Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Никитенко, Е. А. Васильев, Напряженно-деформированное состояние
неравномерно нагретых толстостенных труб и оценка их длительной прочности,
Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2003, выпуск 19, 59–63

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu141>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:40:29

Механика деформируемого твердого тела

УДК 539.4+539.376

А.Ф. Никитенко, Е.А. Васильев

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫХ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБ И ОЦЕНКА ИХ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ

С использованием кинетической теории ползучести Ю.Н. Работнова получена система уравнений, позволяющая рассчитать напряженно-деформированное состояние неравномерно нагретых толстостенных труб с одновременной оценкой с феноменологических позиций процесса накопления повреждений в материале на любой момент времени, вплоть до начала разрушения. Применительно к упрочняющемуся в процессе ползучести материалу выполнен анализ зависимости напряженного состояния от перепада температуры по радиусу трубы. Изучено влияние на напряженное состояние трубы параметра упрочнения.

Кинетическая теория Ю.Н. Работнова, математическая модель которой есть [1-3]:

$$\dot{s}_{ij} = \frac{W}{s_{ij}} \frac{\partial s_{ij}}{\partial t}, \quad W = \frac{B_i s_{ij}^{n+1}}{j(w)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$\dot{\omega} = \frac{B_2 \sigma_{*3}^{g+1}}{\varphi(\omega)}, \quad \omega(x_k, 0) = 0, \quad \omega(x_k^*, t_*) = 1, \quad (2)$$

получила всестороннее экспериментальное обоснование как в условиях простого, так и сложного нагружений [2]. И тем не менее следует констатировать, что она по ряду причин [1] не нашла еще должного применения в расчетной практике. Поэтому очевидно, что демонстрация использования кинетической теории для расчета напряженно-деформированного состояния и времени начала разрушения хотя бы простейших элементов конструкций является актуальной. Ниже в качестве объекта исследования выбрана толстостенная неравномерно нагретая труба, нагруженная внутренним давлением. Интерес к этой задаче вызван тем, что она является одной из простейших одномерных задач, в которой напряженное состояние является объемным и ни одно из главных напряжений в нуль не обращается. Поэтому очевидно, что случай толстостенной трубы под действием внутреннего давления служил, служит и, надо полагать, будет служить „... пробным камнем для оценки и сравнения различных теорий ползучести, начиная с простейших и кончая весьма сложными” [1].

Отметим также, что решение упомянутой выше задачи имеет, несомненно, особый практический интерес. Действительно, если количество публикаций, посвященных расчету толстостенных равномерно нагретых труб, к настоящему времени совершенно необозримо, то аналогичные расчеты толстостенных неравномерно нагретых труб, нагруженных внутренним давлением, практически отсутствуют.

Ниже с использованием кинетической теории (1), (2) представлены результаты таких расчетов. В частности, выполнен анализ зависимости напряженно-деформированного состояния от перепада температуры по радиусу трубы. Одновременно с этим проанализировано влияние на напряженно-деформированное состояние трубы параметра упрочнения.

Напомним, что в (1), (2) обозначения общепринятые [1-3]: p_{ij} , s_{ij} - компоненты тензоров деформаций ползучести и напряжений; точка над соответствующим символом обозначает производную по времени t ; σ_3 , σ_{*3} - эквивалентные напряжения, представляющие собой однородные относительно напряжений функции первой степени; W - мощность рассеяния энергии при ползучести; ω - параметр, описывающий с феноменологических позиций накопление повреждений в материале; для функции $\varphi(\omega)$ принято [2,3]

$$\varphi(\omega) = \omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m,$$

α , m – характеристики материала. Время t_* , при котором в некоторой точке тела с координатами x_k^* , параметр ω равен единице, будем называть временем начала разрушения этого тела. Для характеристик ползучести и длительной прочности материала принята простая зависимость от температуры [1,4]: n , g , m , α в рассматриваемом температурном диапазоне считаем постоянными, а B_1 , B_2 – функциями температуры.

1. Пусть толстостенная труба, отнесенная к прямоугольной цилиндрической системе координат r , φ , z , находится под действием стационарного температурно-силового воздействия, а именно, внутреннего давления p и плоского осесимметричного температурного поля $q(r)$, причем [4]

$$q(r) = q(a) + q_* \ln(r/a), \quad (3)$$

где $q_* = [q(b) - q(a)] / \ln b_1$, $b_1 = b/a$; a, b, r – внутренний, наружный и текущий радиусы трубы.

