Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. К. Ланге, Сплайн-аппроксимация дискретных значений сигналов с применением методов цифровой фильтрации, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 134–138

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu153>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:20:00

СПЛАЙН – АППРОКСИМАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИГНАЛОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Рассмотрена задача построения цифровых фильтров дискретизированных сигналов с их параболической сплайн – аппроксимацией. Определены их параметры для весовых функций, определенных на четном и нечетном числе дискретных значений.

При сжатии измерительного сигнала во временной области часто используются различные алгоритмы аппроксимации, позволяющие на предварительном этапе преобразования сигнала определять коэффициенты его аппроксимирующих функций.

В ряде случаев эти коэффициенты являются информационными параметрами: например, коэффициенты параболической аппроксимации вибросигналов, поступающих с тензодатчиков, определяют значения виброскоростей и виброускорений.

В практике обработки сигналов весьма распространена сплайн – аппроксимация их дискретных значений, что определяется отсутствием разрывов аппроксимирующей функции по производным на границах интервалов дискретизации.

Известны выражения для определения коэффициентов параболической и кубической сплайн – аппроксимаций [1] дискретных значений сигнала на их фиксированном наборе. Такие сплайн – функции сглаживают шумы, наложенные на сигнал, однако в ряде случаев этого сглаживания бывает недостаточно.

В связи с тем, что сглаживание шумов аппроксимирующими функциями усиливается при расширении набора k – дискретных значений сигнала, актуальной является задача определения коэффициентов сплайн – функций, аппроксимирующих эти значения при произвольном k . Такая задача может быть решена на базе методов цифровой фильтрации сигнала.

Рассмотрим возможность определения коэффициентов аппроксимирующих сплайн – функций с использованием аппарата частотных характеристик цифровых фильтров. Пусть передаточная функция фильтра $F[n]$ имеет вид

$$F[n] = \sum_{m=0}^{-k} b_m x[n-m] + \sum_{m=1}^l b_m x[n+m], \quad (1)$$

где $x[n]$ – дискретные значения аппроксимируемого сигнала $x(t)$; b_m – коэффициенты весовой функции фильтра.

Оценим качество аппроксимации гармонического сигнала

$$x = \sin wt \quad (2)$$

как одного из наиболее распространенных в практике цифровой обработки сигналов.

В связи с тем, что внутри интервала дискретизации сигнала его значения могут быть определены с помощью аппроксимационных алгоритмов, выходной сигнал такого аппроксимационного фильтра можно считать квазинепрерывным и для оценки эффективности фильтра использовать методы оценки погрешности аппроксимации непрерывного гармонического сигнала.

При малой погрешности аппроксимации выходной сигнал такого фильтра можно считать близким к синусоидальному:

$$a_0(t) \approx H_0 \sin(wt - j), \quad (3)$$

где H_0 , j – значения амплитудно – и фазочастотных характеристик (АЧХ и ФЧХ) фильтра на частоте w .

Тогда значение среднеквадратичной погрешности аппроксимации сигнала определяется выражением

$$\Delta_a = \frac{1}{T} \int_0^T [\sin wt - H_0 \sin(wt - j)]^2 dt, \quad (4)$$

где T – период сигнала.

Используя замену переменных интегрирования в (4), получаем:

$$\Delta_a = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sin^2 wt - 2H_0 \sin wt \sin(wt-j) + H_0^2 \sin^2(wt-j) \right] dt =$$

$$= \frac{1}{T} \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2wt}{4w} \right) \Big|_{t=0}^T - \frac{2H_0}{T} \left(t \cos j \Big|_{t=0}^T - \frac{\sin t'}{2w} \Big|_{t'=j}^{2wT-j} \right) + \frac{H_0^2}{Tw} \left(\frac{t'}{2} - \frac{\sin 2t'}{4} \right) \Big|_{t'=j}^{wT-j}.$$

Преобразуя это выражение с учетом соотношения $w = \frac{2p}{T}$, окончательно определяем

$$\Delta_a = \frac{1}{2} - H_0 \cos j + \frac{H_0^2}{2} = \frac{(1-H_0)^2}{2} + H_0(1-\cos j). \quad (5)$$

Отсюда видно, что минимальное значение погрешности Δ_a достигается при минимальных значениях ФЧХ ($j(w) \approx 0$), а также при минимальном отличии АЧХ от единицы.

