Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ф. Кулагина, В. И. Иванова, Первая основная задача теории упругости для области, состоящей из полосы и полуплоскости, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 89–96

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:43:03

ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ПОЛОСЫ И ПОЛУПЛОСКОСТИ

Приведено решение первой основной задачи теории упругости для области, состоящей из однородно-изотропных полосы и полуплоскости, на общей границе которых заданы условия контакта с трением. Решение построено в пространстве почтипериодических в смысле Бора напряжений и перемещений с помощью обобщенного дискретного преобразования Фурье. Искомые функции представлены в виде рядов Фурье, сходящихся абсолютно и равномерно.

Почтипериодическим (п.п.) полиномом называется функция $p(t)$, $-\infty < t < \infty$, являющаяся линейной комбинацией функций вида e^{ilt} , где $I \in R$. Обозначим через Π_C замыкание по норме $L_\infty(-\infty, \infty)$ множества всех п. п. полиномов. Множество Π_C является подалгеброй $L_\infty(-\infty, \infty)$, состоящей из всех п.п. функций по Бору [1,2]. Через Π_W обозначим множество Π_C , состоящее из функций $A(t)$ вида

$$A(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{iI_n t}, \quad (1)$$

удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. Множество Π_W является банаховой алгеброй [3].

Каждой функции $A(t)$ из Π_W поставим в соответствие функцию

$$a(I) = M\{A(t)e^{-iIt}\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A(t)e^{-iIt} dt. \quad (2)$$

Такая функция существует и может быть отличной от нуля не более чем для счетного множества значений $I : I_1, I_2, \dots : a(I_n) = a_n \neq 0$ [4]. Таким образом, каждой функции из Π_W поставлена в соответствие функция $a(I)$ или последовательность пар $a(I) = \{(a_1, I_1), (a_2, I_2), \dots\}$, где $a_n \in C$, $I_n \in R$.

Если $A(t) \in \Pi_W$, то соответствующая этой функции последовательность $\{a_n\} \in l_1$ (будем говорить, что $a(I) \in l_1$). И наоборот, для каждой функции $a(I) \in l_1$ существует функция $A(t)$, для которой выполнено (2), и $A(t)$ имеет вид (1). Ряд (1) сходится абсолютно и равномерно при $-\infty < t < \infty$. Следовательно, установлено взаимнооднозначное соответствие между функциями из Π_W и двумерными последовательностями $a(I) \in l_1$. При этом мы считаем, что две последовательности $a(I)$, $b(I) \in l_1$ совпадают, если им соответствуют одни и те же функции, т.е. последовательность $a(I)$ не изменится, если к ней добавить счетное множество пар вида $(0, I)$.

Равенство (1), которое последовательности $a(I) \in l_1$ ставит в соответствие функцию $A(t) \in \Pi_W$, назовем обобщенным дискретным преобразованием Фурье (ОДФ). Равенство (2) производит обратное преобразование. Последовательность $a(I)$ – оригинал, функция $A(t)$ – изображение. ОДФ будем изображать символами $A(t) = W_0 a(I)$, $a(I) = W_0^{-1} A(t)$.

Коэффициенты последовательности $a(I)$ могут зависеть от параметра y : $a(I, y) = \{(a_1(y), I_1), (a_2(y), I_2), \dots\}$ $y \in [a, b]$. Если существует последовательность положительных чисел $\{a_n\} \in l_1$, такая, что $|a_n(y)| \leq a_n$, то функции $A(t, y) = W_0 a(I, y) \in \Pi_W$ на каждой горизонтальной прямой полосе $a \leq \text{Im } z \leq b$ ($z = t + iy$). Будем считать, что функция $A(t, y) \in \Pi_W^y$ ($y \in [a, b]$).

Постановка задачи. Область, состоящая из однородно-изотропной упругой полосы ($y \in [0; 1]$, $-\infty < x < \infty$) и такой же полуплоскости ($y \in (-\infty; 0]$, $-\infty < x < \infty$), находится в равновесии. На прямой соединения $y = 0$ заданы условия контакта с трением:

$$v^{(1)}(x, 0) = v^{(2)}(x, 0), \quad s_y^{(1)}(x, 0) = s_y^{(2)}(x, 0), \quad t_{xy}^{(1)}(x, 0) = t_{xy}^{(2)}(x, 0), \quad t_{xy}^{(1)}(x, 0) = K s_y^{(1)}(x, 0), \quad (3)$$

где $K = \text{const}$ – коэффициент трения.

