Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Долгополов, А. В. Гурская, О разрешимости сценариев бозонов Хиггса в неминимальной суперсимметрии в пределе соответствия, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016, номер 4, 581–588

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:02:38

Дифференциальные уравнения и математическая физика

УДК 517.958:539.12

О РАЗРЕШИМОСТИ СЦЕНАРИЕВ БОЗОНОВ ХИГГСА В НЕМИНИМАЛЬНОЙ СУПЕРСИММЕТРИИ В ПРЕДЕЛЕ СООТВЕТСТВИЯ

А. В. Гурская, М. В. Долгополов

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
Россия, 443086, Самара, Московское ш., 34.

Аннотация

Рассматривается неминимальное расширение стандартной модели НМССМ при учете явного и спонтанного нарушений зарядово-пространственной CP -инвариантности, а также при дополнительном смешивании CP -четных и CP -нечетных состояний бозонов Хиггса. Рассчитаны массы и ширины распадов нейтральных бозонов Хиггса при фиксированных параметрах модели таким образом, что одно из физических состояний данных частиц отвечает результатам экспериментов на большом адронном коллайдере. Расчет ширин распада производится в однопетлевом приближении в рамках теории возмущений. Определены два сценария для наблюдаемой на опыте частицы. Первому сценарию соответствует набор параметров, приводящий к легчайшему бозону Хиггса массой 125 ГэВ. Второй сценарий с ограничением на массу бозона Хиггса реализуется при электрослабом бариогенезисе, что приводит к согласованию экспериментальных данных со вторым по массе физическим состоянием.

Ключевые слова: метод Якоби, суперсимметрия, задача на собственные значения, радиационные поправки, нарушение CP -инвариантности, бариогенезис.

Введение. Сегодня бозоны Хиггса, несомненно, являются одними из основных объектов исследований в физике элементарных частиц, а математические методы исследования экстремальных свойств потенциалов, описывающих интенсивность квантово-полевых взаимодействий, прецизионно проверяются в интерфейсе физики на Большом адронном коллайдере (БАК)

© 2016 Самарский государственный технический университет.

Образец для цитирования

Гурская А. В., Долгополов М. В. О разрешимости сценариев бозонов Хиггса в неминимальной суперсимметрии в пределе соответствия // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 20, № 4. С. 581–588. doi: [10.14498/vsgtu1519](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1519).

Сведения об авторах

Альбина Валентиновна Гурская (a-gurska@yandex.ru), научный сотрудник, лаборатория математической физики.

Михаил Вячеславович Долгополов (к.ф.-м.н., доц.; mikhaildolgoplov68@gmail.com; автор, ведущий переписку), доцент, каф. общей и теоретической физики; заведующий лабораторией, лаб. математической физики.

с целым рядом макроскопических и космологических наблюдений. В стандартной модели (СМ) реализуется одна такая частица, существование которой было подтверждено экспериментальными данными в 2012 году [1, 2]. При всей важности этого открытия в СМ отсутствует объяснение ряда вопросов, связанных с барионной асимметрией, темной материей, стабильностью вакуума и других, решение которых может быть найдено в расширенных по сравнению со стандартной моделях. В частности, актуальным является рассмотрение неминимальной суперсимметричной стандартной модели, которая в настоящее время проверяется в экспериментах на БАК наряду с другими моделями. Суперсимметричные модели позволяют как описывать имеющиеся результаты экспериментов, так и делать новые предсказания. В данной модели имеется пять нейтральных физических состояний бозонов Хиггса.