В связи с тем, что выходной сигнал цифрового фильтра представляет собой в данном случае дискретные значения гармонического сигнала (2), то (5) может быть использовано и для оценки средне квадратичной погрешности аппроксимации гармонического сигнала

$$x[n] = \sin \nu n, \quad (6)$$

где $\nu = 2p/N$ - относительная угловая частота; N - число дискретных участков на периоде сигнала $x[n]$.

Поставим задачу определения функции цифрового фильтра с нулевой фазовой погрешностью [2]: $j(\nu) = 0$. В связи с этим будем использовать цифровые фильтры с симметричными весовыми функциями вида (1), графики которых изображены на рис.1,а,б. Для функции, изображенной на рис.1,а, используется четное число дискретных значений сигнала, определенных на середине интервалов его дискретизации. Для функции, изображенной на рис.1б, используется нечетное число дискретных значений сигнала, определенных на границах интервалов его дискретизации.

Р и с. 1. Весовые функции цифровых фильтров

Цифровой фильтр, весовая функция которого изображена на рис.1а, в общем случае описывается выражением

$$a_0[n] = \left\{ b_0 x \left[n + \frac{1}{2} \right] + b_1 x \left[n + \frac{3}{2} \right] + \dots \right\} + \left\{ b_0 x \left[n - \frac{1}{2} \right] + b_1 x \left[n - \frac{3}{2} \right] + \dots \right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^m b_i \left\{ x \left[n + i + \frac{1}{2} \right] + x \left[n - (i + \frac{1}{2}) \right] \right\}, \quad (7)$$

где $x[n]$ - дискретные значения сигнала; b_i - коэффициенты весовой функции фильтра; m - параметр, соответствующий половине числа значений весовой функции фильтра.

Фильтр с весовой функцией, изображенной на рис.1,б, описывается выражением

$$a_0[n] = \{b_0x[n] + b_1x[n+1] + \dots\} + \{b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + \dots\} = \\ = b_0x[n] + \sum_{i=0}^m b_i \{x[n+(i+1)] + x[n-(i+1)]\}. \quad (8)$$

Для оценки частотных свойств таких фильтров необходимо выполнить z – преобразование выражений (7), (8). Дискретное z – преобразование выражения (7) имеет вид

$$a_0[z] = x[z] \sum_{i=0}^m b_i \left(z^{(i+1/2)} + z^{-(i+1/2)} \right). \quad (9)$$

Из (9) определяется дискретная передаточная функция аппроксимирующего цифрового фильтра:

$$H_0[z] = \frac{a_0[z]}{x[z]} = \sum_{i=0}^m b_i \left(z^{(i+1/2)} + z^{-(i+1/2)} \right). \quad (10)$$

Качество аппроксимации в дискретных точках может быть оценено по частотной и фазовой характеристикам цифрового фильтра, получаемым из (10) при подстановке в него $z = e^{jv}$.

Частотная характеристика такого фильтра имеет вид

$$H_0(jv) = 2 \sum_{i=0}^m b_i \cos v \left(i + \frac{1}{2} \right). \quad (11)$$

АЧХ этого фильтра определяется выражением

$$H_0(v) = |H_0(jv)| = 2 \sum_{i=0}^m b_i \cos v \left(i + \frac{1}{2} \right). \quad (12)$$

Аналогичным образом могут быть получены и выражения для АЧХ фильтра, весовая функция которого изображена на рис.1,б. Такой фильтр определяется выражением

$$a_0[n] = b_0x[n] + \{b_1x[n+1] + b_2x[n+2] + \dots\} + \{b_1x[n-1] + b_2x[n-2] + \dots\} \\ = b_0 + \sum_{i=1}^m b_i \{x[n+i] + x[n-i]\}. \quad (13)$$

