Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Логунов, О проективных инвариантах плоских кривых третьего порядка,
Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2003, выпуск 19, 48–52

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:49:02

Алгебра

УДК 514.743.28

И.С. Логунов

О ПРОЕКТИВНЫХ ИНВАРИАНТАХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Приведён способ вычисления проективных инвариантов плоских кривых третьего порядка средствами теории представлений полупростых групп Ли и алгебр Ли с использованием принципа включения.

Уравнение кривой 3-го порядка на проективной плоскости CP^2 имеет вид

$$F(X, Y, Z) = 0, \quad (1)$$

где F - многочлен 3-й степени от переменных X, Y, Z .

Если систему координат на CP^2 изменить с помощью квадратной матрицы A третьего порядка с $\det A = 1$, т. е. положить

$$\begin{cases} X = a_{11}X' + a_{12}Y' + a_{13}Z'; \\ Y = a_{21}X' + a_{22}Y' + a_{23}Z'; \\ Z = a_{31}X' + a_{32}Y' + a_{33}Z'; \end{cases}$$

то уравнение (1) в новых координатах примет вид

$$F'(X', Y', Z') = 0.$$

Это означает, что в пространстве L многочленов 3-й степени от трёх переменных действует унимодулярная группа $SL(3, C)$, переводящая полином F в полином F' . Другими словами, в десятимерном пространстве L задано представление Φ группы Ли $SL(3, C)$, а также соответствующей алгебры Ли $sl(3, C)$.

Проективными инвариантами кривой с уравнением (1) называются инварианты представления Φ , т. е. функции от координат векторов из L , не изменяющие своих значений, когда $l \in L$, переходит в $\Phi(g) \bullet l \in L$ для $\forall g \in SL(3, C)$.

Известно, что инвариант $I(l)$, $l \in L$ определяет поверхность уровня с уравнением

$$I(l) = c \text{ (const)}, \quad l \in L.$$

Инварианты представления Φ можно вычислять с помощью принципа включения [2], состоящего в следующем.

Пусть $G \supset H$ - линейные (матричные) алгебра Ли и её подалгебра и пусть имеет место разложение

$$G = H + B, \quad (2)$$

где H и B - пространства, инвариантные относительно присоединённого представления Ad_H , действующего по формуле

$$Ad_H u = [x, u] = xu - ux, \quad \forall x, u \in G,$$

причём представление Ad_H на B эквивалентно представлению Φ , но не совпадает с ним. Тогда функции

$$f_k = Sp b^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

где $b \in B$ являются инвариантами представления Φ . Иногда в виде (3) можно предъявить всякий инвариант.

В рассматриваемом случае представление Φ в десятимерном пространстве полиномов 3-й степени от трёх переменных задаётся старшим вектором со схемой Е.Б. Дынкина $\overset{3}{o-a} - \overset{3}{o-b}$, где a, b - простые корни; 3 - числовая отметка, соответствующая простому корню b .

Примем во внимание, что в алгебре Ли $G = so(8, C)$ есть подалгебра H , вложенная в G посредством представления $\overset{1}{o} - \overset{1}{o} = \Psi$, а также

$$G = H + B_1 + B_2, \quad (4)$$

где H, B_1, B_2 - инвариантные подпространства и Ad_H на B_1 и B_2 задаётся соответственно старшими весами вида $\overset{3}{o} - \overset{3}{o}$ и $\overset{3}{o} - \overset{3}{o}$.

Если вычислить в явном виде пространства B_1 и B_2 внутри G , то формула (3) определит инварианты для представления $\overset{3}{o} - \overset{3}{o} = \Phi$, т. е. проективные инварианты плоской кривой 3-го порядка. Можно доказать, что существует точно два функционально независимых инварианта представления $\overset{3}{o} - \overset{3}{o}$ степеней 6 и 4 соответственно.

В работе [1] показано, что орбита наибольшей размерности для представления Φ восьмимерна. Поскольку всякая орбита целиком принадлежит поверхности уровня $I(l) = c$ ($const$), $l \in L$ при надлежащем выборе константы c и произвольном инварианте I , то существует ровно два функционально независимых инварианта представления Φ . Нетрудно выяснить, что таковыми являются

$$f_6 = Sp b^6 \text{ и } f_4 = Sp b^4, \quad b \in B_1. \quad (5)$$

Вычисление пространств B_1 и B_2 средствами теории представлений приводится ниже.