Расширенный сектор Хиггса также содержит в себе новые источники нарушения CP -инвариантности, что может помочь, например, объяснить результаты по распадам D -мезонов и в целом расширить понимание барионной асимметрии. Эффекты CP -нарушения оказывают влияние на физические характеристики бозонов Хиггса, такие как массы и ширины распадов. Основными распадами для обнаружения бозона Хиггса на эксперименте являются: $h \rightarrow \gamma\gamma$, $h \rightarrow ZZ$ и $h \rightarrow WW$ с последующим распадом на четыре лептона, а также $h \rightarrow \tau\tau$. Некоторые процессы являются принципиально петлевыми. Те же, которые могут реализовываться на древесном уровне, имеет смысл сопоставлять с первыми на одном порядке теории возмущения. Поэтому необходим учет однопетлевых поправок.

1. Нарушение зарядово-пространственной инвариантности в секторе Хиггса неминимальной модели. Нарушению CP -инвариантности посвящено множество работ, как зарубежных, так и отечественных. Нет принятого и подтвержденного окончательного метода введения CP -нарушения в сектор Хиггса модели. Различают случаи спонтанного и явного CP -нарушения. Например, рассматривается CP -нарушение в ДММ [3] и суперсимметричном ее расширении [4, 5]. Подобно данным работам явное CP -нарушение было рассмотрено в рамках НМССМ в работе [6]. Здесь же были подсчитаны поправки к параметрам эффективного потенциала Хиггса, которые оказывают сильное влияние на проявление эффектов явного CP -нарушения.

При рассмотрении потенциала Хиггса и нахождении физических состояний бозонов Хиггса ключевым является процедура нахождения локального минимума потенциала Хиггса, благодаря которой мы можем найти именно те состояния, которые соответствуют стабильному вакууму. Метод введения нарушения CP -инвариантности в сектор Хиггса НМССМ определен в работе авторов [7], который включает комплексные фазы в вакуумных средних полях Хиггса, явного нарушения посредством комплексных констант взаимодействия бозона Хиггса с частицами модели. Константы взаимодействия содержат в себе компоненты матрицы дополнительного поворота, который обеспечивает смешивание CP -четных и CP -нечетных состояний. Примером являются константы взаимодействия бозонов Хиггса с кварками:

$$\begin{aligned} \bar{u}u h_j : \quad & \frac{1}{2m_W s_\beta} (g_2 M_u ((-\cos(\theta) + i\gamma^5 \sin(\theta))(A_{1js_\beta} + A_{3jc_\beta}) + \\ & + A_{2jc_\beta}(\sin(\theta) + i\gamma^5 \cos(\theta))), \end{aligned}$$

$$\bar{d}dh_j : \frac{g_2 M_d (-A_{1j} \cos \beta + \sin \beta (A_{3j} + i\gamma^5 A_{2j}))}{2 \cos \beta m_W}.$$

При учете различных типов источников нарушения CP -инвариантности в общем положении ① картина проявления эффектов CP -нарушения усложняется, но, как оказывается, дает меньше возможностей для выхода на реалистичные значения физических величин. Это связано также со сложностью диагонализации массовой матрицы нейтральных бозонов Хиггса, которая не имеет аналитического решения из-за размерности выше 4-й. Она может быть приведена к диагональному виду, например, методом Якоби [8], который предназначен специально для симметричных матриц.

Метод Якоби предназначен для нахождения собственных значений симметричных матриц, т. е. приведения матрицы к диагональному виду с помощью ортогональных поворотов $D = T^{-1}AT$. Суть метода заключается в том, что один такой поворот разбивается на серию подобных ортогональных преобразований, которые последовательно уменьшают сумму квадратов недиагональных элементов исходной матрицы A . При каждой итерации получается новая матрица, в которой максимальный по модулю наддиагональный элемент полагается равным нулю. Соответственно, идет пересчет четырех элементов матрицы при повороте на угол φ :

$$x_1 = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad y_1 = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Угол φ вычисляется из значений элементов предыдущей матрицы:

$$\sin \varphi = \text{sign}(p) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \right)},$$

где

$$p = \frac{2A_{lk}}{A_{ll} - A_{kk}}.$$

При диагонализации возникает необходимость проверки всех имеющих-ся в расчетах соответствий параметров, из-за чего становится некорректным рассмотрение зависимости массы бозонов Хиггса как функции свободных параметров модели. Мы вынуждены фиксировать значения параметров, и набор таких фиксированных параметров представляет собой возможные сценарии реализации нескольких бозонов Хиггса.