Дискретное z – преобразование (13) имеет вид

$$a_0[z] = x[z] \left\{ b_0 + \sum_{i=1}^k \left[z^{(i+1)} + z^{-(i+1)} \right] b_i \right\}. \quad (14)$$

АЧХ такого фильтра определяется выражением

$$H_0(v) = b_0 + 2 \sum_{i=1}^m b_i \cos v i. \quad (15)$$

Разложение АЧХ (12) или (15) в степенной ряд в окрестности точки $v = 0$ имеет вид

$$H_0(v) \approx H_0(0) + H_0'(0)v + H_0''(0)\frac{v^2}{2} + \dots, \quad (16)$$

где $H_0(0)$, $H_0'(0)$, $H_0''(0)$ – значения функции $H_0(v)$ и ее производных в точке $v \approx 0$. Следовательно, минимальное значение средне квадратичной погрешности $\Delta a'$, определяемой (5), достигается при выполнении соотношений

$$H_0(0) = 1; H_0'(0) = 0; H_0''(0) = 0; \dots \quad (17)$$

Полученные выражения позволяют определить систему уравнений относительно искомым коэффициентов аппроксимирующего цифрового фильтра. Для фильтра, весовая функция которого изображена на рис.1,а, из (12) с учетом (17) получаем:

$$H_0(0) = 2 \sum_{i=0}^m b_i = 1; \\ H_0'(0) = -2 \sum_{i=0}^m \left(i + \frac{1}{2} \right) b_i \sin v \left(i + \frac{1}{2} \right) \Big|_{v=0} \approx -2 \sum_{i=0}^m \left(i + \frac{1}{2} \right) b_i v \left(i + \frac{1}{2} \right) \Big|_{v=0} = 0; \\ H_0''(0) = -2 \sum_{i=0}^m \left(i + \frac{1}{2} \right)^2 b_i \cos v \left(i + \frac{1}{2} \right) \Big|_{v=0} \approx -2 \sum_{i=0}^m \left(i + \frac{1}{2} \right)^2 b_i + \sum_{i=0}^k b_i \left(i + \frac{1}{2} \right)^4 v^2 \Big|_{v=0} = 0. \quad (18)$$

Из (18) определяется система из $(m-1)$ уравнений относительно искомым коэффициентов b_i :

$$\left. \begin{aligned} 2 \sum_{i=0}^m b_i &= 1; \\ \sum_{i=0}^m \left(i + \frac{1}{2}\right)^2 b_i &= 0; \\ \sum_{i=0}^m \left(i + \frac{1}{2}\right)^4 b_i &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Аналогичным образом определяется система уравнений относительно коэффициентов весовой функции фильтра (рис.1, б), использующего нечетное число дискретных значений сигнала:

$$\left. \begin{aligned} b_0 + 2 \sum_{i=1}^m b_i &= 1; \\ \sum_{i=1}^m (i+1)^2 b_i &= 0; \\ \sum_{i=1}^m (i+1)^4 b_i &= 0; \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Рассмотрим несколько примеров при аппроксимации дискретных значений сигнала параболическими сплайн - функциями.

Первая и вторая производные параболической функции

$$y = a_2 [n] t^2 + a_1 [n] t + a_0 [n] , \quad (21)$$

аппроксимирующей сигнал на $n - m$ дискретном интервале, определяются соответственно выражениями

$$\frac{da_0(t)}{dt} = 2a_2 [n] t + a_1 [n]; \quad \frac{d^2 a_0(t)}{dt^2} = 2a_2 [n] . \quad (22)$$

При $t = 0$ (на границах интервалов дискретизации), выражения (22) принимают вид

$$\left. \frac{da_0(t)}{dt} \right|_{t=0} = a_1 [n]; \quad \left. \frac{d^2 a_0(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = 2a_2 [n] . \quad (23)$$