Система всех весов представления $\Psi = \overset{1}{o} - \overset{1}{o}$ имеет вид

$$\begin{array}{cc} \overset{1}{o} - \overset{1}{o} & \\ \overset{1}{o} - \overset{1}{o} & \\ \overset{-1}{o} - \overset{2}{o} & \overset{2}{o} - \overset{-1}{o} \\ & \overset{0}{o} - \overset{0}{o} \\ \overset{-2}{o} - \overset{1}{o} & \overset{1}{o} - \overset{-2}{o} \\ \overset{-1}{o} - \overset{-1}{o} & \end{array} \quad (6)$$

Можно считать, что базис в пространстве этого представления составляют векторы:

$$\begin{array}{cc} x & \\ E_{-a}x & E_{-b}x \\ E_{-b}E_{-a}x & E_{-a}E_{-b}x \\ E_{-a}E_{-b}E_{-a}x & \end{array}, \quad (7)$$

где x - старший вектор, являющийся также и крайним: $E_a x = 0$, $E_b x = 0$. Имеют место формулы

$$\begin{aligned} E_{-a}E_{-b}E_{-a}x &= \frac{1}{2}E_{-a}E_{-a}E_{-b}x; \\ E_{-b}E_{-a}E_{-b}x &= \frac{1}{2}E_{-b}E_{-b}E_{-a}x; \\ E_{-a}E_{-b}E_{-b}E_{-a}x &= 2E_{-a}E_{-b}E_{-a}E_{-b}x. \end{aligned} \quad (8)$$

Представление Ad_H на B_1 входит в разложение тензорного произведения $\Psi \otimes \Psi = \overset{1}{o} - \overset{1}{o} \otimes \overset{1}{o} - \overset{1}{o}$ и порождается старшим вектором вида $q = E_{-a}x \otimes x - x \otimes E_{-a}x$.

Действительно,

$$E_a q = E_a(E_{-a}x \otimes x - x \otimes E_{-a}x) = E_a E_{-a}x \otimes x + E_{-a}x \otimes E_a x - E_a x \otimes E_{-a}x - x \otimes E_a E_{-a}x =$$

$$= (E_{-a}E_a + H_a)x \otimes x - x \otimes (E_{-a}E_a + H_a)x = (a, \Lambda)x \otimes x - x \otimes (a, \Lambda)x = 0,$$

так как $E_ax = 0$ (x - крайний вектор), $H_ax = (a, \Lambda)x$, $a = (2; -1)$, $\Lambda = (1; 1)$.

Совершенно аналогично устанавливается, что $E_bq = 0$. Таким образом, вектор $q = E_{-a}x \otimes x - x \otimes E_{-a}x$ порождает пространство представления Ad_H на B_1 . Остальные векторы в этом пространстве имеют вид

$$\begin{aligned} & E_{-b}q, E_{-b}E_{-b}q; E_{-b}E_{-b}E_{-b}q; E_{-a}E_{-b}q; E_{-a}E_{-b}E_{-b}q, E_{-a}E_{-b}E_{-b}E_{-b}q; \\ & E_{-a}E_{-a}E_{-b}E_{-b}q; E_{-a}E_{-a}E_{-b}E_{-b}E_{-b}q; E_{-a}E_{-a}E_{-a}E_{-b}E_{-b}E_{-b}q. \end{aligned} \quad (9)$$

Вычисления показывают:

