Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Гольдштейн, Н. В. Сайдова, А. К. Танаев, Уточнённая математическая модель поверхностного эффекта в многослойной земле, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 129–133

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:24:18

Математическое моделирование

УДК 621.311.1

В.Г.Гольдштейн, Н.В.Сайдова, А.К.Танаев

УТОЧНЁННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА В МНОГОСЛОЙНОЙ ЗЕМЛЕ

Рассматривается уточнённый подход к математическому моделированию электромагнитных квазистационарных процессов в многокомпонентных системах и устройствах с учётом всех составляющих векторов напряженностей магнитного и электрического полей на примере исследования поверхностного эффекта в проводах многопроводной воздушной линии электропередачи и проводящей земле, имеющей неоднородную горизонтальную многослойную структуру.

Электротехнические многокомпонентные системы и устройства (многопроводные воздушные и кабельные линии, заземляющие устройства, линии и кабели связи и др.) работают в сложных сочетаниях физических сред (воздух, неоднородная земля с большим диапазоном изменения проводимости, твердые, жидкие и газообразные диэлектрики, например в кабельных конструкциях и др.). При анализе их работы в импульсных и высокочастотных процессах [1] определение интегральных выражений, учитывающих влияние поверхностного эффекта в многослойной земле и проводах, а также продольных токов смещения в земле, производится с допущениями Карсона [2].

В ряде электротехнических приложений требуется более точное решение этих задач без названных допущений. Здесь можно применить методику, сформулированную Гринбергом и Боншtedтом [3] для однопроводной и Перельманом [4] для многопроводной линий электропередач над однородной землей. Для упрощения изложение проводится сначала для однопроводной линии и далее для многопроводной задачи [4,5], где они во многом аналогичны. Решение в этом случае производится методом последовательных приближений, так как выражения [1], учитывающие влияние земли на текущей частоте ω , зависят от определяемой постоянной распространения Γ . Однако зависимость эта проявляется слабо, так что достаточно точным оказывается первое приближение [4], полученное при допущении

$$\Gamma_0^2 = w^2 m_0 e_0, \quad (1)$$

которое используется для однородной земли Карсоном [2] и для многослойной земли. Здесь μ_0 и ε_0 – магнитная и диэлектрическая проницаемости (индекс 0 – для воздуха).

Рассмотрим точное решение для двухслойной земли при допущении (1). Сохраняя обозначения и используя постановку задачи [1], при последующем рассмотрении не будем пренебрегать y и z – составляющими векторами электрической напряженности в земле. При этом общее решение для z – составляющей электрической напряженности в воздухе и двух слоях земли может быть записано в виде

$$\begin{aligned} E_z &= -x \int_0^\infty e^{h(z-h)} \cos l y dl - x \int_0^\infty M(l) e^{-hz-hh} \cos l y dl, \quad h > z > 0; \\ E_z^I &= x \int_0^\infty M_I' e^{h_I z - m h} \cos l y dl + x \int_0^\infty M_I''(l) e^{-h_I z - h h} \cos l y dl, \quad 0 > z > -d; \\ E_z^{II} &= x \int_0^\infty M_{II}(l) e^{h_{II} z - h h} \cos l y dl, \quad -d > z > -\infty, \end{aligned} \quad (2)$$

где множители $x = \frac{2\Gamma C}{\rho m^2}$ и e^{-hh} выделены для упрощения произвольных функций

$M(l), M_I'(l), M_I''(l), M_{II}(l)$, подлежащих определению; Γ – постоянная распространения, а C – постоянная, определяемая из граничных условий на границе провод-воздух аналогично [5].

Выражение для составляющей в воздухе записано в виде двух частей, первая из которых

$$E_z^0 = -x \int_0^{\infty} e^{h(z-h)} \cos l y d l \quad (3)$$

является интегральным представлением z – составляющей электрического поля провода в ограниченной однородной среде при симметричном распределении тока по сечению [6]. Вторая составляющая отвечает вторичному полю земли.

