Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Никонов, Модель распределения воздействий и реакций в протяженной среде с дискретными параметрами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 139–143

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu154>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:48:40

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЙ И РЕАКЦИЙ В ПРОТЯЖЕННОЙ СРЕДЕ С ДИСКРЕТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Составлена схема замещения протяженной среды единой физической природы, содержащая совокупность дискретных элементов с комплекснозначными параметрами. Распределение величин воздействий и реакций в данной среде отображает сформированная система линейных алгебраических уравнений, решение которой найдено с использованием рекуррентных формул.

Потребности совершенствования математических моделей, отображающих взаимосвязи компонентов протяженных физических сред [1], обусловили возникновение задачи обобщенного аналитического определения величин воздействий и реакций, которые проявляют себя в моделируемых средах с различными конфигурациями их элементов. Природа данных элементов может быть различной, например электрической, магнитной или механической. За воздействия на среду (часть среды) и за соответствующие реакции в ней могут приниматься известные физические величины, в частности такие, выбор которых обеспечивает получение размерностей мощности или энергии для произведений парных воздействий и реакций.

Ниже рассматривается схемное представление двух вариантов среды, протяженной вдоль заданной оси и подвергаемой известным входным воздействиям, а также формирование и решение системы линейных алгебраических уравнений, описывающей распределение величин воздействий и реакций в данной среде. При этом учитывается возможность изменения параметров схемных элементов, связанных с проявлением факторов внешнего (по отношению к моделируемому объекту) характера.

Схема замещения среды условно разделяется на последовательно соединенные между собой ячейки с дискретными элементами продольного и поперечного типов. Элементы каждой полной ячейки, помеченной индексом k на рис. 1,а или на рис. 1,б, располагаются либо симметрично как относительно продольной (x), так и относительно поперечной оси данной среды (первой вариант конфигурации, рис. 1,а), либо симметрично лишь относительно поперечной оси (второй вариант конфигурации, рис. 1,б); $k \in K = \{1, \dots, n-1\}$, причем индексы 0 и n присвоены крайним схемным ячейкам, содержащим неполные элементные наборы. Продольные и поперечные (типов Z, Y) элементы, а также величины воздействий и реакций (типов u, i) в схемах замещения для первого и второго вариантов среды помечены соответственно верхними индексами I и T .

Кроме того, применительно к рассмотрению рис. 1 используем следующие обозначения:

g, q – числовые индексы, берущиеся из множеств-объединений соответственно; $K \hat{E} \{n\}$, $K_0 = \{0\} \hat{E} K$, т. е.

$$g = \begin{cases} k : g \in K; \\ n : g \notin K; \end{cases} \quad q = \begin{cases} 0 : q \notin K; \\ k : q \in K, \end{cases}$$

$u_g \hat{I} \{u_k\} \hat{E} \{u_n\}$ – величина воздействия, выделяемая между центрами верхних и нижних (согласно рис. 1) продольных элементов схемы замещения среды; $i_g \hat{I} \{i_k\} \cup \{i_n\}$ – величина реакции, выделяемая в продольном схемном элементе, причем известно [1], что $i_g^{II} = i_g^{I2} = i_g^I$; a – индекс, поставленный в соответствие физической природе моделируемой среды; u_a – входное воздействие на моделируемую среду.

Символы u_a, u_g, i_g обобщают парные обозначения соответственно $(u_a^I, u_a^T), (u_g^I, u_g^T), (i_g^I, i_g^T)$.

На практике некоторые поперечные компоненты моделируемой среды могут подвергаться влиянию какой-либо внешней величины иной физической природы, в соответствие которой поставим индекс $l^1 a$. Положим, что при наличии указанного влияния число подпадающих под него поперечных компонентов среды составляет $c^3 l$. Набор подвергаемых модельному проявлению данного влияния поперечных элементов схемы замещения представляет собой подмножество их полной совокупности $Y_{la} = \{Y_q : q \in \overline{m, m + \chi - 1}; m, m + \chi - 1 \in K_0\}$.

Р и с . 1 Схемные варианты моделирования протяженной среды, содержащие I -образные (а) и T -образные (б) ячейки с дискретными элементами

Источник внешнего влияния на подмножество Y_{Ia} может перемещаться вдоль оси x , последовательно захватывая в сферу своего действия одни поперечные элементы и высвобождая из нее другие.

