Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Ярдухин, Аналитическое решение задачи взаимодействия межфазной трещины с отслоившимся межфазным включением при наличии сосредоточенных сил, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 107–110

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu148>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:27:12

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ С ОТСЛОИВШИМСЯ МЕЖФАЗНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

В рамках линейной теории упругости решается задача взаимодействия межфазной трещины и полностью отслоившегося тонкого жесткого гладкого остроугольного межфазного включения, расположенных на линии соединения двух разных по упругим свойствам полуплоскостей. Рассматривается плоское напряженное состояние при наличии нагрузок на бесконечности и конечного числа сосредоточенных сил, приложенных к внутренним точкам упругих полуплоскостей. В явной форме строятся комплексные потенциалы, описывающие напряженное состояние составной плоскости.

Пусть в кусочно-однородной упругой плоскости, составленной из двух различных по упругим свойствам верхней и нижней полуплоскостей, на линии раздела сред расположены открытая трещина $[a, b]$, берега которой свободны от напряжений

$$(s_y - it_{xy})^\pm(t) = 0, \quad t \in (a, b), \quad (1)$$

и полностью отслоившееся тонкое жесткое остроугольное включение $[c, d]$

$$t_{xy}^\pm(t) = 0, \quad (v'_x)^\pm(t) = 0, \quad t \in (c, d). \quad (2)$$

Верхняя полуплоскость имеет модуль сдвига m_1 и коэффициент Пуассона n_1 , нижняя – m_2 и n_2 . Вне трещины и включения полуплоскости жестко соединены друг с другом. В конечном числе точек z_k , $k = 1, 2, \dots, n$, не лежащих на линии раздела сред ($\text{Im } z_k \neq 0$), приложены сосредоточенные силы $X_k + iY_k$ и сосредоточенные пары сил с моментами M_k относительно точки приложения. Также известны значения напряжений и вращения на бесконечности:

$$s_{y1}^\infty = s_{y2}^\infty = s_y^\infty; \quad t_{xy1}^\infty = t_{xy2}^\infty = t_{xy}^\infty; \quad s_{x1}^\infty, \quad s_{x2}^\infty \quad \text{и} \quad e_{x1}^\infty, \quad e_{x2}^\infty,$$

связанные между собой условиями неразрывности [1].

Требуется найти плоское напряженное состояние составной плоскости.

Частный случай поставленной задачи решен в работе [2].

Рассмотрим сначала случай, когда в единственной точке z_0 ($\text{Im } z_0 \neq 0$) приложена сосредоточенная сила $X_0 + iY_0$ и сосредоточенная пара сил с моментом M_0 относительно z_0 . Воспользуемся формулами Колосова-Мусхелишвили для кусочно-однородной плоскости [3]:

$$\begin{aligned} s_x + s_y &= 4\text{Re}\Phi(z); & s_y - it_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}; \\ 2me &= (1 + k_1)\text{Im}\Phi(z); & 2m(u + iv)'_x &= k_1\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \end{aligned} \quad (3)$$

в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$,

$$\begin{aligned} s_x + s_y &= 4\text{Re}F(z); & s_y - it_{xy} &= F(z) + s_3\Omega(\bar{z}) + s_4\Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{F'(z)}; \\ 2m_2e &= (1 + k_2)\text{Im}F(z); & 2m_2(u + iv)'_x &= k_2F(z) - s_3\Omega(\bar{z}) - s_4\Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{F'(z)}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$F(z) = s_1\Phi(z) + s_2\Omega(z); \quad s_1 = \frac{m_1 + m_2k_1}{m_1(1 + k_2)}; \quad s_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1(1 + k_2)}; \quad s_3 = \frac{m_2 + m_1k_2}{m_1(1 + k_2)}; \quad s_4 = \frac{m_1k_2 - m_2k_1}{m_1(1 + k_2)}$$

в нижней полуплоскости $\text{Im } z < 0$. Функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ – кусочно-голоморфные с линией разрыва $L = [a, b] \cup [c, d]$, допускающие на концах линии особенности интегрируемого характера и имеющие в окрестности ∞ вид:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= g_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2k_1} \cdot \frac{X_0 + iY_0}{2pz} + O(z^{-2}); & \Omega(z) &= g_2 + \frac{m_1k_2}{m_2 + m_1k_2} \cdot \frac{X_0 + iY_0}{2pz} + O(z^{-2}); \\ g_1 &= (s_{x1}^\infty + s_y^\infty)/4 + i \cdot 2me_1^\infty(1 + k_1)^{-1}; & g_2 &= s_y^\infty - it_{xy}^\infty - g_1. \end{aligned}$$