На прямой $y = 1$ заданы граничные условия первого рода:

$$s_y^{(1)}(x, 1) = f(x), \quad t_{xy}^{(1)}(x, 1) = g(x). \quad (4)$$

Требуется найти напряжения $s_x^{(j)}(x, y)$, $s_y^{(j)}(x, y)$, $t_{xy}^{(j)}(x, y)$ и перемещения $u^{(j)}(x, y)$, $v^{(j)}(x, y)$ ($j=1,2$) в заданной области (здесь и далее верхний индекс 1 обозначает функции в полосе, индекс 2 – функции в полуплоскости).

Будем считать, что заданные функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат Π_w и представимы в виде рядов

$$f(x) = f_0 + \sum_{l \neq 0} f(l) e^{ilx}; \quad g(x) = g_0 + \sum_{l \neq 0} g(l) e^{ilx}, \quad (5)$$

причем последовательности $f(l)$ и $g(l)$ не сгущаются к нулю.

Решение задачи будем искать в таком классе, чтобы искомые механические параметры (напряжения и перемещения) принадлежали классу $\Pi_w^y (y \in [0;1])$ в полосе и классу $\Pi_w^y (y \in (-\infty;0])$ в полуплоскости, причем все искомые напряжения и перемещения в полуплоскости при $y \rightarrow -\infty$ равномерно стремятся к нулю.

Р е ш е н и е. Воспользуемся методом, основанным на применении функций Папковича-Нейбера [5]. Искомые механические параметры $s_x^{(j)}(x, y)$, $s_y^{(j)}(x, y)$, $t_{xy}^{(j)}(x, y)$, $u^{(j)}(x, y)$, $v^{(j)}(x, y)$ ($j=1,2$) выражаются через пары гармонических функций $\Phi_0^{(j)}(x, y)$ и $\Phi_2^{(j)}(x, y)$ по формулам

$$\begin{aligned} 2G^{(j)} u^{(j)}(x, y) &= -\frac{\partial F^{(j)}(x, y)}{\partial x}; \\ 2G^{(j)} v^{(j)}(x, y) &= -\frac{\partial F^{(j)}(x, y)}{\partial y} + 4(1 - n^{(j)}) \Phi_2^{(j)}(x, y); \\ s_x^{(j)}(x, y) &= -\frac{\partial^2 \Phi_0^{(j)}(x, y)}{\partial x^2} + 2n^{(j)} \frac{\partial \Phi_2^{(j)}(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial^2 \Phi_2^{(j)}(x, y)}{\partial x^2}; \\ t_{xy}^{(j)}(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi_0^{(j)}(x, y)}{\partial y} + y \frac{\partial \Phi_2^{(j)}(x, y)}{\partial y} \right] + (1 - 2n^{(j)}) \frac{\partial \Phi_2^{(j)}(x, y)}{\partial x}; \\ s_y^{(j)}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1 - n^{(j)}) \Phi_2^{(j)}(x, y) - \frac{\partial \Phi_0^{(j)}(x, y)}{\partial y} \right] - y \frac{\partial^2 \Phi_2^{(j)}(x, y)}{\partial y^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $F^{(j)}(x, y) = \Phi_0^{(j)}(x, y) + y \Phi_2^{(j)}(x, y)$; $n^{(j)}$ – коэффициент Пуассона; $G^{(j)}$ – модуль сдвига, $j=1,2$, их мы будем считать заданными постоянными величинами.

Чтобы искомые напряжения и перемещения принадлежали нужным классам, гармонические функции $\Phi_0^{(j)}(x, y)$ и $\Phi_2^{(j)}(x, y)$ ($j=1,2$) и их частные производные до второго порядка включительно должны принадлежать классу $\Pi_w^y (y \in [0;1])$ в полосе и классу $\Pi_w^y (y \in (-\infty;0])$ в полуплоскости.

