Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Астафьев, Особенности применения метода наименьших квадратов при построении моделей неупругого деформирования, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998, выпуск 6, 126–129

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu15>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 15:18:15

Механика деформируемого тела

УДК 539.3-519

А.Ю. Астафьев

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛЕЙ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Проанализированы особенности применения МНК к аппроксимации диаграмм механических испытаний в условиях разброса данных. Даны рекомендации по снижению отрицательных последствий формального применения МНК к реальным экспериментальным значениям.

Одним из важных методов приближения функций является метод наименьших квадратов (МНК), который для выражений определённого вида обеспечивает наилучшее приближение к исходным данным. В данной работе анализируются особенности его применения при автоматизированной обработке экспериментальных данных в механике деформируемого твёрдого тела, в частности, при аппроксимации диаграмм упругопластического деформирования и кривых ползучести. Как известно, указанные процессы имеют существенный разброс экспериментальных данных [1-3], что приводит к неадекватности результатов после чисто формального применения МНК.

В подавляющем большинстве работ по пластичности, ползучести, длительной прочности, усталости для соответствующих аппроксимаций широко используют степенные или экспоненциальные функции [1-6]. Однако для таких классов функций рекомендуется искать минимум квадратов отклонений не для исходной задачи, которая имеет нелинейный характер, а для приведённой линейной задачи, когда правые и левые части соответствующих функциональных зависимостей логарифмируются [7]. Такой переход обусловлен в основном двумя причинами:

- 1) в математическом плане решение линейной системы проще, чем нелинейной;
- 2) для линейной модели сравнительно легко находятся стохастические оценки соответствующих параметров.

Однако эти две задачи в математическом плане не являются эквивалентными и в условиях разброса данных могут дать совершенно различные результаты. Проанализируем влияние разброса данных на результат при применении МНК. Пусть даны экспериментальные данные множеством пар значений

$(x_i, y_i) \quad i = 1, N$ и предположим, что аппроксимирующая функция выбирается в виде $y = a \cdot x^n$, где коэффициенты a, n подлежат определению. Согласно МНК должно выполняться условие

$$\sum (y_i - a \cdot x_i^n)^2 \rightarrow \min. \quad (1)$$

Дифференцируя по a, n и приравнявая нулю частные производные, получаем систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \sum (y_i - a \cdot x_i^n) x_i^n = 0, \\ \sum (y_i - a \cdot x_i^n) x_i^n \ln(x_i) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для упрощения расчётов в МНК левая и правая части функции $y = a \cdot x^n$ логарифмируются [7]. В этом случае должно выполняться условие

$$\sum (\ln(y_i) - \ln(a) - n \ln(x_i))^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

Тогда для неизвестных $\ln(a)$ и n получаем линейную систему уравнений вида

$$\begin{cases} N \ln(a) + n \sum_i \ln(x_i) = \sum_i \ln(y_i); \\ \ln(a) \sum_i \ln(x_i) + n \sum_i \ln^2(x_i) = \sum_i \ln(x_i) \ln(y_i). \end{cases} \quad (4)$$

Очевидно, что решения систем (2) и (4) не совпадают, на что указывалось в [8]. Выполним анализ разброса на результат на примере системы (4). По формулам Крамера имеем для показателя нелинейности

$$n = \frac{\Delta n}{\Delta}, \text{ где } \Delta n \text{ и } \Delta \text{ имеют значения}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} N & \sum_i^N \ln(x_i) \\ \sum_i^N \ln(x_i) & \sum_i^N \ln^2(x_i) \end{vmatrix} = N^2 \left(\frac{\sum_i^N \ln^2(x_i)}{N} - \left(\frac{\sum_i^N \ln(x_i)}{N} \right)^2 \right) =$$

$$= N^2 (M(\ln^2(x_i)) - M^2(\ln(x_i))) = N^2 D(\ln(x_i)) \geq 0;$$

$$\Delta n = \begin{vmatrix} N & \sum_i^N \ln(y_i) \\ \sum_i^N \ln(x_i) & \sum_i^N \ln(x_i) \ln(y_i) \end{vmatrix} = N \sum_i^N \ln(x_i) \cdot \ln(y_i) - \sum_i^N \ln(x_i) \sum_i^N \ln(y_i),$$

где $M(\bullet)$ - математическое ожидание, а $D(\bullet)$ - дисперсия.