Кроме того, если $\text{Im } z_0 > 0$, то в окрестности точки z_0 имеем

$$\Phi(z) = \frac{P_1}{z - z_0} + O(1), \quad \Omega(z) = -\frac{s_4}{s_3} \cdot \frac{P_1}{z - z_0} + O(1); \quad P_1 = -\frac{X_0 + iY_0}{2p(1 + k_1)},$$

а в окрестности точки $\bar{z}_0$ –

$$\Phi(z) = -\frac{s_2}{s_1}\Omega(z) + O(1); \quad \Omega(z) = \frac{\bar{P}_1 - k_1 P_1}{z - \bar{z}_0} + \frac{(z_0 - \bar{z}_0)\bar{P}_1 - Q}{(z - \bar{z}_0)^2} + O(1), \quad Q = -\frac{iM_0}{2p}.$$

Если же $\text{Im } z_0 < 0$, то в окрестности точки z_0 функция $\Omega(z)$ голоморфна,

$$\Phi(z) = s_1^{-1}P_2(z - z_0)^{-1} + O(1),$$

а в окрестности точки $\bar{z}_0$ функция $\Phi(z)$ голоморфна, функция

$$\Omega(z) = \frac{1}{s_3} \left(\frac{\bar{P}_2 - k_2 P_2}{z - \bar{z}_0} + \frac{(z_0 - \bar{z}_0)\bar{P}_2 - Q}{(z - \bar{z}_0)^2} \right) + O(1); \quad P_2 = -\frac{X_0 + iY_0}{2p(1 + k_2)}.$$

На основании формул (3), (4) из условий (1), (2) для нахождения функций $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ получим краевые условия вида

$$\Phi^+(t) + \Omega^-(t) = 0; \quad s_1 \Phi^-(t) + s_2 \Omega^-(t) + s_3 \Omega^+(t) + s_4 \Phi^+(t) = 0 \quad \text{при } t \in (a, b);$$

$$\text{Im}(\Phi^+(t) + \Omega^-(t)) = 0; \quad \text{Im}(s_1 \Phi^-(t) + s_2 \Omega^-(t) + s_3 \Omega^+(t) + s_4 \Phi^+(t)) = 0; \quad (5)$$

$$\text{Im}(k_1 \Phi^+(t) - \Omega^-(t)) = 0; \quad \text{Im}(k_2 s_1 \Phi^-(t) + k_2 s_2 \Omega^-(t) - s_3 \Omega^+(t) - s_4 \Phi^+(t)) = 0 \quad \text{при } t \in (c, d).$$

Введем в рассмотрение новые функции:

$$F_1(z) = s_1 \Phi(z) - s_3 \Omega(z); \quad F_2(z) = \Phi(z) + \Omega(z).$$

Тогда если $\text{Im } z_0 > 0$, то

$$F_1(z) = P_1(z - z_0)^{-1} + O(1); \quad F_2(z) = (1 - s_4 s_3^{-1}) \cdot F_1(z) + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow z_0;$$

$$F_1(z) = \frac{k_1 P_1 - \bar{P}_1}{z - \bar{z}_0} + \frac{Q - (z_0 - \bar{z}_0)\bar{P}_1}{(z - \bar{z}_0)^2} + O(1); \quad F_2(z) = (1 - s_4 s_3^{-1}) \cdot F_1(z) + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow \bar{z}_0; \quad (6)$$

а если $\text{Im } z_0 < 0$, то

$$F_1(z) = P_2(z - z_0)^{-1} + O(1); \quad F_2(z) = s_1^{-1} \cdot F_1(z) + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow z_0;$$

$$F_1(z) = \frac{k_2 P_2 - \bar{P}_2}{z - \bar{z}_0} + \frac{Q - (z_0 - \bar{z}_0)\bar{P}_2}{(z - \bar{z}_0)^2} + O(1); \quad F_2(z) = -\frac{1}{s_3} F_1(z) + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow \bar{z}_0. \quad (7)$$

В окрестности ∞ эти функции имеют вид

$$F_1(z) = s_1 g_1 - s_3 g_2 - \frac{X_0 + iY_0}{2p z} + O(z^{-2});$$

$$F_2(z) = s_y^\infty - it_{xy}^\infty + \frac{m_1 m_2 (k_1 k_2 - 1)}{(m_1 + m_2 k_1)(m_2 + m_1 k_2)} \cdot \frac{X_0 + iY_0}{2p z} + O(z^{-2}). \quad (8)$$