2. Сценарии бозонов Хиггса в неминимальной модели. Необходимость рассмотрения сценария связана с согласованием вычисленных масс нейтральных бозонов Хиггса с сопутствующим вычислением ширин распадов этих частиц, так как набор значений параметров может приводить к требуемым массам, но не к соответствию ширин распадов с ними.

Рассмотрим первый случай (см. таблицу), когда самый легкий бозон Хиггса имеет массу 125 ГэВ и отвечает наблюдаемому на ускорительном эксперименте. Ситуация, описанная в данном сценарии, естественна, так как на эксперименте нет сигналов, указывающих на существование бозона Хиггса с меньшей массой. Интересны при этом получаемые предсказания для тяжелых физических состояний бозонов Хиггса, когда второй бозон Хиггса имеет

массу 350 ГэВ. Отсутствие подтверждений на эксперименте для данного значения вовсе не отрицает полученного результата, так как условия эксперимента таковы, что ненаблюдаемыми бозоны Хиггса являются при определенных значениях тангенса угла смешивания $\text{tg } \beta$. Также значительная часть псевдоскалярного состояния в физическом базисе может приводить к ненаблюдаемости. У получаемых физических состояний бозонов Хиггса отсутствует определенная CP -четность.

Второй сценарий фиксации параметров рассчитан для требований сильного фазового перехода первого рода в модели электрослабого бариогенезиса, а точнее, для ограничения на массу легчайшего бозона Хиггса. Почему фазовый переход не может быть второго рода? Барийонная асимметрия, генерируемая в процессе электрослабого фазового перехода, в этом случае с течением времени исчезает. Наступает термодинамическое равновесие и не выполняется третье условие Сахарова. Термодинамическое равновесие должно быть значительно нарушено, что возможно только при фазовом переходе первого рода. В описании фазового перехода первого рода используется модель космологических пузырей скалярного поля. Практически во всех моделях барионная асимметрия возникает вблизи стенки такого пузыря. Для реализации сценария фазового перехода в НМССМ важную роль играет дополнительный синглет комплексного скалярного поля с ненулевым вакуумным средним. Выяснение природы фазового перехода и вычисление критической температуры, ему соответствующей, являются важными задачами теоретической космологии.

Масса бозона Хиггса для сценария электрослабого бариогенезиса должна быть < 50 ГэВ. НМССМ дает возможность варьировать параметры так, что можно получить такие массы теоретически. Возникает проблема объяснения, почему такой возможный бозон Хиггса не регистрируется на опыте.

Параметры модели [Model parameters]	Сценарии [Scripts]	
	1	2
λ	0.7	0.2
κ	0.1	0.1
$\text{tg } \beta$	50.0	50.0
A_λ , GeV	100.0	100.0
A_κ , GeV	-20.0	-80.0
m_{H_1} , GeV	125.7	41.0
m_{H_2} , GeV	352.9	126.8
m_{H_3} , GeV	357.8	153.2
θ	$3\pi/2$	0
φ	$\pi/15$	$\pi/30$
$\Gamma(H_1) \rightarrow \gamma\gamma \times 10^{-7}$, GeV	0.17	0.06
$\Gamma(H_2) \rightarrow \gamma\gamma \times 10^{-7}$, GeV	2.6	13.0
$\Gamma(H_3) \rightarrow \gamma\gamma \times 10^{-7}$, GeV	2.6	99.0
$\Gamma(H_1) \rightarrow ZZ \times 10^{-7}$, GeV	1.39	0.6
$\Gamma(H_2) \rightarrow ZZ \times 10^{-7}$, GeV	10.0	138.0
$\Gamma(H_3) \rightarrow ZZ \times 10^{-7}$, GeV	11.0	463.0
$\Gamma(H_1) \rightarrow WW \times 10^{-6}$, GeV	74.0	9.7
$\Gamma(H_2) \rightarrow WW \times 10^{-6}$, GeV	286.0	42.0
$\Gamma(H_3) \rightarrow WW \times 10^{-6}$, GeV	286.0	56.0

