Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Ю. Ермоленко, Решение динамической задачи анизотропной теории упругости со смешанными краевыми условиями, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 86–88

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu145>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:42:16

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Построены квадратуры для решения третьей динамической задачи теории упругости. Материал тела предполагается однородным, анизотропным, обладающим линейными свойствами, а само тело имеет произвольную форму, конечные размеры и ограничено кусочно-гладкой поверхностью.

Рассмотрим динамическую краевую задачу линейной теории упругости третьего типа, когда на части поверхности деформируемого тела S_u заданы перемещения $u_{i0}(\mathbf{x}_S, t)$, а на остальной части S_s - поверхностные силы $P_i(\mathbf{x}_S, t)$:

$$\begin{aligned} S_{ij,j}(\mathbf{x}, t) + F_1(\mathbf{x}, t) &= r \ddot{u}_1(\mathbf{x}, t); \quad e_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \{u_{i,j}(\mathbf{x}, t) + u_{j,i}(\mathbf{x}, t)\}; \\ S_{ij}(\mathbf{x}, t) &= \Gamma_{ijpq} \cdot e_{pq}(\mathbf{x}, t); \quad u_i(\mathbf{x}, t)|_{S_u} = u_{i0}(\mathbf{x}_S, t); \\ S_{ij}(\mathbf{x}, t) n_j(\mathbf{x})|_{S_s} &= P_i(\mathbf{x}_S, t); \quad u_i(\mathbf{x}, t=0) = u_{i0}(\mathbf{x}); \\ u_i(\mathbf{x}, t=0) &= u_{i1}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1)$$

Материал деформируемого тела однороден и анизотропен.

Подвергнем систему равенств (1) преобразованию Лапласа по времени t :

$$\begin{aligned} S_{lm,m}^*(\mathbf{x}, p) - r p^2 u_1^*(\mathbf{x}, p) &= -F_1^*(\mathbf{x}, p) - p u_{10}(\mathbf{x}) - u_{11}(\mathbf{x}); \\ S_{lm}^*(\mathbf{x}, p) &= \Gamma_{lmnq} e_{nq}^*(\mathbf{x}, p); \quad e_{nq}^*(\mathbf{x}, p) = \frac{1}{2} (u_{n,q}^*(\mathbf{x}, p) + u_{q,n}^*(\mathbf{x}, p)); \\ u_i^*(\mathbf{x}_S, p) &= u_{i0}^*(\mathbf{x}_S, p); \quad S_{ij}^*(\mathbf{x}, p) n_j(\mathbf{x})|_{S_s} = P_i^*(\mathbf{x}_S, p). \end{aligned} \quad (2)$$

Используя фундаментальное решение, сведём неоднородную краевую задачу (2) к задаче однородной:

$$\begin{aligned} S_{lm,m}^*(\mathbf{x}, p) - r p^2 u_1^*(\mathbf{x}, p) &= 0; \\ S_{lm}^*(\mathbf{x}, p) &= \Gamma_{lmnq} e_{nq}^*(\mathbf{x}, p); \quad e_{nq}^*(\mathbf{x}, p) = \frac{1}{2} (u_{n,q}^*(\mathbf{x}, p) + u_{q,n}^*(\mathbf{x}, p)); \\ u_i^*(\mathbf{x}_S, p) &= u_{i0}^*(\mathbf{x}_S, p); \quad S_{ij}^*(\mathbf{x}, p) n_j(\mathbf{x})|_{S_s} = P_i^*(\mathbf{x}_S, p). \end{aligned} \quad (3)$$

При решении третьей краевой задачи (3) используем известные решения первой и второй краевых задач [1]. Применяя формулу Стокса и фундаментальное решение дифференциального уравнения краевой задачи, запишем её решение:

$$u_i^*(\mathbf{x}, p) = \int_S [K_{ij}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}_S, p) P_j^*(\mathbf{y}_S, p) - (s)_{ijq} (K^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}_S, p)) \cdot u_j^*(\mathbf{y}_S, p) n_q(\mathbf{y}_S)] dS. \quad (4)$$