Из (5) для нахождения функций $F_1(z)$, $F_2(z)$ следуют две отдельные краевые задачи:

$$F_1^+(t) - F_1^-(t) = 0, \quad t \in (a, b), \quad \text{Im } F_1^\pm(t) = 0, \quad t \in (c, d); \quad (9)$$

$$F_2^+(t) + m F_2^-(t) = 0, \quad t \in (a, b), \quad \text{Im } F_2^\pm(t) = 0, \quad t \in (c, d). \quad (10)$$

Обе задачи представляют собой комбинацию краевой задачи Римана и краевой задачи Гильберта. Для решения задачи (9), следуя [4], на двулистной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ для функции $w(z) = \sqrt{(z - c)(z - d)}$, листы которой склеены друг с другом крест-накрест вдоль берегов разреза $[c, d]$, введем функцию

$$F_1(z) = \begin{cases} F_1(z), & z \in \mathbf{C}_1, \\ \overline{F_1(z_*)}, & z \in \mathbf{C}_2, \end{cases} \quad (11)$$

где $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ – верхний и нижний листы поверхности соответственно; z_* – точка, симметричная с точкой z относительно линии L соединения листов поверхности, состоящей из верхнего $[c, d]^+$ и нижнего $[d, c]^-$ берегов разреза $[c, d]$, обходимых так, что при этом верхний лист поверхности остается слева.

Тогда для нахождения функции $F_1(z)$ на поверхности $\mathfrak{R}$ получим

$$F_1^+(t) = F_1^-(t), \quad t \in g \cup g_* \cup L, \quad \gamma = (a, b) \subset \mathbf{C}_1, \quad \gamma_* = (a, b) \subset \mathbf{C}_2, \quad L = [c, d]^+ \cup [d, c]^-,$$

т. е. $F_1(z)$ является мероморфной функцией на $\mathfrak{R}$, имеющей полюсы второго порядка в точках с аффиксами z_0 , $\bar{z}_0$ на обоих листах поверхности и простые полюса в точках ветвления поверхности. Такая функция имеет вид

$$F_1(z) = A_1 + \frac{A_2 + A_3 z}{w(z)} + \frac{B_1}{z - z_0} + \frac{B_2}{z - \bar{z}_0} + \frac{C_1}{(z - z_0)^2} + \frac{C_2}{(z - \bar{z}_0)^2} + \\ + w(z) \left(\frac{D_1}{z - z_0} + \frac{D_2}{z - \bar{z}_0} + \frac{E_1}{(z - z_0)^2} + \frac{E_2}{(z - \bar{z}_0)^2} \right).$$

Из условия симметрии $\overline{F_1(z_*)} = F_1(z)$ следует, что $A_1 = \bar{A}_1$, $A_2 = -\bar{A}_2$, $A_3 = -\bar{A}_3$, $B_2 = \bar{B}_1$, $C_2 = \bar{C}_1$, $D_2 = -\bar{D}_1$, $E_2 = -\bar{E}_1$. Тогда, в силу (11) имеем

$$F_1(z) = A_1 + i \frac{A_2 + A_3 z}{w(z)} + \frac{B_1}{z - z_0} + \frac{\bar{B}_1}{z - \bar{z}_0} + \frac{C_1}{(z - z_0)^2} + \frac{\bar{C}_1}{(z - \bar{z}_0)^2} + \\ + w(z) \left(\frac{D_1}{z - z_0} - \frac{\bar{D}_1}{z - \bar{z}_0} + \frac{E_1}{(z - z_0)^2} - \frac{\bar{E}_1}{(z - \bar{z}_0)^2} \right),$$

где A_1, A_2, A_3 – действительные числа; B_1, C_1, D_1, E_1 – комплексные. Разлагая функцию $F_1(z)$ в ряд Лорана в окрестности ∞ и используя условия (6) – (8), найдем