Среди объяснений можно привести те же аргументы, что и при попытке объяснить отсутствие на эксперименте тяжелых частиц с массой выше 125 ГэВ. При этом третий по массе бозон Хиггса в данном сценарии 153 ГэВ находится в такой же сложной ситуации, как самый легкий — с массой 41 ГэВ. По этой причине встает потребность в исследовании дополнительного типа распада — распада на частицы темной материи (нейтралино). Константа взаимодействия нейтралино с нейтральными бозонами Хиггса имеет сложную структуру и связана с комбинацией пяти других суперчастиц. Такая структура приводит к сложной зависимости ширины распада от свободных параметров модели и от массы самого нейтралино. Тем не менее исходя из законов сохранения энергии распад легчайшего бозона Хиггса возможен при массе нейтралино порядка 20 ГэВ и менее, что, возможно, не соответствует действительному положению вещей. Нижняя граница возможных значений массы частицы определяется по данным эксперимента: так, в 2009 году сообщалось, что масса легчайшего нейтралино должна быть больше 28 ГэВ [9], а в работе [10] 2011 года нижнее ограничение было поднято до значения 40 ГэВ. Такие ограничения дают основание полагать, что легчайшая стабильная суперсимметричная частица является, по-видимому, тяжелой частицей. При таком развитии событий второй сценарий может оказаться несостоятельным. Тогда, возвращаясь к первому сценарию, можно предположить, что если легчайший бозон Хиггса имеет массу 125 ГэВ, то все остальные состояния могут ненаблюдаться как раз из-за распадов на нейтралино. Отсюда необходимо предположить, что масса нейтралино составляет более чем 60 ГэВ.

Заключение Модель НМССМ с дополнительным киральным синглетом к системе двух дублетов комплексных полей и CP -нарушающими фазами позволяет определить два возможных сценария появления нескольких бозонов Хиггса, при этом синглетное киральное поле играет роль «стабилизирующей пены» при конечных температурах. Первому соответствует набор параметров, приводящий к легчайшему бозону Хиггса массой 125 ГэВ, что соответствует частице, наблюдаемой на эксперименте. Второй сценарий реализуется при электрослабом бариогенезисе с ограничением на массу бозона Хиггса менее 50 ГэВ. Наблюдаемому бозону Хиггса соответствует второе по массе физическое состояние.

Декларация о финансовых и других взаимоотношениях. Исследование не имело спонсорской поддержки. Все авторы принимали участие в разработке концепции статьи и в написании рукописи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной рукописи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами. Авторы не получали гонорар за статью.

ORCID

Михаил Вячеславович Долгополов: <http://orcid.org/0000-0002-8725-7831>

Альбина Валентиновна Гурская: <http://orcid.org/0000-0003-2543-4932>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ATLAS Collaboration, Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC // *Phys. Lett. B*, 2012. vol. 716, no. 1. pp. 1–29, arXiv: [1207.7214](https://arxiv.org/abs/1207.7214) [hep-ex]. doi: [10.1016/j.physletb.2012.08.020](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.020).
2. CMS Collaboration, Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC // *Phys. Lett. B*, 2012. vol. 716, no. 1. pp. 30–61, arXiv: [1207.7235](https://arxiv.org/abs/1207.7235) [hep-ex]. doi: [10.1016/j.physletb.2012.08.021](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.021).

