Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Ковырягин, С. В. Никулин, И. Г. Овчинников, Задача синтеза регулятора напряженно-деформированного состояния мостовой конструкции, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 80–85

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:06:42

ЗАДАЧА СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МОСТОВОЙ КОНСТРУКЦИИ

Поставлена задача синтеза регулятора напряженно-деформированного состояния элемента мостовой конструкции в виде пластинки сложного очертания. Показана высокая эффективность работы регулятора на примере импульсного воздействия. Приведены результаты численного расчета для конкретных размеров конструкции.

Наряду с управлением прочностью мостовой конструкции в целом все большую актуальность приобретают в настоящее время вопросы управления напряженно-деформированным состоянием (НДС) отдельных ключевых элементов ее, от работоспособности которых зависит жизнь всего сооружения. Теоретически и конструктивно этот вопрос разработан для вантов, балок, стержней. В настоящей статье сделана попытка теоретического осмысления вопроса об управлении НДС двухсвязных пластин. Такие элементы используются в мостовых конструкциях в качестве деталей балки пролетного строения.

Постановка задачи. Статическое нагружение конструкции предполагает обычные методы ее расчета, описанные для рассматриваемых элементов в работе [1].

При нагружении в течение непродолжительного времени экстремальными нагрузками в виде импульсного воздействия или вибрации появляется необходимость в совершенствовании конструкции с помощью системы управления [2,3]. Именно такую конструкцию мы будем в дальнейшем рассматривать.

Рассмотрим активную систему управления с n степенями свободы. Уравнения движения такой системы имеют вид [4,5]:

$$\ddot{x}(t) = A(x) \dot{z}(t) + B(x) u(t) + D(x) f(t), \quad (1)$$

где
$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}(x)K(x) & -M^{-1}(x)C(x) \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}(x)G(x) \end{bmatrix}; \quad (3)$$

$$D(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1}(x) \end{bmatrix}; \quad (4)$$

$$z^T(t) = [x^T(t), \dot{x}^T(t)]. \quad (5)$$

Здесь $x(t)$ – n – мерный вектор геометрического положения объектов; $M(x), C(x)$ и $K(x)$ – матрицы размерностью $n \times n$, определяющие соответственно массу, демпфирование и упругость по каждому элементу матрицы $x(t)$ в зависимости от p – размерного вектора x , характеризующего параметры конструкции; $f(t)$ – вектор возмущающих систему сил нагрузки; $G(x)$ – матрица размерностью $n \times m$ ($m \leq n$), определяющая пространственное распределение активных элементов, которые вместе с m – размерным вектором управляющих воздействий $u(t)$ описывают возможности активного управления конструкцией.

Одновременно с созданием наилучшей управляющей силы учитывается поддержание значений вектора состояния x в допустимых пределах. Таким образом, основной задачей создания оптимальной системы управления является отыскание таких x и $u(t)$, которые минимизировали бы интеграл вида

$$J(z, x, u) = \int_0^T [z^T Q_1 z + u^T Q_2 u + W(x)] dt, \quad (6)$$

где
$$Q = \begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Здесь $W(x)$ - неотрицательная функция оценки, зависящая в целом от x , а не от t . Матрицы Q_0, Q_1, Q_2 - обычные весовые матрицы с соответствующими данной системе управления параметрами.

Решая матричное уравнение (1) при одновременном удовлетворении (6) находят z, x, u . Кроме того, величины x должны удовлетворять условию

$$x \geq x_s, \quad (8)$$

где x_s соответствует состоянию конструкции при статическом нагружении.

Минимизация квадратичного функционала J , заданного выражением (7), являющаяся результатом решения уравнения (1) при ограничениях (8), может быть выполнена с помощью вариационного исчисления. При этом требуется удовлетворение неравенствам, которые выполняются при минимизации функционала вида

$$J^*(x, u) = \int_0^T \left\{ z^T Q_0 z + u^T Q_2 u + W(x) + I^T [A(x)z + B(x)u + D(x)f(t) - \mathfrak{L}(t)] \right\} dt, \quad (9)$$

где $I(t)$ - $2n$ - мерный вектор множителей Лагранжа. Следует заметить, что интегрирование здесь производится на рассматриваемом временном отрезке.