Материал трубы считаем несжимаемым, т.е. $\mathcal{E}_r + \mathcal{E}_\varphi + \mathcal{E}_z = 0$, где p_r, p_φ, p_z – радиальная, окружная и осевая компоненты тензора деформаций ползучести. Полагаем, что в трубе реализуется плоское деформированное состояние, следовательно $\mathcal{E}_z = 0$; если $u(r)$ – радиальное перемещение, то $\mathcal{E}_r = du/dr$, $\mathcal{E}_\varphi = u/r$. Используя все это совместно с условием несжимаемости, получаем $\mathcal{E}_r = C_1(t)/r$ и, таким образом, для скоростей деформаций ползучести будем иметь:

$$\mathcal{E}_r = \frac{C_1(t)}{r^2}, \mathcal{E}_z = 0, \mathcal{E}_\varphi = -\frac{C_1(t)}{r^2}, \quad (4)$$

где $C_1(t)$ – константа интегрирования.

В трубе возникают напряжения $\sigma_\varphi, \sigma_z, \sigma_r$, они есть главные. Выберем в качестве эквивалентного напряжения в (4) интенсивность напряжений, т.е. положим $\sigma_* = \sigma_i$, где $\sigma_i = \sqrt{3 s_{ij} s_{ij}} / 2$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_o \delta_{ij}$, $\sigma_o = \sigma_{ij} \delta_{ij} / 3$. Система уравнений (1) примет вид

$$\mathcal{E}_r = \frac{3}{2} \frac{W}{s_i^2} \cdot s_j, \quad \mathcal{E}_z = \frac{3}{2} \frac{W}{s_i^2} \cdot s_z, \quad \mathcal{E}_\varphi = \frac{3}{2} \frac{W}{s_i^2} \cdot s_r; \quad W = B_1 \sigma_i^{n+1} / \varphi(\omega).$$

Из условия, что $\mathcal{E}_z = 0$, следует

$$\begin{aligned} s_z &= (s_j + s_r) / 2; \quad s_o = s_z; \quad s_j = (s_j - s_r) / 2; \\ s_r &= -(s_j - s_r) / 2; \quad s_z = 0; \quad s_i = \sqrt{3} (s_j - s_r) / 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим зависимость характеристик ползучести и длительной прочности от температуры. Экспериментально установлено, что [1,4] $B_1 = B_o \exp(cq)$, $B_2 = k_o B_1$, где B_o, k_o, c – константы. С учетом (3) будем иметь.

$$B_1 = B_* r^{cq_*}, B_2 = k_o B_* r^{cq_*}, r = r/a. \quad (6)$$

Далее, выберем в качестве эквивалентного напряжения в (2) интенсивность напряжений, т.е. положим $\sigma_* = \sigma_i$. Тогда система определяющих уравнений (1), (2) с учетом (3), (4) окончательно примет вид

$$\mathcal{E}_r = -\mathcal{E}_\varphi = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} \cdot \frac{B_*}{j(m)} \cdot r^{cq_*} \cdot (s_j - s_r)^n, \mathcal{E}_z = 0, \quad w(r, t) = [1 - m(r, t)]^{1/(a+1)}, \quad (7)$$

где функция μ , введенная для удобства дальнейших исследований, имеет вид

$$m(r, t) = \left[1 - (a+1)(m+1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{g+1} k_o B_* r^{cq_*} \int_0^t (s_j - s_r)^{g+1} dt \right]^{1/(m+1)}. \quad (8)$$

Очевидно следующее:

$$j(m) = m^m (1-m)^{a/(a+1)}; \quad m(r, 0) = 1; \quad m(r^*, t_*) = 0.$$

Нормальные напряжения, возникающие в поперечном сечении трубы, должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{s_r}{r} \right) - \frac{s_j - s_r}{r} = 0; \quad 1 \leq r = \frac{r}{a} \leq b_1 \quad (9)$$

и граничным условиям

$$s_r(1) = -p, \quad s_r(b_1) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, выписанная система уравнений (4), (7)-(10) позволяет на любой момент времени, вплоть до начала разрушения, рассчитать напряженно-деформированное состояние с одновременным учетом с феноменологических позиций накопление повреждений в материале толстостенной неравномерно нагретой трубы, нагруженной внутренним давлением.

2. Сопоставляя между собой (4) и (7), легко получить

$$s_j - s_r = \frac{[j(m)]^{1/n}}{k_1} \cdot C_1^{1/n} \cdot r^{-2/n_*}, \quad (11)$$

где

$$k_1 = (a^2 \cdot B_*)^{1/n} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{(n+1)/n}; \quad \frac{2}{n_*} = \frac{2 + cq_*}{n}. \quad (12)$$

Подставляя (11) в (9) и интегрируя полученное с использованием первого граничного условия (10), получаем

$$s_r = -p + \frac{C_1^{1/n}}{k_1} \int_1^r [j(m)]^{1/n} r^{-1-2/n_*} dr. \quad (13)$$