1. $q = E_{-a}x \otimes x - x \otimes E_{-a}x$;
2. $E_{-b}q = E_{-b}E_{-a}x \otimes x - x \otimes E_{-b}E_{-a}x + E_{-a}x \otimes E_{-b}x - E_{-b}x \otimes E_{-a}x$;
3. $E_{-b}E_{-b}q = E_{-b}E_{-b}E_{-a}x \otimes x - x \otimes E_{-b}E_{-b}E_{-a}x + 2E_{-b}E_{-a}x \otimes E_{-b}x - 2E_{-b}x \otimes E_{-b}E_{-a}x$;
4. $E_{-b}E_{-b}E_{-b}q = 3E_{-b}E_{-b}E_{-a}x \otimes E_{-b}x - 3E_{-b}x \otimes E_{-b}E_{-b}E_{-a}x$;
5. $E_{-a}E_{-b}q = \frac{1}{2}E_{-a}E_{-a}E_{-b}x \otimes x - \frac{1}{2}x \otimes E_{-a}E_{-a}E_{-b}x + E_{-b}E_{-a}x \otimes E_{-a}x - E_{-a}x \otimes E_{-b}E_{-a}x + E_{-a}x \otimes E_{-a}E_{-b}x - E_{-a}E_{-b}x \otimes E_{-a}x$;
6. $E_{-a}E_{-b}E_{-b}q = 2E_{-a}E_{-b}E_{-a}E_{-b}x \otimes x - 2x \otimes E_{-a}E_{-b}E_{-a}E_{-b}x + E_{-b}E_{-b}E_{-a}x \otimes E_{-a}x - E_{-a}x \otimes E_{-b}E_{-b}E_{-a}x + E_{-a}E_{-a}E_{-b}x \otimes E_{-b}x - E_{-b}x \otimes E_{-a}E_{-a}E_{-b}x + 2E_{-b}E_{-a}x \otimes E_{-a}E_{-b}x - 2E_{-a}E_{-a}E_{-b}x \otimes E_{-b}E_{-a}x$;
7. $E_{-a}E_{-b}E_{-b}E_{-b}q = 6E_{-a}E_{-b}E_{-a}E_{-b}x \otimes E_{-b}x - 6E_{-b}x \otimes E_{-a}E_{-b}E_{-a}E_{-b}x + 3E_{-b}E_{-b}E_{-a}x \otimes E_{-a}E_{-b}x - 3E_{-a}E_{-b}x \otimes E_{-b}E_{-b}E_{-a}x$;
8. $E_{-a}E_{-a}E_{-b}E_{-b}q = 4E_{-a}E_{-b}E_{-a}E_{-b}x \otimes E_{-a}x - 4E_{-a}x \otimes E_{-a}E_{-b}E_{-a}E_{-b}x + 2E_{-a}E_{-a}E_{-b}x \otimes E_{-a}E_{-b}x - 2E_{-a}E_{-b}x \otimes E_{-a}E_{-a}E_{-b}x + 2E_{-b}E_{-a}x \otimes E_{-a}E_{-a}E_{-b}x - 2E_{-a}E_{-a}E_{-b}x \otimes E_{-b}E_{-a}x$;
9. $E_{-a}E_{-a}E_{-b}E_{-b}E_{-b}q = 12E_{-a}E_{-b}E_{-a}E_{-b}x \otimes E_{-a}E_{-b}x - 12E_{-a}E_{-b}x \otimes E_{-a}E_{-b}E_{-a}E_{-b}x + 3E_{-b}E_{-b}E_{-a}x \otimes E_{-a}E_{-a}E_{-b}x - 3E_{-a}E_{-a}E_{-b}x \otimes E_{-b}E_{-b}E_{-a}x$;
10. $E_{-a}E_{-a}E_{-a}E_{-b}E_{-b}E_{-b}q = 18E_{-a}E_{-b}E_{-a}E_{-b}x \otimes E_{-a}E_{-a}E_{-b}x - 18E_{-a}E_{-a}E_{-b}x \otimes E_{-a}E_{-b}E_{-a}E_{-b}x$.

(10)

Векторы в пространстве представления $\Psi \otimes \Psi = o - o \otimes o - o$ будем задавать матрицами следующего вида, где отсутствующие их элементы суть нули.

$$b_1 =$$

	-1						
1							

$$b_2 =$$

				-1			
		1					
	-1						
1							

$$b_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & -1 & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & -2 & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & 2 & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$b_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & -3 & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & 3 & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$b_5 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & 0,5 & & \\ \hline & & & & 1 & -1 & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & -1 & & & & \\ \hline & & 1 & & & & & \\ \hline 0,5 & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$b_6 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & -2 \\ \hline & & & & & & -1 & \\ \hline & & & & & & -1 & \\ \hline & & & & -2 & & & \\ \hline & & & 2 & & & & \\ \hline & & 1 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & & & \\ \hline 2 & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$b_7 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & -6 & \\ \hline & & & & & & -3 & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & 3 & & & & \\ \hline & 6 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$b_8 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & -4 \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & -2 & \\ \hline & & & & & 2 & & \\ \hline & & & 2 & -2 & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & 4 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$b_9 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & -12 & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & -3 & \\ \hline & & & & & 3 & & \\ \hline & & & 12 & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$b_{10} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & -1 & & & & & & \\ \hline 1 & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & & -18 & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline & & & & & 18 & & \\ \hline \end{array}$$

