Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Зотеев, Исследование устойчивости авторегрессионных моделей колебаний систем с линейно вязким и турбулентным трением, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 53–58

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu140>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:07:13

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ЛИНЕЙНО ВЯЗКИМ И ТУРБУЛЕНТНЫМ ТРЕНИЕМ

Рассматриваются вопросы, связанные с анализом устойчивости авторегрессионных моделей колебаний диссипативных систем с линейно - вязким и турбулентным трением. Формулируется и доказывается теорема о достаточных условиях устойчивости авторегрессионной модели второго порядка. На основе численно-аналитических исследований строятся области устойчивости для авторегрессионных моделей второго и третьего порядка.

Одним из наиболее эффективных методов оценки динамических характеристик диссипативных систем являются методы, в основе которых лежат авторегрессионные модели свободных колебаний диссипативной системы [1,2]. В соответствии с этими методами задача идентификации динамической системы сводится к оценке коэффициентов линейно параметрической дискретной модели, т.е. к задаче прикладного линейного регрессионного анализа [3]. В связи с этим одной из важнейших проблем при разработке авторегрессионных моделей колебаний диссипативных систем является проблема устойчивости этих моделей. Решение этой проблемы предполагает теоретические и численно - аналитические исследования устойчивости решения соответствующих систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в широком диапазоне изменения параметров модели, построение на основе этих исследований областей устойчивости и выбор оптимальных значений параметров обработки экспериментальных виброграмм.

В [1] показано, что временные последовательности отсчетов, полученные при дискретизации с периодом t свободных колебаний систем с линейно - вязким и турбулентным трением, обладают рекуррентностью, которая может быть описана линейно параметрическими дискретными моделями вида

$$I_1 y_{k-1} + I_2 y_{k-2} = y_k, \quad k \geq 2; \quad (1)$$

$$I_0 y_{k-1} + I_1 [k y_k + (k-2) y_{k-2}] + I_2 (k-1) y_{k-1} = y_k + y_{k-2}, \quad k \geq 2, \quad (2)$$

где коэффициенты I_j известным образом зависят от динамических характеристик системы

d – декремента и T – периода колебаний: $I_1 = 2 \exp\left(-\frac{dt}{T}\right) \cos\left(2p \frac{t}{T}\right)$; $I_2 = -\exp\left(-\frac{2dt}{T}\right)$ для модели (1) и $I_0 = 2 \cos\left(2p \frac{t}{T}\right)$, $I_1 = -\frac{d_0 t}{T}$, $I_2 = -I_0 I_1$ для модели (2).

С учетом случайной ошибки в результатах измерений y_k эти модели можно рассматривать как авторегрессионные модели второго и третьего порядка соответственно. Полагая в (1) или в (2) $k = 2, 3, \dots, N$, где $N+1$ – объем выборки, получаем $N-1$ линейных алгебраических уравнения относительно двух или трех неизвестных соответственно. Очевидно, что для вычисления коэффициентов моделей в первом случае достаточно двух, а во втором – трех любых уравнений из сформированных таким образом СЛАУ. Введем понятие устойчивости для линейно параметрической дискретной модели в общем виде.

Пусть линейно параметрическая дискретная модель

$$\sum_{j=1}^n \tilde{I}_j f_j(k, \tilde{y}_k, \tilde{y}_{k-1}, \mathbf{K}, \tilde{y}_{k-r}) = f_{n+1}(k, \tilde{y}_k, \tilde{y}_{k-1}, \mathbf{K}, \tilde{y}_{k-r}), \quad k = \overline{r, N}$$

порождает систему линейных уравнений $A_t \tilde{I} = b_t$, где матрица A_t размерности $[N-r+1, n]$ имеет вид $A_t = [f_1(k, \tilde{y}_k, \tilde{y}_{k-1}, \mathbf{K}, \tilde{y}_{k-r}) \mathbf{M}_2(k, \tilde{y}_k, \tilde{y}_{k-1}, \mathbf{K}, \tilde{y}_{k-r}) \mathbf{M} \mathbf{M}_n(k, \tilde{y}_k, \tilde{y}_{k-1}, \mathbf{K}, \tilde{y}_{k-r})]$, $k = \overline{r, N}$. Будем предполагать, что при $k = \overline{p, p+n-1}$, где $r \leq p \leq N-n+1$, система однозначно разрешима, т.е. матрица A_t невырожденная и, следовательно, $\exists m > 0: \|A_t^{-1}\| \leq m$.