Условия минимизации J^* следующие:

$$d^{(1)} J^* = 0; \quad (10)$$

$$d^{(2)} J^* > 0, \quad (11)$$

где d - вариация. Математически очень сложно удовлетворить условию (11) второй вариации $d^{(2)} J^*$. Однако это возможно в случае реальных земных условий для потенциального силового поля. Так как интеграл (6), по существу, является квадратичным критерием ошибки, то первая форма его существования будет минимумом критерия ошибки, вторая форма - минимумом критерия энергии и третья форма - минимумом стоимостного критерия. Первая вариация $d^{(1)}$ существует относительно z, u, x . Множитель Лагранжа также является переменным. При этом удовлетворяются условия существования уравнений (1).

Возьмем первую вариацию функционала (9) по переменной Лагранжа

$$d^{(1)} J^* = \int_0^T \left\{ 2(dz^T Q_0 z + du^T Q_2 u) + I^T (Adz + Bdu - dz) + \nabla_x W dx + I^T (\nabla_x Az + \nabla_x Bu + \nabla_x Df) dx + (Adz + Bdu + Df - \mathfrak{L}) dl \right\} dt. \quad (12)$$

Здесь ∇_x - градиент вектор - функции x . Проинтегрировав слагаемое $I^T d\mathfrak{L}$ и перегруппировав (12), получим

$$\int_0^T \left\{ dz^T (2Q_0 z + A^T I + \mathfrak{L}) + du^T (2Q_2 u + B^T I) + [\nabla_x W + I^T (\nabla_x Az + \nabla_x Bu + \nabla_x Df)] dx + (Az + Bu + Df - \mathfrak{L}) dl \right\} dt + I^T dz|_0^T = 0, \quad (13)$$

где учтена симметрия матриц M, C и K .

Поскольку вариации z, u, x независимы, то для выполнения условия (13) необходимо удовлетворение одновременно следующим четырем условиям за время T :

$$Az + Bu + Df - \mathfrak{L} = 0; \quad (14)$$

$$2Q_0 z + A^T I + \mathfrak{L} = 0; \quad (15)$$

$$2Q_2 u + B^T I = 0; \quad (16)$$

$$\nabla_x W + I^T (\nabla_x Az + \nabla_x Bu + \nabla_x Df) = 0. \quad (17)$$

Равенства (14-17) - система четырех уравнений с четырьмя неизвестными $z(t), u(t), x$ и $I(t)$. Причем если предположить, что значение вектора z известно при статической нагрузке в момент времени $t=0$, то тогда $dz(0)=0$ и уравнение (13) разрешимо относительно I при усло-

вии $I(T) = 0$. Другие виды граничных условий для z и λ также могут быть реализованы в зависимости от объектов управления.

Решение задачи. Система дифференциальных уравнений (14-17) нелинейна и может быть решена только численно. Одним из возможных вариантов является разбиение процедуры решения на две части. Во-первых, решается задача отыскания оптимального управления путем удовлетворения уравнениям (14-17) при фиксированном векторе параметров конструкции x^k . Затем процедура повторяется с измененными параметрами x^k до тех пор, пока не будет достигнут оптимум. Так процесс продолжается для $k=1,2,3,\dots$. Первая итерация при x^1 может быть выполнена при x_s согласно условию (8). Изложенная процедура решения является поэтому последовательностью оптимизаций активного управления связанной со структурной оптимизацией. Конструкционная переменная определяется в виде

$$x^{k+1} = x^k - a^k b_x^k, \quad (18)$$

где $b_x^k = (\nabla_x J^*)^k$ является градиентом функции Лагранжа, которая определяет направление изменения параметра; a^k - амплитуда. Градиент b_x может быть найден непосредственно из уравнения (12) в виде

$$b_x = \int_0^T \{ \nabla_x W + I^T (\nabla_x A z + \nabla_x B u + \nabla_x D f) \} dt. \quad (19)$$

Другим возможным способом оптимизации является метод крутого спуска [6], когда управляющие и конструкционные параметры оптимизируются одновременно с использованием выражений (18) и

$$u^{k+1} = u^k - a^k b_u^k, \quad (20)$$

где b_u - может быть определено из выражения

$$b_u = \nabla_u J^* = 2Q_2 u + B^T I. \quad (21)$$

Процесс решения начинается с выбора первоначальных значений u и x ; z и I определяются затем при решении уравнений (14-15). Далее отыскиваются b_x и b_u из (19, 21).