Величины u_g, i_g , а также дискретные параметры схемных элементов в общем случае представляются комплексными числами, причем рассматриваемые параметры являются постоянными и обозначаются следующим образом: z – параметр любого из элементов Z_{gl}^I или Z_{g2}^I , а $2z$ – параметр любого элемента Z_k^T ; y_q – параметр любого из элементов Y_q^I или Y_q^T ; он может быть также представлен в виде

$$y_q = \begin{cases} y : q \notin \overline{m, m + \chi - 1}; \\ y_{m+l} : q \in \overline{m, m + \chi - 1}; \end{cases} \quad l \in \overline{0, \chi - 1}.$$

Комплекснозначность используемых воздействий, реакций, продольных и поперечных параметров отражает возможность проявления в моделируемой среде зависимых от времени величин гармонического характера; они исследуются в установившихся режимах. Кроме того, воздействия и реакции, выделяемые в среде (модели среды), являются ограниченными. Когда же воздействие на среду либо на ее часть отсутствует или заблокировано ($u_a=0$, $u_g=0$), то фактически наблюдается и отсутствие соответствующих реакций ($i_g=0$).

Описать распределение модельных величин типов u_g , i_g в виде линейной системы алгебраических уравнений позволяет следующее применение обобщенной формы законов Кирхгофа [1]:

$$\left. \begin{array}{l} a_{y0} x_{u1} = (1 + a_z a_{y0}) x_{i1}; \\ \text{-----} \\ k \quad x_{uk} + a_z x_{ik} = x_{u(k+1)} - a_z x_{i(k+1)}; \\ a_{yk} x_{u(k+1)} = (1 + a_z a_{yk}) x_{i(k+1)} - x_{ik}; \\ \text{-----} \\ n \quad x_{un} + a_z x_{in} = b_{ua}. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Здесь коэффициенты a_z, a_{y0}, a_{yk} – это нормированные значения параметров соответственно z, y_0, y_k , а неизвестные $x_{uk}, x_{ik}, x_{un}, x_{in}$ в нормированной форме представляют величины соответственно u_k, i_k, u_n, i_n ; b_{ua} – нормированное значение входного воздействия u_a . Слева от записи одиночных (крайних) и парных уравнений системы проставлены индексы схемных ячеек, на базе которых такие уравнения составлены; $a_z, a_{y0}, a_{yk}, x_{uk}, x_{ik}, x_{un}, x_{in}, b_{ua} \hat{I} C$, где C – поле комплексных чисел.

Задача дальнейшего исследования заключается в нахождении решения системы (1). В случае $a_z = (0, 0) = 0$, независимо от значений параметров типа y_k , из уравнений

$$x_{uk} + a_z x_{ik} = x_{u(k+1)} - a_z x_{i(k+1)}, \quad x_{un} + a_z x_{in} = b_{ua}$$

выводятся равенства $x_{uk} = x_{un} = b_{ua}$; $k \hat{I} K$. Если же нулевыми являются значения коэффициентов a_{y0}, a_{yk} , то при $k < m$, согласно уравнениям

$$a_{y0} x_{ui} = (1 + a_z a_{y0}) x_{il}; \quad a_{yk} x_{u(k+1)} = (1 + a_z a_{yk}) x_{i(k+1)} - x_{ik},$$

имеем $x_{i0} = x_{ik} = x_{im} = 0$.

При $k \geq m$, когда $a_{y(m+1)} \neq 0$, а $x_{i0} = 0$, уравнение

$$a_{yq} x_{u(q+1)} = x_{i(q+1)} - x_{iq}$$

уже не предполагает наличия лишь нулевых уровней величин $x_{ik}, x_{i(k+1)}$. Отсюда выводится рекуррентное соотношение: $x_{i(k+1)} = a_{yk} b_{ua} + x_{ik}$; $k \geq m$.

Если значение каждого параметра a_{yq} равно нулю, то нулевой является и каждая величина реакции x_{ig} .

Переходя к исследованию случая $a_z \neq 0$, заметим, что в любую совокупность уравнений системы (1), соответствующую набору ячеек с индексами $0, \dots, k$, не входят неизвестные, индексы которых превышают число $(k+1)$. Такая произвольная совокупность сводится к следующему набору уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_{uk} &= a_z \beta_{k-1} x_{ik}; \\ x_{u(k+1)} - a_z x_{i(k+1)} &= x_{uk} + a_z x_{ik}; \\ x_{u(k+1)} &= a_z \beta_k x_{i(k+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь коэффициенты вида β_k представляют собой шаговые параметры, определяемые рекуррентной формулой

$$\beta_k = \frac{(1 + \tilde{K}_k)(\beta_{k-1} + 1) + 1}{\tilde{K}_k(\beta_{k-1} + 1) + 1}; \quad (3)$$

$$\beta_0 = \frac{1 + \tilde{K}_0}{\tilde{K}_0}; \quad (4)$$

$$\tilde{K}_q = a_z a_{yq} = \begin{cases} \tilde{K}_q^0 = a_z a_y : y_q = y; \\ \tilde{K}_{m+1}^0 = a_z a_{m+1} : y_q = y_{m+1}, \end{cases}$$

a_y, a_{m+1} – нормированные значения параметров соответственно y, y_{m+1} ; если же $Y_{al} = \mathcal{E}$, то $\tilde{K}_q = \tilde{K}$ безальтернативно; $|\beta_q| \in \bar{\mathbb{R}}^+$, причём под $\bar{\mathbb{R}}^+$ понимается расширенное множество неотрицательных вещественных чисел [2].