Здесь оператор напряжений, действующий на фундаментальное решение $(\sigma)_{ijq} (K^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}_S, p))$, определяется соотношением

$$(s)_{ijq} (K^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}_S, p)) = \Gamma_{ijkh} \cdot \frac{1}{2} (K_{kq,h}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}_S, p) - K_{hq,k}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}_S, p)) = K_{ijq}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}_S, p). \quad (5)$$

Разделим всю поверхность тела S на части S_u, S_s . Тогда формула (4) примет вид

$$\begin{aligned} u_i^*(\mathbf{x}, p) &= \int_{S_u} [K_{ij}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}_S, p) \cdot P_j^*(\mathbf{y}_S, p) dS - \int_{S_s} (s)_{ijq} (K^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}_S, p)) \cdot u_j^*(\mathbf{y}_S, p) n_q(\mathbf{y}_S)] dS + \\ &+ \int_{S_s} [K_{ij}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}_S, p) \cdot P_j^*(\mathbf{y}_S, p) dS - \int_{S_u} (s)_{ijq} (K^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}_S, p)) u_j^*(\mathbf{y}_S, p) \cdot n_q(\mathbf{y}_S)] dS. \end{aligned} \quad (6)$$

Подвергнем соотношение (6) преобразованию Фурье:

$$\begin{aligned} u_i^*(\mathbf{k}, p) &= K_{ij}^{*u}(\mathbf{k}, p) P_j^{*u}(\mathbf{k}, p) + K_{ij}^{*s}(\mathbf{k}, p) P_j^{*s}(\mathbf{k}, p) - \\ &- (un)_{jq}^{*u}(\mathbf{k}, p) (s)_{ijq}^{*u}(\mathbf{k}, p) - (un)_{jq}^{*s}(\mathbf{k}, p) (s)_{ijq}^{*s}(\mathbf{k}, p). \end{aligned} \quad (7)$$

В соотношении (7) имеются неизвестные величины $P_j^*{}^u(\mathbf{k}, p)$ и $(un)^*{}_{jq}{}^\sigma(\mathbf{k}, p)$. Определим их, пользуясь известными решениями первой и второй краевых задач [1] теории упругости. Для этого запишем вектор перемещений - решение краевой задачи (3) - $u^*(\mathbf{x}, p)$ в виде объемного потенциала:

$$u_i^*(\mathbf{x}, p) = \int_{V_0} K_{ij}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) F_j^*(\mathbf{y}, p) d\mathbf{y}. \quad (8)$$

Здесь $F_j^*(\mathbf{y}, p)$ координаты вектора массовых сил, распространенных по объему V_0 , не имеющему общих точек с объемом V , занимаемым телом. Вектор перемещений, заданный соотношением (8), в силу свойств объемного потенциала удовлетворяет системе уравнений краевой задачи (3). Поэтому, чтобы (8) было решением задачи теории упругости (3), необходимо подобрать массовые силы $F^*(\mathbf{y}, p)$ таким образом, чтобы удовлетворялись краевые условия. Выполним это требование. Пусть в (8) $\mathbf{x}$ принадлежит поверхности S :

$$u_{i0}^*(\mathbf{x}_S, p) = \int_{V_0} K_{ij}^*(\mathbf{x}_S - \mathbf{y}, p) F_j^*(\mathbf{y}, p) d\mathbf{y}. \quad (9)$$

Умножим равенство (9) на $n_q(\mathbf{x}_S) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_S}$ и проинтегрируем по поверхности S - границе тела. Разделяя границу S на части S_u, S_σ , получим

$$(un)^*{}_{iq}{}^u(\mathbf{k}, p) + (un)^*{}_{iq}{}^\sigma(\mathbf{k}, p) = \int_S \int_{V_0} n_q(\mathbf{x}_S) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_S} K_{ij}^*(\mathbf{x}_S - \mathbf{y}, p) F_j^*(\mathbf{y}, p) d\mathbf{y} dS. \quad (10)$$

Применим к правой части равенства (10) формулу Остроградского – Гаусса:

$$(un)^*{}_{iq}{}^u(\mathbf{k}, p) + (un)^*{}_{iq}{}^\sigma(\mathbf{k}, p) = \int_V \int_{V_0} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} [ik_q K_{ij}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) + K_{ij,q}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p)] F_j^*(\mathbf{y}, p) d\mathbf{y} d\mathbf{x}. \quad (11)$$

