac{dX(t_0)}{dt}t + \frac{1}{2} \frac{d^2 X(t_0)}{dt^2}t^2 + \mathbf{K}, \quad (2)$$

$$\frac{dX(t_0+t)}{dt} = \frac{dX(t_0)}{dt} + \frac{d^2 X(t_0)}{dt^2}t + \frac{1}{2} \frac{d^3 X(t_0)}{dt^3}t^2 + \mathbf{K}. \quad (3)$$

В предлагаемом алгоритме получены общие формулы для нахождения производных от степенной функции. Это позволяет строить решения численным методом путем разложения в ряды Тейлора для обширного класса дифференциальных уравнений вида $\frac{dX}{dt} = f(X)$, где $f(X)$ – матрица-столбец из рациональной функции [2-8].

Полагая в уравнении (1)

$$\frac{1}{r^3} = R, \quad \frac{1}{\Delta_i^3} = S_i, \quad \frac{1}{r_i^3} = R_i, \quad -k^2(1+m) = A, \quad k^2 m_i = B_i, \quad (4)$$

запишем его в виде:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = AXR + \sum_i B_i ((X_i - X)S_i - X_i R_i). \quad (5)$$

Дифференцируя соотношение (5), выражение для производных можно записать в виде

$$\frac{d^{n+2} X}{dt^{n+2}} = A \frac{d^n (XR)}{dt^n} + \sum_i B_i \left(\frac{d^n (X_i - X)S_i}{dt^n} - \frac{d^n (X_i R_i)}{dt^n} \right) \quad (6)$$

или, применяя формулу Лейбница, будем иметь:

$$\frac{d^{n+2} X}{dt^{n+2}} = A \sum_{j=0}^n C_n^j \frac{d^{n-j} X}{dt^{n-j}} \frac{d^j R}{dt^j} + \sum_i B_i \left(\sum_{j=0}^n C_n^j \frac{d^{n-j} (X_i - X)}{dt^{n-j}} \frac{d^j S}{dt^j} - \sum_{j=0}^n C_n^j \frac{d^{n-j} X}{dt^{n-j}} \frac{d^j R_i}{dt^j} \right). \quad (7)$$

В силу соотношений (4) R , S_i и R_i являются степенными функциями вида P^m , где P^m – матрица-столбец с элементами $(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$, $((x_i-x)^2+(y_i-y)^2+(z_i-z)^2)^{-3/2}$, $(x_i^2+y_i^2+z_i^2)^{-3/2}$, $m=-3/2$.

Для нахождения производных по формулам (7) необходимо уметь вычислять производные $\frac{d^n P^m}{dt^n}$. Для их вычисления получены следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{d^i P^m}{dt^i} = m P^{m-1} \frac{d^i P}{dt^i} + m(m-1) P^{m-2} F_{i-1,2} + m(m-1)(m-2) P^{m-3} F_{i-2,3} + \dots + \\ + m(m-1)(m-2)\dots(m-i+1) P^{m-i} \left(\frac{dP}{dt} \right)^i, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\frac{dP}{dt} = F_{1,1}$; $\frac{d^2 P}{dt^2} = F_{2,1}$, ..., $\frac{d^n P}{dt^n} = F_{n,1}$.

Запишем подробно несколько уравнений формулы (8):

$$\begin{aligned} \frac{dP^m}{dt} &= m P^{m-1} F_{1,1}; \\ \frac{d^2 P^m}{dt^2} &= m(m-1) P^{m-2} F_{1,2} + m P^{m-1} F_{2,1}; \\ \frac{d^3 P^m}{dt^3} &= m(m-1)(m-2) P^{m-3} F_{1,3} + m(m-1) P^{m-2} F_{2,2} + m F_{3,1}; \\ \frac{d^4 P^m}{dt^4} &= m(m-1)(m-2)(m-3) P^{m-4} F_{1,4} + m(m-1)(m-2) P^{m-3} F_{2,3} + \\ &+ m(m-1) F_{3,2} + m F_{4,1} \end{aligned} \quad (9)$$

и выпишем элементы $F_{i,j}$ и их значения в виде матрицы

$$\begin{bmatrix} F_{1,1} \\ F_{2,1} = \frac{dF_{1,1}}{dt} & F_{1,2} = F_{1,1} \cdot F_{1,1} & F_{1,3} = F_{1,2} \cdot F_{1,1} & F_{1,4} = F_{1,3} \cdot F_{1,1} \\ F_{3,1} = \frac{dF_{2,1}}{dt} & F_{2,2} = \frac{dF_{1,2}}{dt} + F_{2,1} \cdot F_{1,1} & F_{2,3} = \frac{dF_{1,3}}{dt} + F_{2,2} \cdot F_{1,1} & \\ F_{4,1} = \frac{dF_{3,1}}{dt} & F_{3,2} = \frac{dF_{2,2}}{dt} + F_{3,1} \cdot F_{1,1} & & \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Как видим, каждая из производных от степенной функции – это сумма элементов матрицы (10), расположенных на диагоналях, направленных из нижнего левого в правый верхний угол, умноженных на соответствующие коэффициенты.