3. Ахметзянова Э. Н., Долгополов М. В., Дубинин М. Н. Бозоны Хиггса в двухдублетной модели с нарушением CP -инвариантности // *Ядерная физика*, 2005. Т. 68, № 11. С. 1913–1927.
4. Ахметзянова Э. Н., Долгополов М. В., Дубинин М. Н. Суперсимметричная модель с нарушением CP инвариантности. 3. Нарушение CP -инвариантности в хиггсовском секторе // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2003. № 4(30). С. 147–179, <http://vestnik-samgu.samsu.ru/est/2003web4/phys/200340201.pdf>.
5. Ахметзянова Э. Н., Горбачева И. В., Долгополов М. В., Дубинин М. Н., Смирнов И. А. Суперсимметричная модель с нарушением CP инвариантности. 4. Проявления явного CP нарушения в двух-дублетном секторе Хиггса // *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2004. № 2(32). С. 79–109, <http://vestnik-samgu.samsu.ru/est/2004web2/phys/200420201.pdf>.
6. Волкова Т. В., Долгополов М. В., Дубинин М. Н., Рыкова Э. Н. Эффективный потенциал Хиггса в неминимальной суперсимметричной стандартной модели // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2013. № 2(31). С. 233–242. doi: [10.14498/vsgtu1193](https://doi.org/10.14498/vsgtu1193).
7. Gurskaya A. V., Dolgoplov M. V. The Higgs bosons decays in the NMSSM with CP-violation // *EPJ Web of Conferences*, 2016. vol. 125, 02011. 5 pp. doi: [10.1051/epjconf/201612502011](https://doi.org/10.1051/epjconf/201612502011)
8. Шарый С. П. *Курс вычислительных методов*. Новосибирск: Институт вычислительных технологий СО РАН, 2014. 503 с.
9. Vázquez D. A., Bélanger G., Böhm C., Pukhov A., Silk J. Can neutralinos in the MSSM and NMSSM scenarios still be light? // *Phys. Rev. D*, 2010. vol. 82, 115027, arXiv: [1009.4380](https://arxiv.org/abs/1009.4380) [hep-ph]. doi: [10.1103/PhysRevD.82.115027](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.115027).
10. Geringer-Sameth A., Kouhiappas S. M. Exclusion of Canonical WIMPs by Joint Analysis of Milky Way Dwarf Galaxies with Data from the Fermi Gamma-Ray Space Telescope // *Phys. Rev. Lett.*, 2011. vol. 107, 241303, arXiv: [1108.2914](https://arxiv.org/abs/1108.2914) [astro-ph.CO]. doi: [10.1103/PhysRevLett.107.241303](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.241303).

Поступила в редакцию 27/X/2016;
в окончательном варианте — 28/XI/2016;
принята в печать — 09/XII/2016.

MSC: 81T10, 81V35, 81T60

STANDARD MODEL ALIGNMENT SCENARIOS FOR HIGGS BOSONS

A. V. Gurskaya, M. V. Dolgoplov

Samara National Research University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Abstract

This paper describes the model NMSSM with effective explicit and spontaneous CP -violations, and additional mixing of CP -even and CP -odd Higgs bosons states. The neutral Higgs bosons masses and decay widths were calculated at fixed parameters of the model so one of the physical states is responsible for the results of the LHC experiments. The calculation of decay widths produced in the one-loop approximation in the framework of the quantum field perturbation theory. We defined two scenarios for observables. The first scenario corresponds to the set of parameters leading to the lightest Higgs boson mass of 125 GeV. The second one with the restriction on the Higgs boson mass implemented in the electroweak baryogenesis, which leads to the experimental data agreement with the second physical mass condition.

Keywords: supersymmetry, Higgs physics, phenomenological scenarios, CP -violation, baryon asymmetry, loop corrections.

Declaration of Financial and Other Relationships. The research has not had any sponsorship. Each author has participated in the article concept development and in the manuscript writing. The authors are absolutely responsible for submitting the final manuscript in print. Each author has approved the final version of manuscript. The authors have not received any fee for the article.