Применяя к уравнению Лапласа преобразование W_0^{-1} и учитывая его свойства, нетрудно показать, что эти функции имеют следующую структуру:
в полосе

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(1)}(x, y) &= a_0^{(1)} + a_1^{(1)} y + \sum_{l \neq 0} (a^{(1)}(l) e^{ly} + b^{(1)}(l) e^{-ly}) e^{ilx}; \\ \Phi_2^{(1)}(x, y) &= c_0^{(1)} + c_1^{(1)} y + \sum_{l \neq 0} (c^{(1)}(l) e^{ly} + d^{(1)}(l) e^{-ly}) e^{ilx}, \end{aligned} \quad (7)$$

в полуплоскости

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(2)}(x, y) &= a_0^{(2)} + \sum_{l \neq 0} a^{(2)}(l) e^{l|y|} e^{ilx}; \\ \Phi_2^{(2)}(x, y) &= c_0^{(2)} + \sum_{l \neq 0} c^{(2)}(l) e^{l|y|} e^{ilx}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в формулы (6), получим выражение искомых функций в виде рядов Фурье с неизвестными коэффициентами $a^{(1)}(l)$, $b^{(1)}(l)$, $c^{(1)}(l)$, $d^{(1)}(l)$, $a^{(2)}(l)$, $c^{(2)}(l)$. В полосе

$$\begin{aligned}
2G^{(1)}u^{(1)}(x, y) &= -\sum_{l \neq 0} il \left(a^{(1)}(l)e^{ly} + b^{(1)}(l)e^{-ly} \right) e^{ilx} - y \sum_{l \neq 0} il \left(c^{(1)}(l)e^{ly} + d^{(1)}(l)e^{-ly} \right) e^{ilx}; \\
2G^{(1)}v^{(1)}(x, y) &= k^{(1)}c_0^{(1)} - a_1^{(1)} + k^{(1)}c_1^{(1)}y - c_1^{(1)}y - \sum_{l \neq 0} l \left(a^{(1)}(l)e^{ly} - b^{(1)}(l)e^{-ly} \right) e^{ilx} + \\
&\quad + \sum_{l \neq 0} \left(c^{(1)}(l)[k^{(1)} - l]e^{ly} + d^{(1)}(l)[k^{(1)} + l]e^{-ly} \right) e^{ilx}; \\
s_x^{(1)}(x, y) &= 2n^{(1)}c_1^{(1)} + \sum_{l \neq 0} l^2 \left(a^{(1)}(l)e^{ly} + b^{(1)}(l)e^{-ly} \right) e^{ilx} + \\
&\quad + \sum_{l \neq 0} l \left(c^{(1)}(l)[2n^{(1)} + l]e^{ly} + d^{(1)}(l)[-2n^{(1)} + l]e^{-ly} \right) e^{ilx}; \\
s_y^{(1)}(x, y) &= 2(1 - n^{(1)})c_1^{(1)} - \sum_{l \neq 0} l^2 \left(a^{(1)}(l)e^{ly} + b^{(1)}(l)e^{-ly} \right) e^{ilx} + \\
&\quad + \sum_{l \neq 0} l \left(c^{(1)}(l)[2 - 2n^{(1)} - l]e^{ly} - d^{(1)}(l)[2 - 2n^{(1)} + l]e^{-ly} \right) e^{ilx}; \\
t_{xy}^{(1)}(x, y) &= -\sum_{l \neq 0} il^2 \left(a^{(1)}(l)e^{ly} - b^{(1)}(l)e^{-ly} \right) e^{ilx} + \\
&\quad + \sum_{l \neq 0} il \left(c^{(1)}(l)[1 - 2n^{(1)} - l]e^{ly} + d^{(1)}(l)[1 - 2n^{(1)} + l]e^{-ly} \right) e^{ilx};
\end{aligned} \tag{9}$$