Предположим, что имеется идеальный набор данных, точно описываемый заданной степенной функцией. Выберем теперь какую-либо пару (x_s, y_s) с порядковым номером s ($s \leq N$) и возьмем значение y_s так, чтобы новое значение $y_s^* = k \cdot y_s$.

Выполним следующие преобразования:

$$\Delta n = N \ln(x_s) \cdot \ln(y_s) + N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^N \ln(x_i) \ln(y_i) - \ln(y_s) \sum_{i=1}^N \ln(x_i) - \sum_{i=1}^N \ln(x_i) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^N \ln(y_i)$$

$$\Delta n^* = N \ln(x_s) \ln(y_s) + N \ln(x_s) \ln(k) + N \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^N \ln(x_i) \ln(y_i) - \ln(y_s) \sum_{i=1}^N \ln(x_i) -$$

$$- \ln(k) \sum_{i=1}^N \ln(x_i) - \sum_{i=1}^N \ln(x_i) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^N \ln(y_i) = N \ln(x_s) \ln(k) - \ln(k) \sum_{i=1}^N \ln(x_i) + \Delta n.$$

Так как определитель Δ не зависит от переменной y_s , то $\Delta = \Delta^*$. Тогда

$$n^* = \frac{\Delta n^*}{\Delta^*} = \frac{\Delta n^*}{\Delta} = \frac{N \ln(x_s) \ln(k) - \ln(k) \sum_{i=1}^N \ln(x_i) + \Delta n}{\Delta} =$$

$$= \frac{\Delta n + (N \ln(x_s) - \sum_{i=1}^N \ln(x_i)) \ln(k)}{\Delta} = n + \frac{N \ln(x_s) - \sum_{i=1}^N \ln(x_i)}{N^2 D(\ln(x_s))} \ln(k)$$

Таким образом, имеем:

$$n^* = n + \frac{N \ln(x_s) - \sum_{i=1}^N \ln(x_i)}{N^2 D(\ln(x_s))} \ln(k). \quad (5)$$

Из анализа (5) следует:

- 1) чем больше данных (N), тем разница между n^* и n становится меньше;
- 2) чем дальше число $\ln(x_s)$ находится от среднего значения (математического ожидания $M(\ln(x_i))$), тем сильнее отличается n^* от n ;
- 3) наибольшее влияние на отклонение n^* от n оказывает малое значение дисперсии ($D(\ln(x_i))$).

Рассмотрим конкретный модельный пример. Пусть задана функция $y = a \cdot x^n$ с коэффициентами $a = 1,2 \cdot 10^{-5}$, $n = 4,402$. Её дискретные значения (x_i, y_i) представлены в таблице. Если к этим идеальным «экспериментальным» данным (x_i, y_i) применить МНК в виде (2), либо в виде (4), то получим по тому и другому методу идентичные результаты, практически совпадающие с «теоретическими» значениями y_i .

Возмутим теперь, например, первую точку функции, положив $y_1^{(1)} = 0,01$, оставив остальные значения y_i , $i = 2, N$ неизменными. Тогда $k = y_1^{(1)} / y_1 = 0,2$. Применим теперь для «экспериментальных» значений $(y_i^{(1)}, x_i)$ (см. табл.) оба МНК. Значения показателей n и a , найденных в результате решения систем (2) и (4) имеют значения $n = 4,408$, $a = 1,18 \cdot 10^{-5}$ и $n = 5,516$, $a = 5,73 \cdot 10^{-7}$ соответственно. Графики вида $y = a \cdot x^n$ для этих данных a и n представлены на рис.1, а рассчитанные значения $y_i^{(2)}$ и $y_i^{(4)}$ в таблице.

i	x_i	y_i	$y_i^{(1)}$	$y_i^{(2)}$	$y_i^{(4)}$
1	6,64	0,05	0,01	0,05	0,02
2	9,10	0,2	0,2	0,2	0,11
3	9,98	0,3	0,3	0,3	0,19
4	14,60	1,6	1,6	1,6	1,51
5	15,36	2	2	2	2,01
6	16,15	2,5	2,5	2,5	2,65
7	16,71	2,9	2,9	2,9	3,19
8	17,27	3,35	3,35	3,36	3,83
9	17,77	3,8	3,8	3,81	4,48

Р и с.1 Рассчитанные и «экспериментальные» значения модельной функции: МНК(2)-по модели (2); МНК(4)-по модели (4).