Пусть $y_k = \tilde{y}_k + D_k$, где $|D_k| \leq D$. Тогда будем говорить, что линейно параметрическая дискретная модель $\sum_{j=1}^n I_j f_j(k, y_k, y_{k-1}, \mathbf{K}, y_{k-r}) = f_{n+1}(k, y_k, y_{k-1}, \mathbf{K}, y_{k-r})$, $k = \overline{p, p+n-1}$ устойчива,

если $\exists D_0 > 0: \forall D \leq D_0 \exists m_1(D) > 0: \|(A_t + DA)^{-1}\| \leq m_1$, где

$$A_t + DA = [f_1(k, y_k, y_{k-1}, \mathbf{K}, y_{k-r}) \mathbf{M}_2(k, y_k, y_{k-1}, \mathbf{K}, y_{k-r}) \mathbf{M} \mathbf{K} \mathbf{M}_n(k, y_k, y_{k-1}, \mathbf{K}, y_{k-r})],$$

т. е. матрица $A_t + DA$ невырожденная, а система уравнений $(A_t + DA)l = b_t + Db$ однозначно разрешима.

Т е о р е м а (достаточное условие устойчивости). Пусть функция $\tilde{y}(t): D(\tilde{y}) = \{t \in R: t \geq 0\}$ описывается выражением вида $\tilde{y}(t) = a_0 \exp\left(-d \frac{t}{T}\right) \cos\left(2p \frac{t}{T} + y_0\right)$, где $a_0, d, T \in (0, \infty)$, $y_0 \in R$. Тогда $\forall D \in [0, D_0]$ для устойчивости авторегрессионной модели $I_1 y_{k-1} + I_2 y_{k-2} = y_k$, где $y_k = \tilde{y}(tk) + D_k$, $|D_k| \leq D$, $k = p, p+1, 2 \leq p \leq N-1$, $0 < t < \frac{T}{2}$, достаточно выполнения одного из двух условий:

$$1) \quad \frac{t}{T} \geq (2p)^{-1} \arcsin\left(2 \exp\left(\frac{d}{2}\right) \sqrt{dy}\right) \quad \text{для } D_0 \leq \frac{a_{k-2} \exp(-d)}{4}; \quad (3)$$

$$2) \quad \frac{t}{T} \geq \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{1}{p} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{16}{3} \exp(d) dy}} \quad \text{для } D_0 \leq \frac{3a_{k-2} \exp(-d)}{16}, \quad (4)$$

где $dy = \frac{D}{a_{k-2}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с определением устойчивости линейно параметрической дискретной модели достаточно доказать, что при $\|A_t^{-1}\| \leq m$, где m – постоянная, $m > 0$, и выполнении неравенств (3) или (4) матрица $A_t + DA$ невырожденная.

Имеем $A_t = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{k-1} & \tilde{y}_{k-2} \\ \tilde{y}_k & \tilde{y}_{k-1} \end{bmatrix}$, где $\tilde{y}_k = a_0 \exp\left(-d \frac{t}{T} k\right) \cos\left(2p \frac{t}{T} k + y_0\right)$. Отсюда

$$A_t^{-1} = \frac{1}{\det A_t} \begin{bmatrix} \tilde{y}_{k-1} & -\tilde{y}_{k-2} \\ -\tilde{y}_k & \tilde{y}_{k-1} \end{bmatrix}, \text{ где } \det A_t = \tilde{y}_{k-1}^2 - \tilde{y}_k \tilde{y}_{k-2} = a_0^2 \exp\left(-2d \frac{t}{T} (k-1)\right) \sin^2 2p \frac{t}{T}.$$

Тогда $\|A_t^{-1}\|_E = \frac{\sqrt{2\tilde{y}_{k-1}^2 + \tilde{y}_k^2 + \tilde{y}_{k-2}^2}}{|\det A_t|} < \frac{2a_0 \exp\left(-d \frac{t}{T} (k-2)\right)}{a_0^2 \exp\left(-2d \frac{t}{T} (k-1)\right) \sin^2\left(2p \frac{t}{T}\right)} =$

$$= \frac{2}{a_0 \exp\left(-d \frac{t}{T} k\right) \sin^2\left(2p \frac{t}{T}\right)} = \frac{2}{a_{k-2} \exp\left(-2d \frac{t}{T}\right) \sin^2\left(2p \frac{t}{T}\right)}, \quad k = p, p+1, \quad p = 2, 3, \mathbf{K}, N-1,$$