в полуплоскости

$$\begin{aligned}
2G^{(2)}u^{(2)}(x, y) &= -\sum_{l \neq 0} il a^{(2)}(l)e^{|l|y} e^{ilx} - y \sum_{l \neq 0} il c^{(2)}(l)e^{|l|y} e^{ilx}; \\
2G^{(2)}v^{(2)}(x, y) &= c_0^{(2)}k^{(2)} - \sum_{l \neq 0} |l| a^{(2)}(l)e^{|l|y} e^{ilx} + \sum_{l \neq 0} (k^{(2)} - |l|y) c^{(2)}(l)e^{|l|y} e^{ilx}; \\
s_x^{(2)}(x, y) &= \sum_{l \neq 0} (l^2 + 2n^{(2)}|l|) a^{(2)}(l)e^{|l|y} e^{ilx} + y \sum_{l \neq 0} l^2 c^{(2)}(l)e^{|l|y} e^{ilx}; \\
t_{xy}^{(2)}(x, y) &= -\sum_{l \neq 0} il |l| a^{(2)}(l)e^{|l|y} e^{ilx} + \sum_{l \neq 0} il (-y|l| + 1 - 2n^{(2)}) c^{(2)}(l)e^{|l|y} e^{ilx}; \\
s_y^{(2)}(x, y) &= -\sum_{l \neq 0} l^2 a^{(2)}(l)e^{|l|y} e^{ilx} - \sum_{l \neq 0} (yl^2 - 2(1 - n^{(2)})|l|) c^{(2)}(l)e^{|l|y} e^{ilx},
\end{aligned} \tag{10}$$

где $k^{(j)} = 3 - 4n^{(j)}$, $j = 1, 2$.

Используя условия контакта с трением (3) и граничные условия (4), получим уравнения для нахождения неизвестных коэффициентов $a^{(1)}(l)$, $b^{(1)}(l)$, $c^{(1)}(l)$, $d^{(1)}(l)$, $a^{(2)}(l)$, $c^{(2)}(l)$. При $l = 0$ имеем

$$\frac{k^{(1)}c_0^{(1)} - a_1^{(1)}}{2G^{(1)}} = \frac{k^{(2)}c_0^{(2)}}{2G^{(2)}}; \quad 2(1 - n^{(1)})c_1^{(1)} = f_0, \quad 2(1 - n^{(1)})c_1^{(1)} = 0, \quad g_0 = 0. \tag{11}$$

Из этого представления видно, что для разрешимости задачи необходимо (а далее будет показано, что и достаточно), чтобы $f_0 = g_0 = 0$, т.е.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(x) dx = 0, \tag{12}$$

тогда

$$c_1^{(1)} = 0, \quad c_0^{(2)} = \frac{G^{(2)}(k^{(1)}c_0^{(1)} - a_1^{(1)})}{G^{(1)}k^{(2)}}. \tag{13}$$

Если при постановке задачи считать заданным

$$k^{(1)}c_0^{(1)} - a_1^{(1)} = 2G^{(1)} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v^{(1)}(x, 0) dx, \tag{14}$$

то коэффициенты при $l = 0$ определяются однозначно.

При $l \neq 0$ получим систему из 6 линейных уравнений с шестью неизвестными, матричная запись которой имеет вид

$$M(I) \cdot s(I) = m(I), \quad (15)$$

где

$$M(I) = \begin{bmatrix} -Ie^I & -Ie^{-I} & (2-2n^{(1)}-I)e^I & -(2-2n^{(1)}+I)e^{-I} & 0 & 0 \\ -Ie^I & Ie^{-I} & (1-2n^{(1)}-I)e^I & (1-2n^{(1)}+I)e^{-I} & 0 & 0 \\ -\frac{I}{G^{(1)}} & \frac{I}{G^{(1)}} & \frac{k^{(1)}}{G^{(1)}} & \frac{k^{(1)}}{G^{(1)}} & \frac{|I|}{G^{(2)}} & -\frac{k^{(2)}}{G^{(2)}} \\ -I^2 & -I^2 & 2I(1-n^{(1)}) & -2I(1-n^{(1)}) & I^2 & -2|I|(1-n^{(2)}) \\ -I & I & 1-2n^{(1)} & 1-2n^{(1)} & |I| & -1+2n^{(2)} \\ (K-i)I & (K+i)I & i(1-2n^{(1)})-K(2-2n^{(1)}) & i(1-2n^{(1)})+K(2-2n^{(1)}) & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$s(I) = \text{col}\left(a^{(1)}(I), b^{(1)}(I), c^{(1)}(I), d^{(1)}(I), a^{(2)}(I), c^{(2)}(I)\right), \quad m(I) = \text{col}\left(\frac{f(I)}{I}, \frac{g(I)}{iI}, 0, 0, 0, 0\right).$$

Система (15) имеет единственное решение $s(I)$, если ее определитель $\Delta(I) = \det(M(I))$ отличен от нуля при $0 < |I| < \infty$. Учитывая линейную независимость функций $1, I, I^2, e^I, e^{-I}, Ie^I, Ie^{-I}$, легко показать, что строки определителя $\Delta(I)$ линейно независимы. Следовательно, $\Delta(I)$ не равен нулю при $0 < |I| < \infty$, поэтому система (15) имеет единственное решение, которое можно найти, например, по формулам Крамера.