Для определения неизвестной функции могут быть использованы следующие граничные условия на поверхностях раздела $z = 0$ и $z = -d$:

$$z = 0, \quad e' E_z = e'_I E_z^I; \quad z = -d, \quad e'_I E_z^I = e''_I E_z^{II}; \quad z = 0, \quad \frac{dE_z}{dz} = \frac{dE_z^I}{dz}; \quad z = -d, \quad \frac{dE_z^I}{dz} = \frac{dE_z^{II}}{dz}, \quad (4)$$

где два первых условия для нормальной составляющей поля на границах раздела сред с различными характеристиками хорошо известны [1], а два последних вытекают при этом из уравнения $\text{div } \mathbf{E} = 0$. Участвующие в (4) выражения типа $e'_i = e_i - jg_i / w$ представляют собой комплексные диэлектрические проницаемости сред.

Подставляя (2) в (4), получим после упрощений систему уравнений

$$\begin{aligned} -1 - M(I) &= \frac{e'_I}{e} [M'_I(I) + M''_I(I)]; \quad -1 + M(I) = \frac{h_I}{h} [M'_I(I) - M''_I(I)]; \\ M'_I(I) e^{-h_I d} + M''_I(I) e^{h_I d} &= \frac{e''_I}{e'_I} M_{II}(I) e^{-h_{II} d}; \quad M'_I(I) e^{-h_I d} - M''_I(I) e^{h_I d} = \frac{h_{II}}{h_I} M_{II}(I) e^{-h_{II} d}, \end{aligned} \quad (5)$$

решая которую и подставляя результаты в (2), получим

$$\begin{aligned} E_z &= -x \int_0^{\infty} e^{h(z-h)} \cos l y d l - x \int_0^{\infty} \frac{\tilde{x}}{x} e^{-h(z+h)} \cos l y d l; \\ E_x^I &= -x \int_0^{\infty} \frac{\frac{e''_I}{e'_I} + \frac{h_{II}}{h_I}}{x} e^{h_I(z+d)} e^{-h h} \cos l y d l - x \int_0^{\infty} \frac{\frac{e''_I}{e'_I} - \frac{h_{II}}{h_I}}{x} e^{-h_I(z+d)} e^{-h d} \cos l y d l; \\ E_z^{II} &= -2x \int_0^{\infty} \frac{e^{h_{II}(z+d)}}{x} e^{-h h} \cos l y d l, \end{aligned} \quad (6)$$

где $C = (\frac{e''_I}{e'_I} + \frac{h_{II}}{h}) c h h_I d + (\frac{h_{II} e'_I}{h_I e'_I} + \frac{e''_I h_I}{e'_I h}) s h h_I d$, $\tilde{C} = (\frac{e''_I}{e'_I} - \frac{h_{II}}{h}) c h h_I d + (\frac{h_{II} e'_I}{h_I e'_I} - \frac{e''_I h_I}{e'_I h}) s h h_I d$.

Общие решения для y – составляющих в рассматриваемых средах будем искать в виде [3]

$$\begin{aligned} E_y &= x \int_0^{\infty} e^{h(z-h)} \frac{l}{h} \sin l y d l - x \int_0^{\infty} N(I) e^{-h(z+h)} l \sin l y d l; \\ E_y^I &= x \int_0^{\infty} N'_I(I) l e^{h_I z - m h} \sin l y d l + x \int_0^{\infty} N''_I(I) l e^{-h_I z - h h} \sin l y d l; \\ E_y^{II} &= x \int_0^{\infty} N_{II}(I) l e^{h_{II} z - m h} l \sin l y d l. \end{aligned} \quad (7)$$