Из соотношения (11), согласно теореме о свертке по объёму, найдём

$$(un)^*{}_{iq}{}^u(\mathbf{k}, p) + (un)^*{}_{iq}{}^\sigma(\mathbf{k}, p) = [ik_q K_{ij}^*(\mathbf{k}, p) + K_{ij,q}^*(\mathbf{k}, p)] F_j^*(\mathbf{k}, p). \quad (12)$$

Применяя теорему о свертке по конечной области к равенству (7), для Фурье - образа вектора перемещений получим

$$u_i^*(\mathbf{k}, p) = K_{ij}^*(\mathbf{k}, p) F_j^*(\mathbf{k}, p). \quad (13)$$

Преобразуем уравнение равновесия краевой задачи (3) по Фурье:

$$\int_V e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \cdot [\sigma_{ij,j}^*(\mathbf{x}, p) + \rho p^2 u_i^*(\mathbf{x}, p)] d\mathbf{x} = 0. \quad (14)$$

Интегрируя (14) по частям, получим

$$\int_V \frac{\nabla}{\nabla x_q} \{ e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \cdot \sigma_{pq}^*(\mathbf{x}, p) \} d\mathbf{x} + \int_V ik_q \cdot \sigma_{pq}^*(\mathbf{x}, p) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} + \int_V e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \rho p^2 u_i^*(\mathbf{x}, p) d\mathbf{x} = 0. \quad (15)$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса, преобразуем первый из интегралов в формуле (15) в интеграл по поверхности S :

$$\int_S P_p^*(\mathbf{x}_S, p) \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_S} dS + ik_q \sigma_{pq}^*(\mathbf{k}, p) - \rho p^2 u_p^*(\mathbf{k}, p) = 0. \quad (16)$$

Здесь $\sigma_{pq}^*(\mathbf{k})$ - есть Фурье- образ координат $\sigma_{pq}(\mathbf{x})$ тензора напряжений. Пользуясь соотношением (8) для составляющих тензора напряжений, получим

$$\sigma_{pq}^*(\mathbf{x}, p) = \int_{V_0} K_{pqm}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) F_m^*(\mathbf{y}, p) d\mathbf{y}. \quad (17)$$

В соотношении (17) ядро интегрального оператора разностное. Применим к нему преобразование Фурье и используем теорему о свертке по объёму:

$$\sigma_{pq}^*(\mathbf{k}, p) = K_{pqm}^*(\mathbf{k}, p) F_m^*(\mathbf{k}, p). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (16), получим

$$P_p^*(\mathbf{k}, p) = -ik_q K_{pqm}^*(\mathbf{k}, p) F_m^*(\mathbf{k}, p) + \rho p^2 u_p^*(\mathbf{k}, p). \quad (19)$$

Здесь $P_p^*(\mathbf{k}, p)$ - Фурье- образ поверхностной силы:

$$P_p^*(\mathbf{k}, p) = \int_S P_p^*(\mathbf{x}_S, p) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_S} dS. \quad (20)$$

Разделяя поверхность тела на части на S_u, S_σ , из (18) имеем

$$P_{j^u}^*(\mathbf{k}, p) + P_{j^s}^*(\mathbf{k}, p) = ik_q K_{jqm}^*(\mathbf{k}, p) F_m^*(\mathbf{k}, p) + p p^2 u_{j^u}^*(\mathbf{k}, p). \quad (21)$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся соотношениями (7), (12), (13) и (21):

$$K_{im}^*(\mathbf{k}, p) F_m^*(\mathbf{k}, p) = K_{ih}^*(\mathbf{k}, p) [ik_q K_{hqm}^*(\mathbf{k}, p) F_m^*(\mathbf{k}, p) - P_h^*(\mathbf{k}, p) + r p^2 K_{hl}^*(\mathbf{k}, p) F_l^*(\mathbf{k}, p)] \\ + K_{ij}^*(\mathbf{k}, p) P_j^*(\mathbf{k}, p) - (un)_{jq}^*(\mathbf{k}, p) (s)_{ijq}^*(\mathbf{k}, p) - \{ [ik_q K_{im}^*(\mathbf{k}, p) + \\ + K_{im,q}^*(\mathbf{k}, p)] F_m^*(\mathbf{k}, p) - (un)_{jq}^*(\mathbf{k}, p) (s)_{ijq}^*(\mathbf{k}, p) \}. \quad (22)$$