Второе граничное условие позволяет записать

$$-p + \frac{C_1^{1/n}}{k_1} \int_1^{b_1} [j(m)]^{1/n} r^{-1-2/n_*} dr = 0. \quad (14)$$

Подставим теперь (11) в (8). После несложных операций будем иметь

$$\int_1^m \Psi(z) dz = -\frac{k_2}{m+1} r^{-\alpha} \int_0^t C_1^{(g+1)/n} dt, \quad (15)$$

где

$$\Psi(\mu) = \mu^{m(n-g-1)/n} \cdot (1-\mu)^{-\alpha(g+1)/n(\alpha+1)}, \quad (16)$$

$$k_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{-(g+1)/n} \frac{k_o(a+1)(m+1)}{a^{2(g+1)/n}} B_*^{(n-g-1)/n}, \quad \alpha = \frac{2(g+1)-(n-g-1)cq_*}{n}. \quad (17)$$

С целью удобства при дальнейших исследованиях целесообразно ввести функцию t^o , а именно:

$$t^o = [(a+1)(m+1)B_2^o S_i^{og+1}]^{-1}, \quad (18)$$

а вместо $C_1(t)$ – функцию $X(t)$:

$$X(t) = \frac{k_1 p}{J_1} [C_1(t)]^{-1/n}, \quad (19)$$

где

$$J_1 = \int_1^{b_1} r^{-1-2/n_*} dr = \frac{n_*}{2} \cdot \frac{b_1^{2/n_*} - 1}{b_1^{2/n_*}}. \quad (20)$$

В (18) и далее нолик вверху при соответствующей функции обозначает, что она зависит от координат точек тела. Кстати, в случае однородного напряженного состояния (18) представляет собой семейство кривых длительной прочности, параметром которого является температура; для каждой фиксированной температуры (18) представляет кривую длительной прочности, независимую от вида напряженного состояния. Этот вывод следует из (2). В случае неоднородного напряженного состояния можно, используя стандартную методику [1,5], вычислить время начала разрушения тела (элемента конструкции):

$$t^o(x_k^*) = \{(a+1)(m+1)B_2^o(x_k^*)[S_i^o(x_k^*)]^{g+1}\}^{-1}. \quad (21)$$

Здесь x_k^* – координаты точки, в которой произведение $B_2^o S_i^{og+1}$ достигает наибольшего значения. В дальнейшем $t^o(x_k^*)$ будем обозначать t_*^o .

Применительно к толстостенной неравномерно нагретой трубе в предположении установившейся ползучести материала известно распределение напряжений [4]. С учетом этого и (5), (12), (17) соотношения (18) и (21) запишутся так:

$$t^o = \left[k_2 \cdot k_1^{g+1} \cdot \left(\frac{p}{J_1} \right)^{g+1} \cdot r^{-\alpha} \right]^{-1}; \quad (22)$$

$$t_*^o = \left[k_2 k_1^{g+1} \cdot \left(\frac{p}{J_1} \right)^{g+1} \right]^{-1}. \quad (23)$$

Используя теперь (19), (22), представим (15), (14), (13), (11) в следующем виде:

$$\int_1^m \Psi(z) dz = -[(m+1) t^o]^{-1} \int_0^t X^{-(g+1)} dt; \quad (24)$$

$$\int_1^{b_1} [j(m)]^{1/n} r^{-1-2/n_*} dr = J_1 X, \quad (25)$$

где

$$\Psi(m) = m^{m(n-g-1)/n} \cdot (1-m)^{-a(g+1)/n(a+1)}; \quad (26)$$

$$j(m) = m^m \cdot (1-m)^{a/(a+1)}, \quad m(r, 0) = 1, \quad m(r^*, t_*) = 0; \quad (27)$$

$$s_r = -p + X^{-1} \cdot \frac{p}{J_1} \int_1^r [j(m)]^{1/n} r^{-1-2/n_*} dr; \quad (28)$$

$$s_j - s_r = \frac{p}{J_1} r^{-2/n_*} \frac{[j(m)]^{1/n}}{X}. \quad (29)$$

Умножив левую и правую части равенства (29) на $\sqrt{3}/2$, получаем в соответствии с (5)

$$s_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p}{J_1} r^{-2/n_*} [j(m)]^{1/n} / X = s_i^o [j(m)]^{1/n} / X. \quad (30)$$

Таким образом, задача расчета напряженно-деформированного состояния неравномерно нагретой толстостенной трубы, нагруженной внутренним давлением, свелась, по-существу, к определению функций $m(r, t)$ и $X(t)$, для чего необходимо решить систему уравнений (24), (25). Зная $\mu(p, t)$ и $X(t)$, из (28)-(30) находим напряженное состояние трубы, а из (4) с использованием (19) – деформированное состояние. Очевидно, что решение системы (24), (25) в самом общем случае затруднительно. Тем не менее в ряде частных случаев эта система имеет аналитическое решение.