Построение выражений (7) аналогично (2). Для определения $N(I), N'_I(I), N''_I(I), N_{II}(I)$ можно использовать известные граничные условия для тангенциальных составляющих поля на границе сред с различными характеристиками $z = 0$ и $z = -d$:

$$E_y = E_y^I (z = 0), \quad E_y^I = E_y^{II} (z = -d). \quad (8)$$

Еще одна пара условий может быть получена с помощью определенных выше z – составляющих из уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$ для x – составляющей вектора магнитной напряженности

$$\frac{dE_z}{dy} - \frac{dE_y}{dz} = -j\omega\mu H_x. \quad (9)$$

Составляя выражение типа (9) для всех сред и учитывая непрерывность H_x на границе раздела, имеем

$$\frac{1}{m} \frac{dE_y}{dz} - \frac{1}{m_l} \frac{dE_y^I}{dz} = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{m} E_z - \frac{1}{m_l} E_z^I \right) \quad (10)$$

и аналогичное уравнение для границы $z = -d$. Используя (6) в (10) и полагая для наиболее распространенного случая $m = m_l = m_{II} = m_0$, получим

$$\frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_y^I}{dz} = 2x \int_0^\infty \frac{c_1}{c} e^{-hh} l \sin l y dy; \quad \frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_y^{II}}{dz} = 2x \left(\frac{e_{II}'}{e_I'} - 1 \right) \int_0^\infty \frac{e^{-hh}}{x} \sin l y dy, \quad (11)$$

где $c_1 = \left(\frac{e_{II}'}{e_I'} - \frac{e_{II}'}{e_I'} \right) ch h_I d + \left(\frac{h_{II} e_I'}{h_I e_I'} - \frac{h_{II}}{h_I} \right) sh h_I d$.

На основании (7), (8), (11) можно записать систему уравнений для функций $N(I), N_I'(I), N_I''(I), N_{II}(I)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} - N(I) &= N_I'(I) + N_I''(I), \quad 1 + hN(I) = [N_I'(I) - N_I''(I)] h_I + 2 \frac{c_I}{c}; \\ N_I'(I) e^{-h_I d} + N_I''(I) e^{h_I d} &= N_{II}(I) e^{-h_{II} d}, \quad h_I [N_I'(I) e^{-h_I d} - N_I''(I) e^{h_I d}] = h_{II} N_{II}(I) e^{-h_{II} d}. \end{aligned} \quad (12)$$

Имея после решения (12) все неизвестные произвольные функции, запишем необходимое для дальнейших рассуждений выражение

$$\begin{aligned} N(I) &= \frac{1}{h} - \frac{2c_z}{hh_I c} (h_I ch h_I d + h_{II} sh h_I d) - 2c_3 sh h_I d, \\ (h_I^2 - h) \left(\frac{e_{II}'}{e_I'} - 1 \right) sh h_I d &= \frac{e_{II}'}{e_I'} - 1 \end{aligned}$$

где $c_2 = 1 + \frac{h_I (h + h_{II}) ch h_I d + (h_I^2 + h h_{II}) sh h_I d}{h_I (h + h_{II}) ch h_I d + (h_I^2 + h h_{II}) sh h_I d}$, $c_3 = \frac{e_{II}'}{h_I c}$.

Теперь из уравнения $\text{div} \mathbf{E} = 0$ могут быть определены x -составляющие вектора электрической напряженности, например

$$E_x = \frac{1}{jg} \left(\frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz} \right). \quad (13)$$

