Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Бенгина, М. Ю. Лившиц, Конечно-разностная схема решения задачи типа Стефана с преобразованием координат, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998, выпуск 6, 123–125

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu14>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:43:04

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1993. 462 с.
2. Зайцев В.Ф. Дискретно-групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. №3. С. 379-387.
3. Беркович Л.М. Факторизация и преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Н.Х. Розова. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1989. 192 с.
4. Сеницкий Ю.Э., Сеницкий А.Ю. О решении одного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, имеющего приложение в динамической теории упругости // Мат. физика и нелинейн. механика. 1990. Вып.13. С. 22-25.
5. Бейтмен Г., Эрдейн А. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. М.: Наука, 1969. 343 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 3-е изд. М.: Наука, 1965. 703 с.

УДК 519.63

Т.А. Бенгина, М.Ю. Лившиц

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА СТЕФАНА С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ КООРДИНАТ

Предлагается численный метод решения задачи типа Стефана, основанный на преобразовании координат, трансформирующий изменяющуюся во времени область в стационарную, и на конечно-разностной схеме решения полученной после этого задачи.

Задачи теплопроводности и диффузии с наличием фазовых переходов классифицируют как задачи с подвижной границей или задачи типа Стефана. Аналитические методы применяются в основном для исследования однофазных или двухфазных линейных моделей различных физических процессов. Получить точное решение нелинейной модели с помощью существующих аналитических методов практически невозможно. В связи с этим при моделировании все чаще используются численные методы решения подобных задач, однако и с их помощью не всегда удается достаточно точно отследить закон движения границы раздела фаз. Подобная проблема возникла при изучении математической модели процесса диффузионного насыщения металла. Многофазная диффузия описывается параболическим уравнением переноса для каждой из фаз, которые в совокупности с краевыми условиями и условиями сохранения баланса на границах фазовых переходов представляют собой задачу Стефана. Математическая модель газового азотирования имеет вид

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i(C) \frac{\partial C}{\partial x_i} \right), \quad (1)$$

где $\tau > 0$; $0 < x < L$; $C(x, \tau)$ — концентрация азота в точке x в момент времени τ ; $D_i(C)$ — коэффициент диффузии азота в i -той фазе.

Краевые условия

$$-D_i(C) \frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=L} = \beta_i (\pi_N^0 - \pi_N^i), \quad (2)$$

$$\frac{\partial C(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

где β_i — коэффициент массопереноса i -той фазы; π_N^0 — азотный потенциал печной атмосферы; π_N^i — равновесный азотный потенциал соответствующей фазы.

Начальные условия задачи:

$$C(x, \tau) \Big|_{\tau=0} = C_0(x) = 0, \quad (4)$$

$$\xi_i(0) = \xi_{i0},$$

где $\xi_i(\tau)$ — граница i -той фазы.

Условия на границах раздела фаз:

$$C(x_i, \tau) \Big|_{x_i=\xi_{i-0}} = C_i^-, \quad C(x_i, \tau) \Big|_{x_i=\xi_{i+0}} = C_i^+. \quad (5)$$

Закон движения границы, разделяющей две различные фазы, выражающий собой условия баланса вещества при фазовых переходах, имеет вид

$$\gamma_i \frac{d\xi_i}{d\tau} = D_i \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{\xi_{i+0}} - D_{i-1} \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{\xi_{i-0}}, \quad (6)$$

где $\gamma_i = C_i^- - C_i^+$; $i = \overline{1, N}$; N — общее число областей, разделенных фазовыми переходами.

Рассмотрим отдельно произвольную фазу, заключенную между границами ξ_{i-1} и ξ_i , и введем безразмерные координаты

$$x_i \rightarrow \eta_i = \frac{x_i - \xi_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}}, \quad 0 \leq \eta_i \leq 1. \quad (7)$$

Уравнение (1) в новых координатах примет вид

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \left[(\eta_i - 1) \frac{d\xi_{i-1}}{d\tau} - \eta_i \frac{d\xi_i}{d\tau} \right] \cdot \frac{\partial C}{\partial \eta_i} \cdot \frac{\partial \eta_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \eta_i} \left(D_i(C) \frac{\partial C}{\partial \eta_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial x_i} \right)^2, \quad (8)$$

где

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\xi_i - \xi_{i-1}}.$$

(9)

Для крайних фаз уравнение (8) имеет тот же вид, только одна из границ имеет нулевую скорость. Соответственно преобразуются граничные условия: для последнего уравнения они принимают вид

$$D_N \frac{\partial C}{\partial \eta_N} \cdot \frac{\partial \eta_N}{\partial x} \Big|_{\eta_N=1} = \beta_i \left(\pi_N^0 - \pi_N^i \Big|_{\eta_i=1} \right),$$