Следующим шагом является выбор амплитудного значения a^k определения u^k и x^k из соотношений (18), (20). Описанная процедура продолжается до тех пор, пока не будут удовлетворены условия $\|\nabla_u J^*\| = 0$ и $\|\nabla_x J^*\| = 0$ с требуемой степенью точности.. В обоих предложенных здесь случаях решения необходимо создавать алгоритм для выбора амплитуды a^k .

Пример. Рассмотрим пример построения алгоритма активного управления напряженно-деформированным состоянием двухсвязных пластин с использованием систем автоматического управления, включающих датчики перемещений, корректирующие звенья и исполнительные устройства. Расчетная схема представлена на рис.1.

Р и с.1. Двухсвязная пластинка с системой управления колебаниями в вертикальной плоскости:
1 – датчик перемещений; 2 – блок управления; 3 – датчик момента

Решаем задачу в линейной постановке: напряжения и деформации подчиняются закону Гука, регулятор имеет линейную характеристику. Задача управления в силу симметричного описания движения относительно одной координаты одномерна. Уравнение движения для этой системы с одной степенью свободы (СОС) может быть представлено в виде

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t), \quad (22)$$

где m представляет массу одной четвертой пластики ($m = M/4$), k и c являются линейными коэффициентами жесткости и демпфирования пластинки (рис.2), $f(t)$ - внешнее воздействие, а $y(t)$ означает движение точки приложения эквивалентной массы четверти пластинки по вертикали.

Для определенного возмущения $f(t)$ при известных структурных параметрах реакции СОС могут быть получены пошаговым итерационным методом. Нагрузка $f(t)$ складывается из статической нагрузки интенсивностью q и произвольного возмущения:

$$f(t) = q - m\ddot{y}_g, \quad (23)$$

где $\ddot{y}_g$ - ускорение возмущения.

Канонический вид уравнения (22) следующий:

$$\ddot{y} + 2\chi w \dot{y} + w^2 y = q - \ddot{y}_g, \quad (24)$$

где χ и w коэффициент демпфирования и собственная частота рассматриваемого участка бруса соответственно.

Если к рассматриваемой СОС будет присоединена система активного управления, то уравнения движения (24) преобразуются к виду

$$\ddot{y} + 2\chi w \dot{y} + w^2 y = u(t) + q - \ddot{y}_g, \quad (25)$$

где $u(t)$ - нормализованная управляющая сила на единицу массы.

Основной задачей проектирования системы управления является синтез оптимального регулятора $u(t)$, минимизирующего напряжения в брус. Поскольку задача управления решается полностью в линейной постановке, то при выборе типа регулятора остановимся на линейном квадратичном регуляторе (ЛКР) [7]. В ЛКР регулятор $u(t)$ реализует линейную функцию, зависящую от перемещения $y(t)$ и скорости перемещения $\dot{y}$ эквивалентной массы:

$$u(t) = g_y y + g_{\dot{y}} \dot{y}, \quad (26)$$

где g_y и $g_{\dot{y}}$ являются двумя константами обратной связи, которые могут быть найдены из условия минимума функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [g_y y^2(t) + g_{\dot{y}} \dot{y}^2 + r u^2(t)] dt, \quad (27)$$

где g_y , $g_{\dot{y}}$ и r - весовые коэффициенты. В (27) первое слагаемое представляет вибрационную энергию деформации бруса, второе слагаемое является ее кинетической энергией и третье – подводимая от внешнего источника энергия управления. Минимизация (27) обозначает, что общая энергия вибрации бруса будет минимизирована с использованием минимума подводимой извне энергии управления, что является идеальным оптимальным решением.