Для вычисления первой производной необходимо знать только значение элемента $F_{1,1}$. Для второй производной – $F_{2,1}$ и $F_{1,2}$. Для третьей – $F_{3,1}$, $F_{2,2}$ и $F_{1,3}$ и т.д. Для вычисления значений производных более высокого порядка необходимо знать значения элементов последующих диагоналей, а их значения выражаются через производные от элементов предыдущих диагоналей. Таким образом, задачу можно считать решенной, если мы сможем вычислить производную любого порядка от элемента $F_{1,1}$.

Введем обозначение

$$\frac{d^n F_{k,m}}{dt^n} = F_{k,m}^n. \quad (11)$$

Тогда, в силу новых обозначений, общая формула для вычисления значений (10) будет выглядеть следующим образом:

$$F_{k,m}^n = F_{k-1,m}^{n+1} + \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot (F_{k,m-1}^{n-i} \cdot F_{1,1}^i). \quad (12)$$

Для крайнего левого столбца и верхней строки матрицы (10) формула для вычисления значений (12) принимает несколько упрощенный вид:

$$F_{k,1}^n = F_{k-1,1}^{n+1}, \quad (13)$$

$$F_{1,m}^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot (F_{1,1}^{n-i} \cdot F_{1,m-1}^i). \quad (14)$$

Для вычисления производной любого порядка от $F_{1,1}$ можно воспользоваться формулой Лейбница:

$$F_{1,1}^{n-1} = \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{d^{n-i} x}{dt^{n-i}} \frac{d^i x}{dt^i} + \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{d^{n-i} y}{dt^{n-i}} \frac{d^i y}{dt^i} + \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{d^{n-i} z}{dt^{n-i}} \frac{d^i z}{dt^i}. \quad (15)$$

Таким образом, процесс вычисления координат и скоростей возмущаемого тела осуществляется следующим способом. По формуле (7), используя (8)–(15), вычисляются значения производных от координат возмущаемого тела и планет. Подставляя значения производных в соотношения (2) и (3), находятся координаты и скорости возмущаемого тела на следующем шаге.

Программа численного интегрирования уравнений движения больших планет методом Тейлора и создание банка данных координат и скоростей планет. По алгоритму, описанному выше, была написана программа на языке C++ для численного интегрирования уравнений движения больших планет с учетом удержания необходимого числа производных. Координаты и скорости планет записывались в файл, т.е. создавался так называемый банк данных координат и скоростей больших планет для его дальнейшего эффективного использования при изучении эволюции орбит малых тел Солнечной системы.

При создании банка данных за исходные значения были взяты гелиоцентрические координаты на 2433280.5 юлианскую дату или 0 янв.1950 г. по григорианскому календарю из [9]. Интегрирование велось с шагом 0.5 дня (с удержанием девяти производных) на интервале 1000 лет в прямом и 1000 лет в обратном направлениях. Значения координат и скоростей планет через каждые 10 дней записывались в файл. Таким образом, был получен банк данных на интервале времени с 950 по 2950 г.г.

Разработка программы численного интегрирования уравнений движения небесных объектов с использованием банка данных координат и скоростей больших планет. При изучении уравнений движения малых тел Солнечной системы описанный выше алгоритм численного интегрирования уравнений движения возмущаемого тела несколько упрощается.

Так как в данной работе рассматривается движение комет, астероидов и других небесных тел, массы которых значительно меньше массы Солнца и планет, массой возмущаемого тела можно пренебречь. Поэтому формула (1) примет вид

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -k^2 \frac{X}{r^3} + \sum_i k^2 m_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i^3} - \frac{X_i}{r_i^3} \right). \quad (16)$$

Значения производных от степенных функций $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{\Delta_i^3}$, $\frac{1}{r_i^3}$ вычисляются по формулам (8) – (15), а значения X_i для каждой из планет выбираются из заранее созданного банка данных координат и скоростей.

При обращении к банку данных на заданный момент времени отыскивались два значения координаты и скорости $X_{i,1}$, $X_{i,2}$ и $\dot{X}_{i,1}$, $\dot{X}_{i,2}$, между которыми заключены точные величины. Назовём этот отрезок уточняемым отрезком. Причём выборка производилась таким образом, что записанные значения $X_{i,1}$ и $\dot{X}_{i,1}$ левого конца отрезка относятся к более раннему моменту времени, чем значения правого конца $X_{i,2}$ и $\dot{X}_{i,2}$. В силу особенности организации банка данных длина уточняемого отрезка была равной десяти дням.