где $a_{k-2} = a_0 \exp\left[-d \frac{t}{T} (k-2)\right]$ – значение огибающей амплитуд колебаний в момент, соответствующий первому отсчету в тройке y_{k-2}, y_{k-1}, y_k . Следовательно, при $0 < t < \frac{T}{2}$ имеем

$$\|A_t^{-1}\|_E < m = \frac{2}{a_{k-2} \exp\left(-2d \frac{t}{T}\right) \sin^2\left(2p \frac{t}{T}\right)}, \text{ т. е. матрица } A_t \text{ невырожденная. Известно, что при невы-}$$

рожденной матрице A_t матрица $A_t + DA$ будет также невырожденной, если выполняется условие $\|DA\| < \frac{1}{\|A_t^{-1}\|}$ [4]. Так как $\|DA\|_E = \sqrt{2D_{k-1}^2 + D_k^2 + D_{k-2}^2} \leq 2D$, то для существования обратной

матрицы $(A_t + DA)^{-1}$ достаточно выполнения неравенства

$$\|DA\|_E \leq 2D < \frac{a_{k-2}}{2} \exp\left(-2d \frac{t}{T}\right) \sin^2 2p \frac{t}{T} < \frac{1}{\|A_t^{-1}\|_E}.$$

Пусть выполняется условие 1. Из него непосредственно следует, что

$$\sin 2p \frac{t}{T} \geq 2 \exp\left(\frac{d}{2}\right) \sqrt{\frac{D}{a_{k-2}}} \quad \text{или} \quad 2D \leq \frac{a_{k-2}}{2} \exp(-d) \sin^2 2p \frac{t}{T} < \frac{a_{k-2}}{2} \exp\left(-2d \frac{t}{T}\right) \sin^2 2p \frac{t}{T} \quad \text{при} \quad 0 < \frac{t}{T} < \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\|DA\|_E < \frac{1}{\|A_t^{-1}\|_E}$, что и требовалось доказать.

Пусть выполняется условие 2. Из него при заданных ограничениях следует, что $2D \leq \frac{a_{k-2}}{2} \exp(-d) \left[4p^2 \left(\frac{t}{T}\right)^2 - \frac{16}{3} p^4 \left(\frac{t}{T}\right)^4 \right]$. Так как

$$\sin^2 2p \frac{t}{T} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos 4p \frac{t}{T} \right) = \frac{\left(4p \frac{t}{T} \right)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{\left(4p \frac{t}{T} \right)^4}{2 \cdot 4!} + \frac{\left(4p \frac{t}{T} \right)^6}{2 \cdot 6!} - \mathbf{K} \quad \text{то, очевидно, что}$$

$$\sin^2 2p \frac{t}{T} > 4p^2 \left(\frac{t}{T}\right)^2 - \frac{16}{3} p^4 \left(\frac{t}{T}\right)^4. \quad \text{Следовательно,}$$

$$2D \leq \frac{a_{k-2}}{2} \exp(-d) \sin^2 2p \frac{t}{T} < \frac{a_{k-2}}{2} \exp\left(-2d \frac{t}{T}\right) \sin^2 2p \frac{t}{T}, \quad \text{а значит} \quad \|DA\|_E < \frac{1}{\|A_t^{-1}\|_E}, \quad \text{что и требовалось}$$

доказать.

Проведенный численный эксперимент подтвердил достоверность полученных результатов. На рис.1 представлены кривые зависимости предельно допустимой приведенной погрешности измерения ординат колебаний систем с линейно - вязким трением от $\frac{t}{T}$ при различных значениях параметра y_0 . Кривые 1 – 4 соответствуют значениям $y_0 = 0^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ и 90° ; кривая 5 описывает зависимость минимального значения предельно допустимой погрешности $dy_{\min} \left(\frac{t}{T}\right)$: $dy_{\min} = \min_{y_0 \in [0^\circ, 180^\circ]} dy$. Кривые 6 и 7 описывают зависимости предельно допустимой погрешности, вычисленной по формулам (3) и (4).