$$A_1 = \operatorname{Re}(s_1 g_1 - s_3 g_2); \quad A_3 = \operatorname{Im}(s_1 g_1 - s_3 g_2 - 2D_1); \\ A_2 = -Y_0/(2p) - \frac{c+d}{2} \operatorname{Im}(s_1 g_1 - s_3 g_2 - 4D_1) - 2 \operatorname{Im}(B_1 + z_0 D_1 + E_1); \\ B_1 = \frac{P_0 + Q_0}{2}; \quad C_1 = \frac{R_0}{2}; \quad D_1 = \frac{1}{2w(z_0)} \left(P_0 - Q_0 + \frac{w'(z_0)}{w(z_0)} R_0 \right); \quad E_1 = -\frac{R_0}{2w(z_0)}; \\ P_0 = P_1, \quad Q_0 = \frac{iY_0}{2p} - \frac{X_0}{2p} \cdot \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1}; \quad R_0 = \frac{iM_0}{2p} + (z_0 - \bar{z}_0)P_1, \quad \text{если } \operatorname{Im} z_0 > 0; \\ P_0 = P_2, \quad Q_0 = \frac{iY_0}{2p} - \frac{X_0}{2p} \cdot \frac{k_2 - 1}{k_2 + 1}; \quad R_0 = \frac{iM_0}{2p} + (z_0 - \bar{z}_0)P_2, \quad \text{если } \operatorname{Im} z_0 < 0.$$

Аналогично, вводя на $\Re$ функцию

$$F_2(z) = \begin{cases} F_2(z), & z \in \mathbf{C}_1; \\ \overline{F_2(z_*)}, & z \in \mathbf{C}_2, \end{cases}$$

из (10) для ее нахождения получим однородную краевую задачу Римана

$$F_2^+(t) + mF_2^-(t) = 0, \quad t \in g, \quad mF_2^+(t) + F_2^-(t) = 0, \quad t \in g_*, \quad F_2^+(t) - F_2^-(t) = 0, \quad t \in L.$$

Решение этой задачи, ограниченное на бесконечности, удовлетворяющее условию симметрии $\overline{F_2(z_*)} = F_2(z)$, имеющее полюсы второго порядка в точках с аффиксами $z_0, \bar{z}_0$ на обоих листах поверхности и простые полюса в точках ветвления поверхности, имеет вид

$$F_2(z) = c(z) \left[A'_1 + A'_2 z + i \frac{A'_3 + A'_4 z + A'_5 z^2}{w(z)} + \frac{B'_1}{z - z_0} + \frac{\bar{B}'_1}{z - \bar{z}_0} + \right. \\ \left. + \frac{C'_1}{(z - z_0)^2} + \frac{\bar{C}'_1}{(z - \bar{z}_0)^2} + w(z) \left(\frac{D'_1}{z - z_0} - \frac{\bar{D}'_1}{z - \bar{z}_0} + \frac{E'_1}{(z - z_0)^2} - \frac{\bar{E}'_1}{(z - \bar{z}_0)^2} \right) \right], \\ c(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left(\frac{z-a-w(z)+w(a)}{z-b-w(z)+w(b)} \cdot \frac{z-b+w(z)+w(b)}{z-a+w(z)+w(a)} \right)^{ib},$$

где $b = (\ln m)/(2p)$, все A'_k – действительные, B'_1, C'_1, D'_1, E'_1 – комплексные числа. Снова, разлагая функцию $F_2(z)$ в ряд Лорана в окрестности ∞ и используя условия (6) – (8), найдем,

$$A'_2 = s_y^\infty H'_0 - t_{xy}^\infty H''_0; \quad A'_5 = -t_{xy}^\infty H'_0 - s_y^\infty H''_0; \quad A'_1 = H_1 H'_0 + H_2 H''_0; \\ A'_4 = H_2 H'_0 - H_1 H''_0 - \frac{c+d}{2} A'_5 - 2 \operatorname{Im} D'_1; \quad C'_1 = R'_0 \left(2 \overline{c(\bar{z}_0)} \right)^{-1}; \quad E'_1 = -R'_0 \left(2 w(z_0) \overline{c(\bar{z}_0)} \right)^{-1}; \\ B'_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{T_1}{c(z_0)} + \frac{T_2}{c(\bar{z}_0)} \right); \quad D'_1 = \frac{1}{2w(z_0)} \cdot \left(\frac{T_1}{c(z_0)} - \frac{T_2}{c(\bar{z}_0)} \right); \quad H_0 = H'_0 + iH''_0 = \left(\frac{c+d-2a-2w(a)}{c+d-2b-2w(b)} \right)^{ib}; \\ H_1 = -A'_2 N'_0 + A'_5 N''_0 - s_5 X_0/(2p); \quad H_2 = -A'_5 N'_0 - A'_2 N''_0 + s_5 Y_0/(2p); \\ N'_0 + iN''_0 = \frac{H_0}{2} \left[a + b + ib(a-b+w(a)-w(b)) \left(1 + \frac{(c-d)^2}{(c+d-2a-2w(a))(c+d-2b-2w(b))} \right) \right];$$