Для правого и левого концов отрезка значения координаты и скорости известны. По формулам

$$\frac{d^2 X_i}{dt^2} = -k^2(1-m_i) \frac{X_i}{r^3} + \sum_{j \neq i} k^2 m_j \left(\frac{X_j - X_i}{\Delta_j^3} - \frac{X_j}{r_j^3} \right) (i = 1..9), \quad (17)$$

вычислялись значения второй производной, а затем по формулам (2) и (3) находились два приближенных значения для координат ($X_{i,1}$ и $X_{i,2}$) и скорости ($\dot{X}_{i,1}$ и $\dot{X}_{i,2}$) для каждой их планет с удержанием в разложении двух и трёх слагаемых для скорости и координат соответственно.

По формулам

$$X_i = X_{i,1} + (X_{i,2} - X_{i,1}) \cdot \frac{\Delta t}{10}; \quad (18)$$

$$\dot{X}_i = \dot{X}_{i,1} + (\dot{X}_{i,2} - \dot{X}_{i,1}) \cdot \frac{\Delta t}{10} (i = 1..9) \quad (19)$$

получались матрицы – столбцы с окончательными уточненными значениями координат и скоростей планет. Здесь Δt – разница между интересующим нас моментом временем и временем, к которому относятся запись значений левого конца уточняемого отрезка.

По описанному алгоритму была создана программа на C++, позволяющая производить вычисления с любым заданным шагом интегрирования с удержанием заданного числа производных.

Исследование движения небесных тел с помощью программы численного интегрирования уравнений движения малых тел Солнечной системы. С помощью созданной программы, были проведены исследования движения малых тел Солнечной системы. В качестве объектов исследования были выбраны: движения потока Квадрантид, комет Биелы и Грига-Шеллерупа. Следует отметить, что в данном исследовании рассматривались только гравитационные силы. На кометы же и другие «легкие» тела Солнечной системы помимо гравитационных эффектов действуют и негравитационные эффекты, которые особенно сильно проявляются при приближении к Солнцу [1,10]. Поэтому в отношении комет результаты численных исследований, основанные только на гравитационном воздействии, не всегда имеют хорошее сопоставление с наблюдаемыми значениями.

При изучении движения потока Квадрантид начальные данные были взяты на 1950/01/3.0 число из [11]. Интегрирование велось на интервале 25 лет с шагом 0.25 дня с удержанием девяти производных. Результаты интегрирования также сопоставлялись с данными [11] и приведены в таблице, где T – время в календарной дате; M – средняя аномалия; ω – аргумент перигелия; Ω – долгота восходящего узла; i – наклон орбиты, e и a – эксцентриситет и большая полуось астероида. В первой строке каждой записи приведены значения [11], вторая строка получена решением уравнений движения методом Тейлора.

Погрешность, как и следовало ожидать, растет с увеличением промежутка интегрирования и на момент окончания исследования для средней аномалии результаты сравнения отличались на 2' (минут дуги), а для аргумента перигелия – 2'' (секунд дуги). Все остальные элементы орбит получены с точностью до секунды. В данном случае расхождение результатов сравнения связано с тем, что исследования проводились разными численными методами. Так, в [11] проводилось интегрирование методом Эверхарда с порядком точности, равным семи. Вторая причина – малая точность задания начальных параметров. В целом же результаты интегрирования можно считать вполне удовлетворительными.

Начальные данные при исследовании движения кометы Биелы были взяты на 1872/09/28.85 дату по григорианскому календарю из кометного каталога Марсдена [12]. Здесь интегрирование проводилось на интервале 160 лет с шагом 0.5 дня. Результаты интегрирования, в сопоставлении с работой [11], приведены в таблице. На момент окончания исследования максимальное расхождение результатов в сравнении с [11] составило для средней аномалии 21'', для аргумента перигелия – 1.1', для долготы узла – 4.3', наклон орбиты получен с точностью 2.3'.

Несмотря на большой интервал исследования, результаты позволяют получить с удовлетворительной точностью картину поведения эволюции орбиты кометы. Основной же причиной расхождения результатов сравнения является игнорирование действия упомянутых выше негравитационных эффектов и различие точности методов интегрирования.

При исследовании движения кометы Грига-Шеллерупа начальные данные были взяты так же из каталога Марсдена [12] на 1987/06/14.0 число. Интегрирование велось на интервале 40 лет с величиной шага 0.5 дня. Результаты интегрирования в сопоставлении с [11] приведены в таб-

лице. Максимальное расхождение сравнения составило для средней аномалии 2', для аргумента перигелия – 9'', для долготы узла – 5'', наклон орбиты получен с точностью до 12''.