Р и с. 1. Зависимость предельно допустимой приведенной погрешности от периода дискретизации t при различных значениях параметра y_0

Р и с. 2. Области устойчивости авторегрессионной модели второго порядка при различных значениях параметра y_0

На рис. 2 построены области устойчивости авторегрессионной модели (1) при различных значениях параметра y_0 . Кривые 1 – 4 соответствуют значениям $y_0 = 0^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ и 90° ; кривая 5 изображает границу области устойчивости, построенную на основании формулы (3) или формулы (4).

Исследование устойчивости авторегрессионной модели третьего порядка (2) проводилось на основе численно-аналитического эксперимента. Эта линейно параметрическая дискретная модель рекуррентно описывает временную последовательность отсчетов $\tilde{y}_k$ ординат свободных

колебаний систем с турбулентным трением: $\tilde{y}_k = \frac{a_0}{1 + \frac{d_0 t}{T} k} \cos\left(2p \frac{t}{T} k + y_0\right)$. Динамические характеристики: d_0 - декремент и T - период колебаний определяются через коэффициенты модели I_j по формулам $d_0 = \frac{2p I_1}{\arccos \frac{I_0}{2}}$ и $T = \frac{2pt}{\arccos \frac{I_0}{2}}$.

При исследовании ставилась задача нахождения области допустимого изменения параметров модели, при которых матрица соответствующей СЛАУ невырождена. Для этого строились зависимости предельно допустимой приведенной погрешности $dy\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{D}{a_{k-2}} : |D_k| < D$, $p \leq k \leq p+2$, $2 \leq p \leq N-1$, где D_k - ошибка в результате k -того измерения ординаты колебаний $y_k = \tilde{y}_k + D_k$.

При невырожденной матрице

$$A_t = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{k-1} & k\tilde{y}_k + (k-2)\tilde{y}_{k-2} & (k-1)\tilde{y}_{k-1} \\ \tilde{y}_k & (k+1)\tilde{y}_{k+1} + (k-1)\tilde{y}_{k-1} & k\tilde{y}_k \\ \tilde{y}_{k+1} & (k+2)\tilde{y}_{k+2} + k\tilde{y}_k & (k+1)\tilde{y}_{k+1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

для устойчивости модели (2) должно выполняться условие $\|DA\| < \frac{1}{\|A_t^{-1}\|}$ [4]. Так как

$$\|DA\| = \max_{i=1,3} \sum_{j=1}^3 |Da_{ij}| \leq (3k+4)\bar{D}, \text{ где } \bar{D} - \text{предельная абсолютная погрешность: } |D_k| \leq \bar{D}, \text{ то для}$$

$$\text{устойчивости достаточно выполнения условия } |D_k| \leq \bar{D} < D = \frac{1}{(3k+4)\|A_t^{-1}\|}.$$

На рис. 3 представлены кривые зависимости предельно допустимой приведенной погрешности $dy, \%$ от периода дискретизации t (в относительных единицах) при различных значениях параметра y_0 . Можно показать, что при малых значениях декремента колебаний имеет место приближенное равенство $f_2\left(\frac{t}{T}, y_0\right) \approx f_1\left(0,5 - \frac{t}{T}, p - y_0\right)$, где $f_1\left(\frac{t}{T}, y_0\right)$ и $f_2\left(\frac{t}{T}, y_0\right)$ - функции, описывающие зависимости $dy\left(\frac{t}{T}\right)$ при $y_0 \in \left[0, \frac{p}{2}\right]$ и $y_0 \in \left[\frac{p}{2}, p\right]$ соответственно (рис. 3а и рис. 3б). Проведенные исследования показали, что при $y_0 = 0^\circ$ ($y_0 = 180^\circ$) и $\frac{t}{T} = 0,25$ матрица A_t вырождена, а модель (2) неустойчива. Действительно, в этом случае мат-

рица A_t принимает вид либо $A_t = \begin{bmatrix} 0 & k\tilde{y}_k + (k-2)\tilde{y}_{k-2} & 0 \\ \tilde{y}_k & 0 & k\tilde{y}_k \\ 0 & (k+2)\tilde{y}_{k+2} + k\tilde{y}_k & 0 \end{bmatrix}$ при четных значениях параметра k , либо $A_t = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{k-1} & 0 & (k-1)\tilde{y}_{k-1} \\ 0 & (k+1)\tilde{y}_{k+1} + (k-1)\tilde{y}_{k-1} & 0 \\ \tilde{y}_{k+1} & 0 & (k+1)\tilde{y}_{k+1} \end{bmatrix}$ при нечетных значениях этого параметра. И в том, и в другом случаях $\det A_t = 0$.