Выражение (22) может быть переписано в виде

$$\{ K_{im}^*(\mathbf{k}, p) - K_{ij}^*(\mathbf{k}, p) [ik_q K_{jqm}^*(\mathbf{k}, p) + r p^2 K_{jm}^*(\mathbf{k}, p) + [ik_q K_{im}^*(\mathbf{k}, p) + K_{im,q}^*(\mathbf{k}, p)] (s)_{imq}^*(\mathbf{k}, p) \} F_m^*(\mathbf{k}, p) = \\ = [K_{ij}^*(\mathbf{k}, p) - K_{ij}^*(\mathbf{k}, p)] P_j^*(\mathbf{k}, p) + [(s)_{ijq}^*(\mathbf{k}, p) - (s)_{ijq}^*(\mathbf{k}, p)] (un)_{jq}^*(\mathbf{k}, p). \quad (23)$$

Соотношение (23) содержит систему трёх уравнений ($m = 1, 2, 3$) для определения трёх неизвестных функций $F_m^*(\mathbf{k}, p)$ и является интегральным образом исходной краевой задачи. Введём матрицу $R_{mi}(\mathbf{k}, p)$, обратную матрице системы, и запишем решение, удовлетворяющее (23):

$$F_m^*(\mathbf{k}, p) = R_{mi}(\mathbf{k}, p) \{ [K_{ij}^*(\mathbf{k}, p) - K_{ij}^*(\mathbf{k}, p)] P_j^*(\mathbf{k}, p) + [(s)_{ijq}^*(\mathbf{k}, p) - (s)_{ijq}^*(\mathbf{k}, p)] (un)_{jq}^*(\mathbf{k}, p) \}. \quad (24)$$

Соотношения (8) и (24) позволяют записать решение исходной задачи (3) в виде

$$u_i^*(\mathbf{x}, p) = \int_{V_0} K_{im}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) \frac{1}{(2p)^3} \int_{R^n} e^{-ik \cdot \mathbf{y}} R_{mh}^*(\mathbf{k}, p) \{ [K_{hj}^*(\mathbf{k}, p) - \\ - K_{hj}^*(\mathbf{k}, p)] P_j^*(\mathbf{k}, p) + [(s)_{hjq}^*(\mathbf{k}, p) - (s)_{hjq}^*(\mathbf{k}, p)] (un)_{jq}^*(\mathbf{k}, p) \} d\mathbf{k} dy. \quad (25)$$

Используя (25), получим решение исходной задачи (1):

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \left\{ \int_{V_0} K_{im}^*(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) \left[\frac{1}{(2p)^3} \int_{R^n} e^{-ik \cdot \mathbf{y}} R_{mh}^*(\mathbf{k}, p) \times \right. \right. \\ \times \{ [K_{hj}^*(\mathbf{k}, p) - K_{hj}^*(\mathbf{k}, p)] P_j^*(\mathbf{k}, p) + [(s)_{hjq}^*(\mathbf{k}, p) - (s)_{hjq}^*(\mathbf{k}, p)] (un)_{jq}^*(\mathbf{k}, p) \} d\mathbf{k} - \\ \left. \left. [F_i^*(\mathbf{y}, p) + p u_{i0}(\mathbf{y}) + u_{i1}(\mathbf{y})] \right] dy \right\} dp. \quad (26)$$

Докажем, что квадратура (26) есть решение краевой задачи (1).

Т е о р е м а 1. Квадратура (26) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений краевой задачи (1).

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из свойств объёмного потенциала и из того, что соотношение (26) представляет собой объёмный потенциал.

Т е о р е м а 2. Квадратура (26) удовлетворяет краевым и начальным условиям задачи (1).

Доказательство. Поскольку квадратуры первой и второй краевых задач [1] являются частным случаем квадратуры (26) и для каждой из них доказано, что они удовлетворяют краевым и начальным условиям, то и данная квадратура также удовлетворяет краевым и начальным условиям.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ермоленко Г.Ю. Квадратуры решений первой и второй начально-краевых задач теории упругости для анизотропного материала // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С.326-330.

Поступила 20.02.2003 г.