Р и с. 2. Рассчитанные и экспериментальные значения диаграммы упругопластического деформирования для сплава АД1: МНК(2)-по модели (2); МНК(4)-по модели (4).

Таким образом, вариант МНК вида (4) даёт существенно худшие результаты по сравнению с МНК вида (2). При этом коэффициент нелинейности n отличается от “теоретического” на 25,1%, хотя возмущение в целом было незначительным.

На рис.2 приведены результаты обработки реальных экспериментальных данных диаграммы упругопластического деформирования сплава АД1 при температуре $T = 26^\circ \text{C}$. Как видно из рисунка, результаты расчёта на основании системы (4) дают совершенно неприемлемые результаты, при этом показатель нелинейности в данном случае имеет значение $n = 1,06$, в то время как при использовании системы (2) имеем $n = 1,79$.

Почему в данной работе большое внимание уделено именно коэффициенту нелинейности n ? Дело в том, что для процессов, например, установившейся ползучести показатель нелинейности изменяется в пределах $3 \leq n \leq 18$; для пластичности $1,5 \leq n \leq 6$. Поэтому ошибка в его определении существенно сказывается на решениях соответствующих краевых задач. Для теорий же, например, неупругого деформирования и разрушения [6,9] кроме параметров a и n используют ещё ряд параметров, описывающих накопление повреждённости в материале и его разрушение, при этом остальные параметры выражаются через a и n .

Таким образом, при создании автоматизированных систем обработки экспериментальных данных, элементом которых является построение степенных (экспоненциальных) зависимостей рекомендуется:

- 1) использовать систему уравнений (2);
- 2) применять фильтрацию экспериментальных данных и методы их непараметрического выравнивания с целью сохранить основные математические свойства процесса (например, монотонность и выпуклость) [10].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Биргер И. А. Термопрочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1975. 455с.
2. Болошин В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312с.
3. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752с.
4. Локощенко А. М., Шестериков С. А. Стандартизация критериев длительной прочности // Унифицированные методы определения ползучести и длительной прочности. Вып.7. М.: Изд-во стандартов, 1986. С.3-15.
5. Расчёты и испытания на прочность. Расчетные методы определения несущей способности и долговечности элементов машин и конструкций. Метод определения параметров кривых ползучести и накопления повреждений при одноосном нагружении: Метод. рекомендации. 1 редакция. М.: Госстандарт, 1982. 91с.
6. Радченко В. П. Прогнозирование ползучести и длительной прочности материалов на основе энергетического подхода в стохастической постановке // Пробл. Прочности. 1992. №2. С.34-40.
7. Венцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576с.
8. Зоркальцев В. И. Метод наименьших квадратов. Новосибирск: ВО “Наука”, 1995. 220с.
9. Радченко В. П. Энергетический вариант одноосной теории ползучести и длительной прочности// ЖПМТФ, 1991. №4. С.172-179.
10. Мухина Л. Г. Вычисление характеристик ползучести по основным данным с применением метода непараметрического выравнивания// Теоретико-экспериментальный метод исследования ползучести в конструкциях. С.науч.тр. Куйбышев: КПТИ, 1984. С.86-94.

УДК 539.3: 681.3

Г.Н. Гутман

ФОРМИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ СВЯЗЕЙ УЗЛОВ ПЛОСКОЙ СЕТКИ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Приведен новый алгоритм формирования связей узлов плоской сетки треугольных конечных элементов. Даны достижимые оценки размеров массивов, необходимых для работы алгоритма.

Широкое применение метода конечных элементов (МКЭ) для решения инженерных задач потребовало создания алгоритмов автоматизированной генерации сетки конечных элементов (СКЭ). Чаще всего в инженерной практике используются сетки треугольных конечных элементов. Одним из основных алгоритмов генерирования таких сеток является метод текущей границы [1]. Однако полученная методом текущей границы СКЭ нуждается в некоторой оптимизации (регуляризации и перенумерации). Исходными данными для работы этих алгоритмов является структура смежности (инцидентности) графа СКЭ [2].