Так как на практике обычно значение параметра y_0 (начальной фазы колебаний) априорно неизвестно, то представляет интерес диапазон вариации предельно допустимой приведенной погрешности для каждого значения $\frac{t}{T}$, а также соответствующая этому значению величина параметра y_0 .

Р и с. 3. Зависимость предельно допустимой приведенной погрешности от периода дискретизации t (в относительных единицах) при различных значениях параметра y_0 для авторегрессионной модели третьего порядка:

a - при $y_0 = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ и 90° ; b - при $y_0 = 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ и 180°

Р и с. 4. Зависимости параметра y_0 от периода дискретизации t , обеспечивающие наименьшее (кривая 1) и наибольшее (кривая 2) значения предельно допустимой приведенной погрешности

Р и с. 5. Нижняя (кривая 1) и верхняя (кривая 2) границы области изменения предельно допустимой приведенной погрешности

На рис. 4 представлены зависимости параметра y_0 от периода дискретизации (в относительных единицах), при которых достигается наименьшее (кривая 1) и обеспечивается наибольшее (кривая 2) значения предельно допустимой приведенной погрешности. Соответствующие нижняя (кривая 1) и верхняя (кривая 2) границы области изменения предельно допустимой погрешности представлены на рис. 5.

Построенные кривые позволяют при известных значениях параметра y_0 дать рекомендации по выбору периода дискретизации t при обработке экспериментальной виброграммы.

Проведены исследования зависимости устойчивости авторегрессионной модели колебаний систем с турбулентным трением (2) от целочисленного параметра k . На рис. 6 представлены кривые зависимости предельно допустимой приведенной погрешности от $\frac{t}{T} \in [0,01; 0,25]$ при использовании в (5) значений $k = 2, 3, 7, 12$ и 17 . Вычисления проводились при $d_0 = 0,05$ и $y_0 = 0$. Соответствующие кривые для $\frac{t}{T} \in [0,25; 0,4]$ симметричны относительно вертикальной прямой $\frac{t}{T} = 0,25$.

Р и с. 6. Зависимости предельно допустимой приведенной погрешности от периода дискретизации t при различных значениях параметра k .

Р и с. 7. Зависимости предельно допустимой приведенной погрешности от параметра k при различных значениях $\frac{t}{T}$

На рис. 7 представлены кривые зависимости предельно допустимой приведенной погрешности от целочисленного параметра k для $\frac{t}{T} = 0,1; 0,2$ и $0,25$ (соответственно кривые 1, 2 и 3). Очевидно, что даже при незначительном увеличении параметра k устойчивость модели существенно ухудшается.

Проведенные исследования показали, что изменение величины диссипации энергии колебаний в достаточно широком диапазоне $d_0 \in [0,01; 0,2]$ практически не влияет на устойчивость моделей.

В заключение по результатам исследований устойчивости авторегрессионных моделей (1) и (2) можно сделать следующие основные выводы. Устойчивость вычислений коэффициентов авторегрессионных моделей посредством решения СЛАУ, число уравнений в которой минимально, обеспечивается лишь при достаточно малых возмущениях в исходных данных. Априорная информация о начальной фазе колебаний позволяет существенно расширить область устойчивости модели, особенно для систем с турбулентным трением. Увеличение целочисленного параметра k при формировании СЛАУ на основе модели (2) приводит к резкому ухудшению устойчивости вычислений.

Следует отметить, что на практике при оценке коэффициентов авторегрессионных моделей следует использовать переопределенные системы линейных уравнений, сформированные на основе дискретных моделей (1) или (2). При этом, как правило, задача сводится к решению системы нормальных уравнений, матрица которой $(A_t + DA)^T (A_t + DA)$ невырожденная по определению при любом возмущении DA [4]. Однако очевидно, что выбор величины периода дискретизации t с учетом полученных результатов исследований будет существенно влиять на меру обусловленности матрицы системы нормальных уравнений и, как следствие, на точность вычислений оценок коэффициентов авторегрессионных моделей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Семенычев В.К., Зотеев В.Е. Определение параметров затухающих колебаний на основе разностных схем // Проблемы прочности. 1988. №12. С. 101-105.
2. Зотеев В.Е. Разработка и исследование линейных дискретных моделей колебаний диссипативных систем // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 1999. Вып. № 7. С. 170-177.
3. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980. 456 с.
4. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.

Поступила 12.07.2003 г.