Из структуры коэффициентов $a^{(1)}(I), b^{(1)}(I), c^{(1)}(I), d^{(1)}(I), a^{(2)}(I), c^{(2)}(I)$ следует, что если заданные функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат Π_W , то ряды в формулах (9) и (10) сходятся абсолютно и равномерно.

Итак, справедливо утверждение.

Т е о р е м а. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат Π_W и представимы в виде (5), причем последовательности $f(I)$ и $g(I)$ не сгущаются к нулю, и пусть выполнено условие (12) и задано (14). Тогда первая основная задача теории упругости (4) для горизонтальной однородно-изотропной упругой полосы $y \in [0;1], -\infty < x < \infty$ и такой же полуплоскости $y \in (-\infty;0], -\infty < x < \infty$, разделенных прямой $y=0$, на которой заданы условия контакта с трением (3), имеет единственное решение, где коэффициенты, входящие в формулы (9) и (10), находятся из (13) и (15).

Данная задача относилась к случаю плоской деформации. Для плоского напряженного состояния во всех формулах следует заменить $n^{(j)}$ на $\frac{n^{(j)}}{1+n^{(j)}}$, $j=1,2$.

П р и м е р. Рассмотрим плоское деформационное состояние однородноизотропной упругой полосы ($y \in [0;1], -\infty < x < \infty, n^{(1)}=0,3, G^{(1)}=7 \cdot 10^{10}$) и такой же полуплоскости ($y \in (-\infty;0], -\infty < x < \infty, n^{(1)}=0,4, G^{(1)}=9 \cdot 10^{10}$), на общей границе которых заданы условия контакта с трением (3), где $K=1,5$. Граничные функции в (4) заданы в следующем виде:

$$f(x) = \cos x - 2 \sin \sqrt{2}x + \cos px = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} - \frac{e^{i\sqrt{2}x} - e^{-i\sqrt{2}x}}{i} + \frac{e^{ipx} + e^{-ipx}}{2};$$

$$g(x) = -3 \sin x + 2 \cos \sqrt{2}x + 2 \sin px = -3 \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} + e^{i\sqrt{2}x} + e^{-i\sqrt{2}x} + \frac{e^{ipx} - e^{-ipx}}{i}.$$

$$\text{Для однозначности решения зададим в (14) } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v^{(1)}(x,0) dx = 0.$$