Подставляя сюда выражения E_z из (6) и E_y из (7), с учетом (13) получим после преобразований, аналогичных [3], интегральные выражения для учета в матрице продольных сопротивлений влияния двухслойной земли:

$$f_{z_{km}} = 2 \int_0^\infty \frac{hh_{II} cth h_I d + hh_I \frac{e_{II}'}{e_I'} - l^2 \left[cth h_I d + \left(\frac{e_{II}'}{e_I'} - 1 \right) cth(h_I d + y) + \frac{h_{II}}{h_I} \right]}{h \left[\left(\frac{h_{II}}{h} + \frac{e_{II}'}{e_I'} \right) cth h_I d + \frac{h_{II} e_I'}{h_I e_I'} + \frac{e_{II}'}{e_I'} h \right]} e^{-(h_k + h_m) l} \cos l y dl, \quad (14)$$

$$\text{где } y = \text{arcth} \frac{\frac{h_I}{h} - \frac{h_{II}}{h_I}}{1 + \frac{h_{II}}{h}} = \frac{1}{2} \ln \frac{(h_I + h)(h_I + h_{II})}{(h_I - h)(h_I - h_{II})}.$$

Полагая здесь для проверки параметры слоев земли одинаковыми, получаем совпадение с решением [3]:

$$f_{z_{km}} = 2 \int_0^\infty \frac{hh_I - l^2}{e' h_I + e_I' h} e^{-(h_k + h_m) l} \cos l y dy.$$

Решение, подобное изложенному, может быть выполнено и для многослойной земли, однако выкладки в этом случае весьма громоздки. Поэтому здесь становится оправданным применение численных методов. Учитывая, что конструкция решения и граничных условий для многослойной земли подобна (2) и (4), для z -составляющей электрической напряженности

можно представить систему (5) для n – слоев земли с границами d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) в матричном виде

$$A_z \times M = B_z, \quad (15)$$

$$\text{где } A_z = \begin{vmatrix} e' & e'_I & e'_I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h & -h_I & h_I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e'_I e^{-h_I d_I} & e'_I e^{h_I d_I} - e'_{II} e^{-h_{II} d_I} - e'_{II} e^{h_{II} d_I} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_I e^{-h_I d_I} - h_I e^{h_I d_I} - h_{II} e^{-h_{II} d_I} & h_{II} e^{h_{II} d_I} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & e'_{n-1} e^{-h_{n-1} d_{n-1}} & e'_{n-1} e^{h_{n-1} d_{n-1}} - e'_n e^{-h_n d_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-1} e^{-h_{n-1} d_{n-1}} & -h_{n-1} e^{h_{n-1} d_{n-1}} - h_n e^{h_n d_{n-1}} \end{vmatrix}$$

- квадратная ленточная матрица системы алгебраических уравнений для определения произвольных функций M в решении типа (2); $M = [M(I) \ M'_I(I) \ M''_I(I) \dots M_n(I)]^T$ - столбец неизвестных; $B_z = [-e' \ h \ 0 \dots \ 0]^T$ - столбец свободных членов (τ – операция транспонирования).

Решая (15) для фиксированных значений I , можно численно определить искомые функции. При определении y – составляющих электрического поля в рассматриваемом случае удобно представить дифференциальные соотношения на границах раздела d_i ($i = 1, 2, \dots, n$), аналогичные (10) и (11), в виде

$$\begin{aligned} \frac{dE_y}{dz} - \frac{dE_y^I}{dz} &= x \int_0^\infty [M(I) + 1 - M'_I(I) e^{-h_I d_I} - M'_I(I) e^{h_I d_I}] e^{-hI} I \sin I y dI ; \\ \frac{dE_y^I}{dz} - \frac{dE_y^{II}}{dz} &= -x \int_0^\infty [M'_I(I) e^{-h_I d_I} + M'_I(I) e^{h_I d_I} - M''_{II}(I) e^{-h_{II} d_I} - M''_{II}(I) e^{h_{II} d_I}] e^{-hI} I \sin I y dI ; \\ &\dots \\ \frac{dE_y^n}{dz} - \frac{dE_y^n}{dz} &= -x \int_0^\infty [M'_{n-1}(I) e^{-h_{n-1} d_{n-1}} + M''_{n-1}(I) e^{h_{n-1} d_{n-1}} - M_n(I) e^{-h_n d_{n-1}}] e^{-hI} I \sin I y dI , \end{aligned} \quad (16)$$

а соотношения для самих составляющих могут быть взяты в виде (8).