Результаты исследования эволюции орбит потока Квадрантид, комет Биелы и Григга-Шеллерупа

T	M	ω	Ω	i	e	a
Поток Квадрантид						
1950.0103000	0.0000	171.1000	282.5000	71.6000	0.67200	2.982
1955.01031250	349.8412	171.1179	282.4818	71.6788	0.67219	2.979
1955.01031250	349.8490	171.1184	282.4816	71.6788	0.67219	2.979
1960.01034250	339.9824	171.1125	282.5023	71.6455	0.67207	2.980
1960.01034250	339.9920	171.1113	282.5022	71.6460	0.67207	2.980
1965.01026375	330.0801	171.0987	282.5280	71.6496	0.67155	2.980
1965.01026375	330.0926	171.0994	282.5278	71.6504	0.67155	2.980
1970.01028500	319.7045	171.1404	282.5249	71.5934	0.67119	2.982
1970.01028500	319.7531	171.1410	282.5248	71.5942	0.67120	2.982
1975.01030625	308.3523	171.2216	282.4796	71.3503	0.66428	2.997
1975.01030625	308.3894	171.2225	282.4800	71.3520	0.66433	2.996
Biela						
1872.09288500	359.76602	223.8883	246.9690	12.3756	0.75380	3.543
1892.09287000	4.49237	228.3159	241.8325	11.8566	0.75691	3.536
1892.09287000	4.52968	228.3115	241.8364	11.8567	0.75691	3.536
1912.09295500	11.91224	235.1712	233.7752	9.7508	0.76310	3.529
1912.09295500	11.83108	235.1899	233.7591	9.7445	0.76308	3.529
1932.09294000	16.79601	235.5304	233.5657	9.7102	0.76359	3.526
1932.09294000	16.55263	235.5481	233.5500	9.7042	0.76358	3.527
1952.09292500	33.28556	241.3643	226.9981	9.3664	0.76745	3.514
1952.09292500	33.01097	241.3760	226.9913	9.3606	0.76748	3.514
1972.09291000	38.76373	255.1611	212.8621	7.5898	0.76599	3.546
1972.09291000	38.01966	255.1540	212.9138	7.5875	0.76569	3.547
1992.09289500	38.26179	255.6467	212.4681	7.5790	0.76715	3.536
1992.09289500	37.07598	255.6538	212.5075	7.5789	0.76689	3.537
2012.09288000	57.57634	266.2501	201.3549	7.6839	0.77386	3.501
2012.09288000	56.68220	266.7358	200.9166	7.7006	0.77376	3.499
2032.09286500	60.25990	276.8827	191.2563	7.2164	0.76588	3.558
2032.09286500	60.25402	276.8632	191.3324	7.2592	0.76576	3.556
Grigg-Skjellerup						
1987.06140000	359.21795	359.3165	212.6268	21.1057	0.66471	2.963
2007.06138500	307.31366	1.7089	211.0055	22.3622	0.63308	3.044
2007.06138500	307.33853	1.7074	211.0380	22.3656	0.63307	3.043
2027.06137000	238.56826	2.1184	210.8236	22.4679	0.64133	3.013
2027.06137000	238.60253	2.1159	210.8222	22.4714	0.64132	3.013

Проведённые исследования показывают вполне удовлетворительное соответствие результатов, полученных двумя различными методами.

Автор работы выражает благодарность за постоянное содействие и предоставление справочных материалов профессору Заусаеву А. Ф.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
2. Бордовитина Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
3. Чеботарев Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики. М.: Наука, 1965. 367 с.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы М.: Наука, 631 с.
5. Самарский А.А., Гумин А.В. Численные методы М.: Наука, 1989. 430 с.
6. Холл Дж Уатт. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
7. Заусаев А.Ф. Интегрирование уравнений движения возмущаемого тела методом Тейлора. М., 1987. Деп. ВИНТИ, редкол. журн. Кинематика и физика небесных тел. 16.11.87. Киев, АН УССР. № 8028 – В 87.
8. Заусаев А.Ф. Численное интегрирование уравнений движения возмущаемого тела методом Тейлора// Бюл. Ин-та астрофиз. АН Тадж. ССР. №77. С. 24-28

9. Абалакин В.К. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1971. 862 с.
10. Сюняев Р. А. и др. Физика космоса: Маленькая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1986. 783 с.
11. Заусаева А.Ф. Исследование эволюции орбит малых тел Солнечной системы, сближающихся с Землёй: Дис. ... до-ра физ. – мат. наук. М.: МГУ, 1994. 329 с.
12. Marsden B.G. Catalogue of cometary orbits. Fifth Edition. Cambridge, Mass: Intern. astronomical union, 1986. 102 p.

Поступила 12.03.2003 г.