Получив векторы q , $E_{-b}q$, $E_{-b}E_{-b}q$, $E_{-b}E_{-b}E_{-b}q$, $E_{-a}E_{-b}q$, $E_{-a}E_{-b}E_{-b}q$, $E_{-a}E_{-b}E_{-b}E_{-b}q$, $E_{-a}E_{-a}E_{-b}E_{-b}q$, $E_{-a}E_{-a}E_{-b}E_{-b}E_{-b}q$, $E_{-a}E_{-a}E_{-a}E_{-b}E_{-b}E_{-b}q$ в пространстве представления $\Psi \otimes \Psi = o - o \overset{1}{\otimes} o - o \overset{1}{\otimes} o$, перестроим их в векторы из пространства представления $\Psi \otimes \tilde{\Psi}$, где $\tilde{\Psi}$ - представление, контраградиентное представлению Ψ .

Для этого каждую из вышеуказанных матриц умножим на матрицу Грама системы векторов (9) относительно скалярного произведения Картана в G , которая в выбранном весовом базисе (7) имеет вид, представленный табл. 1.

После указанных вычислений легко видеть, что произвольный элемент b из B_1 выглядит в матричной форме так, как это представлено в табл. 2.

Т а б л и ц а 1

0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	-2	0
0	0	0	0	0	-2	0	0
0	0	0	2	1	0	0	0
0	0	0	1	2	0	0	0
0	0	-2	0	0	0	0	0
0	-2	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0

 $b =$

Т а б л и ц а 2

$-4x_6$	$4x_3$	$2x_5$	$-2x_2$	$-4x_2$	0	$4x_1$	0
$-8x_8$	$4x_6$	0	$2x_5$	$-2x_5$	$-4x_2$	0	$2x_1$
$-12x_7$	$12x_4$	$4x_6$	$-4x_3$	$-8x_3$	0	$4x_2$	0
$-24x_9$	$12x_7$	$8x_8$	$-4x_6$	$-8x_6$	0	$4x_5$	0
0	0	$-8x_8$	$8x_6$	$4x_6$	$-8x_3$	$-4x_5$	$2x_2$
$-36x_{10}$	$12x_9$	0	$4x_8$	$-4x_8$	$-4x_6$	0	x_5
0	0	$-12x_9$	$12x_7$	$6x_7$	$-12x_4$	$-4x_6$	$2x_3$
0	0	$-72x_{10}$	$48x_9$	$24x_9$	$-24x_7$	$-16x_8$	$4x_6$

Находя следы соответствующих степеней матрицы b , получим искомые инварианты плоской кривой 3-го порядка: $f_6 = Sp b^6$ и $f_4 = Sp b^4$, которые не приводятся здесь в явном виде из-за их громоздкости.

Следует отметить, что указанные инварианты были описаны ранее [3], в данной работе приведён способ их нахождения с помощью средств теории представлений групп Ли и алгебр Ли.

Автор выражает благодарность профессору О.В. Мантурову, на семинаре которого возникла эта задача, за советы и полезные обсуждения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев Е.М., Винберг Э.Б., Элаивили А.Г. Орбиты наибольшей размерности полупростых линейных групп Ли // Функциональный анализ и его приложения. 1967. Т.1. Вып. 4. С. 3-7.
2. Мантуров О.В. Однородные пространства и инвариантные тензоры // Итоги науки и техники: Проблемы геометрии / Науч. ред. Н.М. Остиану. М.: Изд-во ВИНТИ, 1986. Т.18. С. 105-142.
3. Смогоржевский А.С., Столова Е.С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. М.: Физматгиз, 1961. С. 103-105.
4. Спрингер Т. Теория инвариантов. М.: Мир, 1981. С. 19-24.

Поступила 7.04.2003 г.