Принимая решения для y – составляющих в виде, аналогичном (7), и используя (16) и (8), можно записать в матричном виде

$$A_y \times N = B_y, \quad (17)$$

$$\text{где } A_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h & -h_I & h_I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-h_I d_I} & e^{h_I d_I} & -e^{-h_{II} d_I} & -e^{h_{II} d_I} & \dots & 0 \\ 0 & h_I e^{-h_I d_I} - h_I e^{h_I d_I} - h_{II} e^{-h_{II} d_I} & h_{II} e^{h_{II} d_I} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & e^{-h_{n-1} d_{n-1}} & e^{h_{n-1} d_{n-1}} & e^{-h_n d_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-1} e^{-h_{n-1} d_{n-1}} & -h_{n-1} e^{h_{n-1} d_{n-1}} & -h_n e^{h_n d_{n-1}} \end{vmatrix}$$

– квадратная ленточная матрица для определения произвольных функций N в решении типа (7); $N = [N(I) \ N'_I(I) \ N''_I(I) \dots N_n(I)]^T$ - столбец неизвестных;

$$B_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} \\ 1 + M(I) - M'_I(I) - M''_I(I) \\ 0 \\ -M'_I(I)e^{-h_1 d_I} - M''_I(I)e^{h_1 d_I} + M'_H(I)e^{-h_H d_I} + M''_H(I)e^{h_H d_I} \\ \dots \\ -M'_{n-1}(I)e^{-h_{n-1} d_{n-1}} - M''_{n-1}(I)e^{h_{n-1} d_{n-1}} + M'_n(I)e^{-h_n d_{n-1}} \end{pmatrix} \quad \text{- столбец свободных членов.}$$

Теперь из (13) можно определить x - составляющую вектора электрической напряженности и, учитывая, что

$$\frac{de_y}{dy} = x \int_0^\infty \frac{l^2}{h} e^{h(z-h)} \cos l y dl - x \int_0^\infty l^2 N(I) e^{-h(z+h)} \cos l y dl ;$$

$$\frac{de_z}{dz} = x \int_0^\infty h e^{h(z-h)} \cos l y dl - x \int_0^\infty h M(I) e^{-h(z+h)} \cos l y dl ;$$

$$N(I) = \frac{1}{h} - N'_I(I) - N''_I(I), hM(I) = h + h_I M'_I(I) - h_I M''_I(I) ,$$

получим интегральное выражение, отражающее влияние многослойной земли:

$$f_{z_{km}} = \int_0^\infty \{ h_I [M''_I(I) - M'_I(I)] - N'_I(I) - N''_I(I) \} e^{-(h_k + h_m)l} \cos l y dl ,$$

где выражения $M'_I(I), M''_I(I), N'_I(I), N''_I(I)$ могут быть найдены для любого значения l при численном решении систем (15) и (17).

Данное выражение можно использовать для получения уточненных данных о влиянии поверхностного эффекта и токов смещения в многослойной земле.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. М.: Энергоатомиздат, 2001. 320 с.
2. Carson J.R. Wave propagation in overhead wires with ground return // BSTJ. V. 5. №4. 1926. С. 31-37.
3. Г.А.Гринберг, Б.А.Бонистедт. Основы точной теории волнового поля линии передачи // ЖТФ. Т. XXXIV. Вып. 1. 1954. С. 61-68.
4. Перельман Л.С. Уточнение теории распространения волн вдоль многопроводной линии в связи с некоторыми техническими задачами// Известия НИИПТ. 1963. Вып. 10. С. 46-58.
5. Костенко М.В., Перельман Л.С. К расчёту волновых процессов в многопроводных линиях// Изв. АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт. 1963. №6. С. 71-80.
6. Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: ИИЛ, 1968. 462 с.

Поступила 21.02.2003 г.