$$w(z) = \sqrt{(z-c)(z-d)}; \quad s_5 = \frac{m_1 m_2 (k_1 k_2 - 1)}{(m_1 + m_2 k_1)(m_2 + m_1 k_2)};$$

$$T_1 = P'_0 - C'_1 c'(z_0) - E'_1 (c'(z_0)w(z_0) + c(z_0)w'(z_0));$$

$$T_2 = Q'_0 - C'_1 \overline{c'(\bar{z}_0)} - E'_1 (\overline{c'(\bar{z}_0)}w(z_0) + \overline{c(\bar{z}_0)}w'(z_0));$$

$$P'_0 = (1 - s_4 s_3^{-1})P_1, \quad Q'_0 = (s_2 s_1^{-1} - 1)Q_0, \quad R'_0 = (s_2 s_1^{-1} - 1) \cdot (iM_0/(2p) + (z_0 - \bar{z}_0)P_1), \text{ если } \operatorname{Im} z_0 > 0;$$

$$P'_0 = s_1^{-1}P_2, \quad Q'_0 = -s_3^{-1}Q_0, \quad R'_0 = -s_3^{-1} \cdot (iM_0/(2p) + (z_0 - \bar{z}_0)P_2), \text{ если } \operatorname{Im} z_0 < 0.$$

Для нахождения последней постоянной A'_3 используется условие однозначности горизонтальных смещений при обходе трещины или включения:

$$\operatorname{Re} \int (s_5 (F_1^+(t) - F_1^-(t)) + F_2^+(t) - F_2^-(t)) dt = 0, \quad (12)$$

где интеграл берется по отрезку $[a, b]$ или $[c, d]$.

В общем случае, при наличии конечного числа точек $z_k, k = 1, 2, \dots, n$, к которым приложены сосредоточенные силы $X_k + iY_k$ и сосредоточенные пары сил с моментами M_k относительно точки приложения, функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} F_1(z) = & A_1 + i \frac{A_2 + A_3 z}{w(z)} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{B_k}{z - z_k} + \frac{\bar{B}_k}{z - \bar{z}_k} + \frac{C_k}{(z - z_k)^2} + \frac{\bar{C}_k}{(z - \bar{z}_k)^2} \right) + \\ & + w(z) \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{D_k}{z - z_k} - \frac{\bar{D}_k}{z - \bar{z}_k} + \frac{E_k}{(z - z_k)^2} - \frac{\bar{E}_k}{(z - \bar{z}_k)^2} \right) \\ F_2(z) = & c(z) \left[A'_1 + A'_2 z + i \frac{A'_3 + A'_4 z + A'_5 z^2}{w(z)} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{B'_k}{z - z_k} + \frac{\bar{B}'_k}{z - \bar{z}_k} + \frac{C'_k}{(z - z_k)^2} + \frac{\bar{C}'_k}{(z - \bar{z}_k)^2} \right) + \right. \\ & \left. + w(z) \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{D'_k}{z - z_k} - \frac{\bar{D}'_k}{z - \bar{z}_k} + \frac{E'_k}{(z - z_k)^2} - \frac{\bar{E}'_k}{(z - \bar{z}_k)^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Для нахождения постоянных, входящих в решение задачи, используются представления этих функций в окрестности каждой из точек z_k , в окрестности ∞ , а также условие (12).

Полученные результаты можно использовать для исследования на прочность слоистых композиционных материалов с трещинами и отслоившимися включениями на линии раздела сред, которые, как правило, остаются в материале при его изготовлении и/или появляются в процессе его эксплуатации, например из-за отслоения армирующих элементов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Rice J.R., Sih G.C. Plane problems of cracks in dissimilar media // Transactions of ASME. Journal of Applied Mechanics. 1965. V. 32. № 2. P. 418-423.
2. Сильвестров В.В., Ярдохин А.К. Межфазная трещина и отслоившееся тонкое жесткое гладкое межфазное включение при сложном нагружении // Проблемы механики неупругих деформаций: Сб. науч. ст. к 70-летию Д.Д. Ивлева. М.: Физматлит, 2001. С. 301-313.
3. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
4. Зверович Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций в гильбертовских классах на римановых поверхностях // УМН. 1971. Т. 26. Вып. 1. С. 113-179.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 01-01-00720 и 03-01-06275.

Поступила 7.06.2003 г.