В соответствии с [4] найдены аналитические решения, определяющие постоянные g_y , $g_{\dot{y}}$,

$$g_y = -w^2(s_y - 1); \quad (28)$$

$$g_{\dot{y}} = -2\chi w(s_{\dot{y}} - 1), \quad (29)$$

где коэффициенты s_y и $s_{\dot{y}}$ находятся как

$$s_y = \sqrt{1 + \frac{(I_z/r)}{w^4}}; \quad (30)$$

$$s_{\dot{y}} = \sqrt{1 + \frac{(I_{\dot{y}}/r)}{4\chi^2 w^2} + \frac{(I_{\dot{y}} - 1)}{2\chi^2}}. \quad (31)$$

Подставляя выражения (30) и (31) последовательно в (28)-(29)-(26), выведем закон управления

$$u(t) = -w^2(s_y - 1)y(t) - 2\chi w(s_{\dot{y}} - 1)\dot{y}. \quad (32)$$

Р и с. 2. Эквивалентная схема четверти пластинки

Внося полученный закон регулирования в (25), получим уравнение движения управляемой системы:

$$\ddot{y} + 2\chi\omega_s \dot{y} + \omega_s^2 y = q - \ddot{y}_g. \quad (33)$$

Дальнейшими этапами проектирования управляющей СОСС, основанной на ЛКР, являются: вычисление реакции неуправляемой системы из уравнения (24) и решение вопроса о необходимости управления;

определение значений весовых коэффициентов $g_y, g_{\dot{y}}$ и r и представление в числах коэффициентов настройки системы s_y и $s_{\dot{y}}$ непосредственно из (30) и (31), если управление необходимо; нахождение реакции системы управления и требуемые управляющие моменты соответственно из (28) и (29);

решение об изменении реакций или потреблении энергии управления и, если необходимо, запуск следующего итерационного процесса.

Численная реализация примера синтеза регулятора для конструкции, изображенной на рис.1, была произведена для следующих параметров: $M = 20000$ Н, $e = 1/7$, $r = 25$. При этом величины ϵ и r входят в уравнение, описывающее наружный контур пластинки [7]:

$$x = r(\cos J + e \cos mJ); z = r(\sin J - e \sin mJ),$$

где J - параметр контура.

Принципиальная схема реализации задачи синтеза регулятора с помощью программы Matlab LQR представлена на рис.3.

Р и с. 3. Принципиальная схема реализации синтеза регулятора колебательного процесса двухсвязной пластины

Схема, изображенная на рис. 3, реализует синтез регулятора для уравнений движения в форме Коши вида:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -2000000x_1 - 2000x_2 + 0,04u, \quad u = -0,005x_1 - 0,0005x_2. \quad (34)$$

При воздействии на рассматриваемую конструкцию мгновенного возмущения переходный процесс будет иметь следующий вид, изображенный на рис.4. На этом рисунке по оси абсцисс отложено время в секундах, а по оси ординат – скорость изменения координаты в м/с и собственно координата перемещения ребра жесткости из плоскости. При этом собственно перемещения практически нет, что говорит о высоком качестве регулирования.

Р и с. 4. Переходный процесс в пластинке

Таким образом, решена задача управления колебательным процессом двухсвязной пластинки. Полученный результат показывает высокую эффективность управления. Однако при этом остается открытым вопрос о величине, затрачиваемой на управление энергии и связанной с этим стоимости рассматриваемого метода.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Уздалев А.И., Ковырягин М.А.* Определение перемещений точек контура плоской упругой области // Теоретические и экспериментальные исследования в области строительства: Сб. науч. тр. Саратов: СГУ, 1976. С.52-56.
2. *Овчинников И.Г., Ковырягин М.А.* Использование принципов активного управления конструкцией в транспортных сооружениях // Транспортное строительство. 2000. №6. С.7-9.
3. *Ковырягин М.А.* Новый подход к линейной фильтрации и предсказанию проблем / Перевод с англ. *R.E.Kalman*. // ASME. Journal of the Engineering. 1960. №3. P. 35-45. Перевод-201. ГОНТИ 603. 1969. 42с.
4. *Soong T. T.* Active Control: Theory and Practice. Longman Scientific and Technical. Essex, England, Wiley. New York., 1990.
5. *Soong T.T., Manolis D.B.* Active structures // Journal of structural engineering. V. 113. 1987. №11. P.2290-2310.
6. *Dineva P., Ivanova J., Hadjiov L.* On the choice if matrices Q, R and B in the optimal structural control problem // Proc. Int. Conf. Comput. Eng. Sci, Atlanta, Ga, Apr. 10-14, 1988. V. 2 / Comput. Mech.'88: Theory and Appl. Berlin. 1988. С. 47.IV.1. 47.IV.2.
7. *Ковырягин М.А.* Алгоритм активного управления напряженно-деформированным состоянием двухсвязных пластин // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: СГТУ, 2002. С.92-96.

Поступила 15.03.2003 г.