Пусть время t измеряется в относительных единицах: $t[n+1] - t[n] = 1$. В связи с тем, что на границах дискретных интервалов параболическая сплайн - функция не должна иметь разрывов по нулевой и первой производным, из (22) и (23) определяются выражения

$$a_0 [n+1] = a_2 [n] + a_1 [n] + a_0 [n]; \quad a_1 [n+1] = 2a_2 [n] + a_1 [n] . \quad (24)$$

Дискретное z - преобразование (24) имеет вид:

$$a_2 + a_1 + a_0 (1 - z) = 0; \quad 2a_2 - a_1 (1 - z) = 0. \quad (25)$$

Из (25) определяются коэффициенты a_2, a_1 параболического сплайна (21):

$$a_1 [z] = 2 \frac{z-1}{z+1} F[z]; \quad a_2 [z] = \frac{(z-1)^2}{z+1} F[z]. \quad (26)$$

Например, для четырехточечного фильтра ($m = 1$) система (19) принимает вид

$$2b_0 + 2b_1 = 1; \quad b_0 + 9b_1 = 0. \quad (27)$$

Отсюда определяются значения коэффициентов такого фильтра:

$$b_1 = -\frac{1}{16}; \quad b_0 = \frac{9}{16}.$$

В этом случае дискретные значения $a_0[n]$ определяются выражением

$$a_0 [n] = -\frac{1}{16} x \left[n - \frac{3}{2} \right] + \frac{9}{16} x \left[n - \frac{1}{2} \right] + \frac{9}{16} x \left[n + \frac{1}{2} \right] - \frac{1}{16} x \left[n + \frac{3}{2} \right]. \quad (28)$$

Выражения для коэффициентов $a_1[n], a_2[n]$ параболы (21) определяются с помощью (26) и для рассматриваемого четырехточечного фильтра имеют вид

$$a_1 [n] = \frac{1}{8} \left(x \left[n - \frac{3}{2} \right] - 11x \left[n - \frac{1}{2} \right] + 11x \left[n + \frac{1}{2} \right] - x \left[n + \frac{3}{2} \right] \right);$$

$$a_2[n] = \frac{1}{16} \left(-x\left[n - \frac{3}{2}\right] + 12x\left[n - \frac{1}{2}\right] - 22x\left[n + \frac{1}{2}\right] + 12x\left[n + \frac{3}{2}\right] - x\left[n + \frac{5}{2}\right] \right).$$

Аналогичным образом определяются коэффициенты для сплайн - фильтров более высоких порядков. Следует отметить, что начало координат, а также узлы аппроксимации весовых функций таких фильтров расположены на середине дискретных интервалов (рис.1,а), поэтому фильтры с четным числом точек не совсем удобны для реализации в микропроцессорном исполнении.

Коэффициенты для весовой функции параболической сплайн – аппроксимации с нечетным числом дискретных точек (см. рис.1,б) определяются исходя из выражений (20). Например, коэффициенты аппроксимирующего пятиточечного параболического сплайн – фильтра определяются выражениями

$$a_0[n] = \frac{1}{16} \left(-x[n-2] + 4x[n-1] + 10x[n] + 4x[n+1] - x[n+2] \right),$$

$$a_1[n] = \frac{1}{8} \left(x[n-2] - 6x[n-1] + 6x[n+1] - x[n+2] \right),$$

$$a_2[n] = \frac{1}{16} \left(-x[n-2] + 7x[n-1] - 6x[n] - 6x[n+1] + 7x[n+2] - x[n+3] \right).$$

Использование описанного подхода позволяет определить коэффициенты и кубической сплайн – аппроксимации дискретных значений сигнала на их произвольном наборе.

Таким образом, рассмотренный метод позволяет достаточно просто определять коэффициенты весовых функций цифровых аппроксимирующих сплайн – фильтров, обладающих наименьшими значениями средне квадратичной погрешности аппроксимации гармонического сигнала.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Завьялов Ю.С. и др. Методы сплайн - функций. М.: Наука, 1980. 352с
2. Хемминг Р. Цифровые фильтры. М.: Сов. радио, 1980. 220с.

Поступила 3.03.2003 г.