а для первого уравнения —

$$\frac{\partial C}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \Big|_{\eta_1=0} = 0.$$

Скорости $v_i = \frac{d\xi_i}{d\tau}$ находятся на каждом шаге по времени из уравнений (6), которые после преобразования имеют вид

$$\gamma_i \frac{d\xi_i}{d\tau} = D_i(C) \frac{\partial C}{\partial \eta_i} \cdot \frac{\partial \eta_i}{\partial x_i} \Big|_{\xi_{i+0}} - D_{i-1}(C) \frac{\partial C}{\partial \eta_{i-1}} \cdot \frac{\partial \eta_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \Big|_{\xi_{i-0}}. \quad (10)$$

Появление в уравнениях (8) членов, аналогичных конвективным, требует соблюдения консервативности при выборе численной аппроксимации. В преобразованных координатах расчетная область остается неизменной, что позволяет применять известные численные методы решения подобных задач с фиксированным числом узлов в каждой фазе.

В результате конечно-разностной аппроксимации система уравнений (8) примет вид

$$\lambda_\tau C + \lambda_\tau \xi \cdot \lambda_\eta C \cdot \lambda_x \eta = \lambda_{\eta\eta}^2 (DC) \cdot (\lambda_x \eta)^2. \quad (11)$$

Граничные условия:

$$\lambda_\eta C \cdot \lambda_x \eta \Big|_{\eta_i=0} = 0; \quad (12)$$

$$D_N \lambda_\eta C \cdot \lambda_x \eta \Big|_{\eta_N=1} = \beta_i \cdot (\pi_N^0 - \pi_N^i); \quad (13)$$

$$\gamma_i \cdot \lambda_\tau \xi_i = D_i \cdot \lambda_{\eta_i} C \cdot \lambda_x \eta_i \Big|_{\eta_i=1} - D_{i-1} \cdot \lambda_{\eta_{i-1}} C \cdot \lambda_x \eta_{i-1} \Big|_{\eta_{i-1}=0}, \quad (14)$$

где λ_τ , λ_η , λ_x — дифференциально-разностный оператор по τ , η , x соответственно.

Система уравнений (11-14) решается неявным методом с ограниченным числом итераций, количество которых определяется порядком системы уравнения.

Данный метод позволяет моделировать процессы с любым конечным числом одновременно существующих фаз в расчетной области $[0, L]$. Порядок чередования фаз определяется моделируемым процессом. В начале очередного шага по времени делается проверка на появление новой фазы и выбор соответствующих граничных условий. Затем методом прогонки находится поле концентрации $C(x, \tau)$, и из

уравнений (10) определяются скорости $v_i = \frac{d\xi_i}{d\tau}$. С найденными значениями скоростей проводятся итерации и далее — уточнение скоростей

$$\bar{v}_i = \frac{v_i + \hat{v}_i}{2}; \quad \xi_i = \hat{\xi}_i + \bar{v}_i \cdot \tau,$$

где ξ_i , $\hat{v}_i$ — значения на предыдущем временном слое.

По окончании итерационного процесса осуществляется проверка на исчезновение фаз. При этом из системы уравнений (8) исключаются уравнения, соответствующие фазам, область существования которых оказалась меньше некоторой заранее заданной точности. Соответственно преобразовываются расчетные области.

Предложенный метод численного решения задач Стефана позволяет достаточно точно отследить положение границы раздела фаз, учесть переменное число фаз, разрывы концентраций на их границах, появление и рассасывание фаз, а также их толщину.

Контрольный расчет подтвердил адекватность модели экспериментальным данным: при температуре азотирования $T = 500^\circ \text{C}$, глубине диффузионного слоя $L = 0,5 \text{ мм}$, азотном потенциале атмосферы $\pi_N^0 = 1,7 \text{ атм}^{1/2}$, давлении $P = 0,41 \text{ атм}$ вторая фаза процесса азотирования наблюдалась через 6 мин, третья — через 23 мин, а их ширина составила $5,6 \cdot 10^{-3}$ и $2,4 \cdot 10^{-2}$ мм соответственно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. Рига: Звайгане, 1967. 238 с.
2. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономическая схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журн. вычислит. математ. и мат. физики. 1965. Т. 5. № 5. С. 816 - 827.
3. Будаков Б.М., Соловьева Е.Н., Успенский А.Б. Разностный метод сглаживания коэффициентов для решения задач Стефана // Журн. вычислит. математ. и мат. физики. 1965. Т. 5. № 5. С. 828 - 840.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 252 с.
5. Landau H.G. Heat conduction in a melting solid. // Q. App maths. VIII. 1950. P. 81 - 94.
6. Furgeland R.M. A comparative study of numerical methods for moving boundary problems // J. Inst. Maths. Appl. 26. 1980. P. 411 - 429.