Решив систему (15) при $I = \pm 1, \pm \sqrt{2}, \pm p$, найдем соответствующие им коэффициенты $a^{(1)}(I), b^{(1)}(I), c^{(1)}(I), d^{(1)}(I), a^{(2)}(I), c^{(2)}(I)$ и, подставив их в формулы (9) и (10), получим искомые функции в полосе и полуплоскости:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x,y) = & -0,510 \cdot 10^{-11} e^y \sin x + 0,165 \cdot 10^{-12} e^y \cos x - 0,625 \cdot 10^{-11} e^{-y} \sin x + \\ & + 0,332 \cdot 10^{-11} e^{-y} \cos x + 0,101 \cdot 10^{-11} e^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x - 0,213 \cdot 10^{-11} e^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x + \\ & + 0,205 \cdot 10^{-10} e^{-\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + 0,73 \cdot 10^{-11} e^{-\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - 0,614 \cdot 10^{-12} e^{py} \sin px - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0,360 \cdot 10^{-13} e^{py} \cos px - 0,421 \cdot 10^{-12} e^{-py} \sin px - 0,249 \cdot 10^{-11} e^{-py} \cos px - \\
& -0,460 \cdot 10^{-11} ye^y \sin x - 0,203 \cdot 10^{-12} ye^y \cos x + 0,457 \cdot 10^{-11} ye^{-y} \sin x - \\
& -0,214 \cdot 10^{-11} ye^{-y} \cos x - 0,169 \cdot 10^{-11} ye^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + 0,618 \cdot 10^{-11} ye^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - \\
& -0,187 \cdot 10^{-10} ye^{-\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x - 0,570 \cdot 10^{-11} ye^{-\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x + 0,930 \cdot 10^{-12} ye^{py} \sin px + \\
& +0,483 \cdot 10^{-13} ye^{py} \cos px + 0,573 \cdot 10^{-12} ye^{-py} \sin px + 0,513 \cdot 10^{-11} ye^{-py} \cos px ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^{(1)}(x, y) = & -0,925 \cdot 10^{-13} e^{-py} \cos px - 0,637 \cdot 10^{-13} e^{py} \sin px + 0,460 \cdot 10^{-11} ye^y \cos x - \\
& -0,203 \cdot 10^{-12} ye^y \sin x + 0,214 \cdot 10^{-12} ye^{-y} \sin x + 0,169 \cdot 10^{-11} ye^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - \\
& -0,187 \cdot 10^{-10} ye^{-\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x + 0,570 \cdot 10^{-11} ye^{-\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x - 0,930 \cdot 10^{-12} ye^{py} \cos px + \\
& +0,483 \cdot 10^{-13} ye^{py} \sin px + 0,618 \cdot 10^{-11} ye^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + 0,457 \cdot 10^{-11} ye^{-y} \cos x + \\
& +0,573 \cdot 10^{-12} ye^{-py} \cos p - 0,513 \cdot 10^{-11} ye^{-py} \sin px - 0,332 \cdot 10^{-11} e^{-\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x + \\
& +0,253 \cdot 10^{-11} e^{-\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + 0,115 \cdot 10^{-11} e^{py} \cos px - 0,455 \cdot 10^{-12} e^{-py} \sin px + \\
& +0,534 \cdot 10^{-12} e^{-y} \sin x - 0,317 \cdot 10^{-11} e^y \cos x + 0,530 \cdot 10^{-12} e^y \sin x + \\
& +0,197 \cdot 10^{-11} e^{-y} \cos x - 0,316 \cdot 10^{-11} e^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - 0,999 \cdot 10^{-11} e^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_x^{(1)}(x, y) = & -0,233e^{-py} \cos px + 0,012e^{py} \sin px - 0,644ye^y \cos x + 0,028ye^y \sin x + \\
& +0,639ye^{-y} \cos x + 0,300ye^{-y} \sin x - 0,335ye^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - 1,22ye^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x - \\
& -3,71ye^{-\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x + 1,13ye^{-\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + 0,409ye^{py} \cos px - 0,021ye^{py} \sin px + \\
& +0,252ye^{-py} \cos px - 2,26ye^{-py} \sin px + 5,64e^{-\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - 1,42e^{-\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x - \\
& -0,192e^{py} \cos px + 1,53e^{-py} \sin px - 0,645e^{-y} \sin x - 1,10e^y \cos x - 0,006e^y \sin x - \\
& -1,26e^{-y} \cos x + 0,057e^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - 0,098e^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{xy}^{(1)}(x, y) = & 0,806e^{-py} \cos px - 0,322e^{py} \sin px - 0,644ye^y \sin x - 0,028ye^y \cos x - \\
& -0,639ye^{-y} \sin x + 0,300ye^{-y} \cos x - 0,335ye^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + 1,22ye^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x + \\
& +3,71ye^{-\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + 1,13ye^{-\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x + 0,409ye^{py} \sin px + 0,021ye^{py} \cos px - \\
& -0,252ye^{-py} \sin px - 2,26ye^{-py} \cos px - 0,617e^{-\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - 3,01e^{-\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x - \\
& -0,019e^{py} \cos px + 0,153e^{-py} \sin px + 0,619e^{-y} \sin x + 0,035e^y \cos x - 0,457e^y \sin x - \\