3. Пусть труба изготовлена из упрочняющегося в процессе ползучести материала. Для такого материала $a \neq 0$, $m = 0$ [2,3] и система (24), (25) с учетом (26), (27) запишется так:

$$\int_1^m (1-z)^{-l_1} dz = -(t^o)^{-1} \int_0^t X^{-(g+1)} dt, \quad l_1 = \frac{a(g+1)}{n(a+1)}; \quad (31)$$

$$\int_1^{b_1} (1-m)^{l_2} r^{-1-2/n_*} dr = J_1 \cdot X, \quad l_2 = \frac{a}{n(a+1)}. \quad (32)$$

Требование сходимости интеграла, стоящего в левой части равенства (31), накладывает ограничения на характеристики материала. Не выписывая, их отметим только, что эти ограничения не являются жесткими и согласуются с имеющимися экспериментальными данными [2].

Система (31), (32) имеет следующее решение:

$$X(t) = \left(\frac{J_2}{J_1} \right)^{(1-l_1)} \left(\frac{t}{t_*^o} \right)^{l_2}; \quad (33)$$

$$1-m(r, t) = \left(\frac{J_1}{J_2} \right)^{g+1} r^{a/(l_1-1)} \frac{t}{t_*^o}; \quad (34)$$

где

$$J_2 = \int_1^{b_1} r^{-1-c} dr = \frac{1}{c} \cdot \frac{b_1^c - 1}{b_1^c}; \quad (35)$$

$$c = \frac{2(a+1) + cq_*}{n+a(n-g-1)}; \quad (36)$$

$$t_* = t_*^o \cdot \left(\frac{J_2}{J_1} \right)^{g+1}, \quad (37)$$

а t_*^0 вычисляется согласно (23). Разрушение трубы начинается с внутренней поверхности, т.е. $\rho^* = 1$. Используя (33), (34), вычислим $[j(m)]^{1/n} / X$, где $\varphi(\mu)$, согласно (27), есть $\varphi(\mu) = (1 - \mu)^{\alpha/(\alpha+1)}$. В итоге получаем

$$\frac{[j(m)]^{1/n}}{X} = \frac{J_1}{J_2} \cdot r^{\frac{2}{n_*} - c}. \quad (38)$$

Подставляя (38) в (28), находим σ_r . Зная σ_r и используя (38), из (29) вычисляем σ_φ , а из (30) – интенсивность напряжений. В соответствии с (5) вычисляем σ_z и компоненты девиатора напряжений. Результаты этих вычислений представлены ниже:

$$\begin{aligned} s_r &= \frac{p}{b_1^c - 1} \left[1 - \left(\frac{b}{r} \right)^c \right]; \quad s_j = \frac{p}{b_1^c - 1} \left[1 - (1 - c) \left(\frac{b}{r} \right)^c \right]; \\ s_z &= s_o = \frac{p}{b_1^c - 1} \left[1 - \left(1 - \frac{c}{2} \right) \left(\frac{b}{r} \right)^c \right]; \quad s_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{p}{b_1^c - 1} c \left(\frac{b}{r} \right)^c; \\ s_r &= -\frac{p}{b_1^c - 1} \cdot \frac{c}{2} \left(\frac{b}{r} \right)^c; \quad s_z = 0; \quad s_j = \frac{p}{b_1^c - 1} \cdot \frac{c}{2} \left(\frac{b}{r} \right)^c. \end{aligned} \quad (39)$$

Анализ соотношений (39) свидетельствует:

1) напряженное состояние в толстостенной трубе, изготовленной из упрочняющегося в процессе ползучести материала, является стационарным;

2) если параметр упрочнения положить равным нулю (при $\alpha=0$ будет $\chi = 2/n_*$, см. (36), (12)), то (39) описывают напряженное состояние трубы в предположении установившейся ползучести материала [4];

3) если положить $\alpha=0$ и $\theta_* = 0$ (см. (3), (12)), то (39) описывают напряженное состояние равномерно нагретой толстостенной трубы в предположении установившейся ползучести материала [4].

Тот факт, что из (39) следуют уже известные результаты, свидетельствует об их достоверности и эффективности кинетической теории ползучести.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1996. 752 с.
2. Закономерности ползучести и длительной прочности: Справочник / Под ред. С.А. Шестерикова. М.: Машиностроение, 1983. 101 с.
3. Никитенко А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1997. 278 с.
4. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960. 455 с.
5. Работнов Ю.Н. Влияние концентрации напряжений на длительную прочность // Инж. журн. Механика тверд. тела. 1967. № 3. С. 36-41.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 02-01-00738.

Поступила 12.03.2003 г.