ORCID

Mikhail V. Dolgoplov: <http://orcid.org/0000-0002-8725-7831>

Albina V. Gurskaya: <http://orcid.org/0000-0003-2543-4932>

© 2016 Samara State Technical University.

Please cite this article in press as:

Gurskaya A. V., Dolgoplov M. V. Standard model alignment scenarios for Higgs bosons, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 4, pp. 581–588. doi: [10.14498/vsgtu1519](http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1519). (In Russian)

Authors Details:

Albina V. Gurskaya (a-gurska@yandex.ru), Lab. of Mathematical Physics.

Mikhail V. Dolgoplov (Cand. Phys. & Math. Sci.; mikhaildolgoplov68@gmail.com; Corresponding Author), Associate Professor, Dept. of General & Theoretical Physics; Lab. of Mathematical Physics.

REFERENCES

1. ATLAS Collaboration, Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC, *Phys. Lett. B*, 2012, vol. 716, no. 1, pp. 1–29, arXiv: [1207.7214](#) [hep-ex]. doi: [10.1016/j.physletb.2012.08.020](#).
2. CMS Collaboration, Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC, *Phys. Lett. B*, 2012, vol. 716, no. 1, pp. 30–61, arXiv: [1207.7235](#) [hep-ex]. doi: [10.1016/j.physletb.2012.08.021](#).
3. Akhmetzyanova É. N., Dolgoplov M. V., Dubinin M. N. Higgs bosons in the two-doublet model involving CP violation, *Phys. Atom. Nuclei*, 2005, vol. 68, no. 11, pp. 1851–1865. doi: [10.1134/1.2131115](#).
4. Akhmetzyanova É. N., Dolgoplov M. V., Dubinin M. N. Supersymmetric model with CP violation. 3. CP violation in the Higgs sector, *Vestn. SamGU. Estestvennonauchn. ser.*, 2003, no. 4(30), pp. 147–179 (In Russian), <http://vestnik-samgu.samsu.ru/est/2003web4/phys/200340201.pdf>.
5. Akhmetzyanova É. N., Gorbacheva I. V., Dolgoplov M. V., Dubinin M. N., Smirnov I. A. Supersymmetric model with CP violation. 4. Evidence of the explicit CP violation in the two-Higgs-doublet sector, *Vestn. SamGU. Estestvennonauchn. ser.* (In Russian), <http://vestnik-samgu.samsu.ru/est/2004web2/phys/200420201.pdf>.
6. Volkova T. V., Dolgoplov M. V., Dubinin M. N., Rykova E. N. Effective Higgs potential in Next-to-Minimal Supersymmetric Standard Model, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2013, no. 2(31), pp. 233–242 (In Russian). doi: [10.14498/vsgtu1193](#).
7. Gurskaya A. V., Dolgoplov M. V. The Higgs bosons decays in the NMSSM with CP -violation, *EPJ Web of Conferences*, 2016, vol. 125, 02011, 5 pp. doi: [10.1051/epjconf/201612502011](#)
8. Sharyi S. P. *Kurs vychislitel'nykh metodov* [A course of computational methods]. Novosibirsk, Inst. Vychisl. Tekhnol., 2014, 503 pp. (In Russian)
9. Vázquez D. A., Bélanger G., Boehm C., Pukhov A., Silk J. Can neutralinos in the MSSM and NMSSM scenarios still be light?, *Phys. Rev. D*, 2010, vol. 82, 115027, arXiv: [1009.4380](#) [hep-ph]. doi: [10.1103/PhysRevD.82.115027](#).
10. Geringer-Sameth A., Koushiappas S. M. Exclusion of Canonical WIMPs by Joint Analysis of Milky Way Dwarf Galaxies with Data from the Fermi Gamma-Ray Space Telescope, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 107, 241303, arXiv: [1108.2914](#) [astro-ph.CO]. doi: [10.1103/PhysRevLett.107.241303](#).

Received 27/X/2016;
 received in revised form 28/XI/2016;
 accepted 09/XII/2016.