& -0,345e^{-y} \cos x - 0,767e^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x + 0,294e^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_y^{(1)}(x, y) = & -0,187e^y \cos x + 0,062e^y \sin x - 0,020e^{-y} \cos x + 0,045e^{-y} \sin x - 0,532e^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - \\
& -1,63e^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x - 0,391e^{-\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - 0,181e^{-\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + 0,452e^{py} \cos px - \\
& -0,025e^{py} \sin px + 0,072e^{-py} \cos px - 0,087e^{-py} \sin px + 0,644ye^y \cos x - \\
& -0,028ye^y \sin x - 0,639ye^{-y} \cos x - 0,300ye^{-y} \sin x + 0,335ye^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x + \\
& +1,22ye^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + 3,71ye^{-\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - 1,13ye^{-\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x - 0,409ye^{py} \cos px + \\
& +0,021ye^{py} \sin px - 0,252ye^{-py} \cos px + 2,26ye^{-py} \sin px ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(2)}(x, y) = & 0,849 \cdot 10^{-12} e^y \sin x - 0,229 \cdot 10^{-11} e^y \cos x - 0,135 \cdot 10^{-10} e^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x - \\
& -0,510 \cdot 10^{-11} e^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - 0,174 \cdot 10^{-12} e^{py} \sin px + 0,171 \cdot 10^{-11} e^{py} \cos px - \\
& -0,250 \cdot 10^{-12} ye^y \sin x - 0,232 \cdot 10^{-11} ye^y \cos x - 0,202 \cdot 10^{-10} ye^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + \\
& +0,238 \cdot 10^{-11} ye^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x + 0,198 \cdot 10^{-11} ye^{py} \sin px + 0,500 \cdot 10^{-11} ye^{py} \cos px ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v^{(2)}(x, y) = & -0,120 \cdot 10^{-11} e^y \cos x + 0,106 \cdot 10^{-11} e^y \sin x - 0,649 \cdot 10^{-11} e^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - \\
& -0,746 \cdot 10^{-11} e^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + 0,105 \cdot 10^{-11} e^{py} \cos px - 0,518 \cdot 10^{-12} e^{py} \sin px + \\
& + 0,250 \cdot 10^{-12} ye^y \cos x - 0,232 \cdot 10^{-11} ye^y \sin x + 0,202 \cdot 10^{-10} ye^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x + \\
& + 0,238 \cdot 10^{-11} ye^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x - 0,198 \cdot 10^{-11} ye^{py} \cos px + 0,500 \cdot 10^{-11} ye^{py} \sin px ; \\
s_x^{(2)}(x, y) = & 0,117 e^y \cos x + 0,729 e^y \sin x - 6,36 e^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x + 0,955 e^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + \\
& + 0,187 e^{py} \cos px - 1,69 e^{py} \sin px - 0,045 ye^y \cos x + 0,418 ye^y \sin x - \\
& - 5,15 ye^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - 0,607 ye^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + 1,12 ye^{py} \cos px - 2,83 ye^{py} \sin px ; \\
t_{xy}^{(2)}(x, y) = & 0,162 e^y \sin x - 0,310 e^y \cos x - 2,72 e^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x - 1,38 e^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - \\
& - 0,169 e^{py} \sin px + 0,788 e^{py} \cos px - 0,045 ye^y \sin x - 0,418 ye^y \cos x - \\
& - 5,15 ye^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + 0,607 ye^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x + 1,12 ye^{py} \sin px + 2,83 ye^{py} \cos px ; \\
s_y^{(2)}(x, y) = & -0,207 e^y \cos x + 0,108 e^y \sin x - 0,923 e^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x - 1,81 e^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x + \\
& + 0,525 e^{py} \cos px - 0,113 e^{py} \sin px + 0,045 ye^y \cos x - 0,418 ye^y \sin x + \\
& + 5,15 ye^{\sqrt{2}y} \cos \sqrt{2}x + 0,607 ye^{\sqrt{2}y} \sin \sqrt{2}x - 1,12 ye^{py} \cos px + 2,83 ye^{py} \sin px.
\end{aligned}$$

Графики функций при различных значениях y приведены на рис. 1-6.

Рис. 1

Рис. 2

Р и с. 3

Р и с. 4

Р и с. 5

Р и с. 6

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кулагина М.Ф. О некоторых бесконечных системах с разностными индексами // Изв. вузов. Математика. 1992. №3. С. 18-23.
2. Кулагина М.Ф. Об интегральных уравнениях в средних значениях в пространствах почти-периодических функций // Изв. вузов. Математика. 1993. №8. С. 19-29.
3. Гохберг И.П., Крупник Н.Л. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973. 423 с.
4. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953. 396 с.
5. Уфлянд Л.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 406 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00720).

Поступила 6.03.2003 г.