Преобразовав (2), находим

$$(\beta_{k-1} + 1) x_{ik} = (\beta_k - 1) x_{i(k+1)}.$$

Согласно выражениям (3)-(4) придание двучлену $(\beta_{k-1} + 1)$ нулевого значения обуславливает справедливость равенства $(\beta_k - 1) = 0$.

Анализ исходной линейной системы по частям, которые соответствуют последовательно наращиваемым подмножествам схемных ячеек, после исключения неизвестных с индексами до $(n-1)$ включительно, даёт возможность выделить пару уравнений:

$$x_{un} = a_z \beta_{n-1} x_{in}; \quad x_{un} + a_z x_{in} = b_{ua}.$$

Отсюда имеем

$$x_{in} = \frac{b_{ua}}{a_z(\beta_{n-1} + 1)}, \quad x_{un} = \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-1} + 1} b_{ua},$$

причём требование ограниченности исследуемых величин накладывает соответствующее ограничение и на выбор элементных параметров, что должно обеспечить при моделировании соблюдение условия $(b_{n-1} + 1) \neq 0$.

Исходная линейная система (1) элементарно преобразуется к виду

$$AX_{ui} = B_{ua}, \quad (5)$$

где X_{ui} и B_{ua} - вектор-столбцы соответственно $[x_{ui} x_{i1} \dots x_{un} x_{in}]^T$, $[00 \dots 0 b_{ua}]^T$; A - матрица размера $(2n \times 2n)$, имеющая вид

$$\begin{bmatrix} 1 & -a_z \beta_0 & & & & 0 \\ & & \dots & & & \\ & & & \beta_{k-1} + 1 & -\beta_k + 1 & \\ & & & 1 & -a_z \beta_k & \\ & & & & \dots & \\ 0 & & & & & a_z (\beta_{n-1} + 1) \end{bmatrix}.$$

Входной параметр z_{ag} для произвольного схемного створа $a'_g - a''_g$ (см. рис.1) определяется отношением $(u_g + i_g z)/i_g$. Тогда, учитывая входящие в набор (2) уравнения $x_{uk} = a_z \beta_{k-1} x_{uk}$, $x_{u(k+1)} = a_z \beta_k x_{i(k+1)}$, получаем следующее выражение для z_{ag} в нормированной форме: $a_{zag} = a_z (\beta_{g-1} + 1)$.

Если параметр a_{zag} принимает нулевое значение, а это происходит когда $(\beta_{g-1} + 1) = 0$, то вход в часть модельной схемы по створу $a'_g - a''_g$ оказывается заблокированным. Таким образом, если при некотором $g = \xi$ блокируется воздействие на данную часть схемы, то $x_{u\xi} = 0$ и равными нулю становятся все уровни воздействий и реакций с индексами $g < \xi$.

Далее любые значения двучленов типа $(\beta_{g-1} + 1)$ полагаются уже ненулевыми. Тогда каждая строка матрицы A содержит ненулевой ведущий элемент, что соответствует известному критерию существования единственного решения неоднородной линейной системы [3], который применим, в частности, и к исследуемой системе (5).

Искомое решение имеет следующий вид:

$$x_{ik} = x_{in} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{b_j - 1}{b_{j-1} + 1}, \quad x_{in} = \frac{b_{ua}}{a_z (b_{n-1} + 1)}; \quad (6)$$

$$x_{uk} = a_z b_{k-1} x_{ik} = \frac{b_{ua}}{b_{n-1} + 1} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{b_j - 1}{b_{j-1} + 1}, \quad x_{un} = a_z b_{n-1} x_{in}. \quad (7)$$

Случай равенства нулю части параметров поперечных элементов при $a_z \neq 0$ рассмотрим, полагая, что упомянутый выше элементный набор $Y_{\lambda\alpha}$ подвергается внешнему влиянию. Для определенности положим $m \geq 1$, $\chi = 1$, т. е. принимаем

$$y_q = \begin{cases} 0 : q \neq m \geq 1; \\ y_m \neq 0 : q = m. \end{cases}$$

Тогда

$$|\beta_0| = \lim_{a_{y0} \rightarrow 0} \left| 1 + \frac{1}{a_z a_{y0}} \right| = \infty,$$

и поскольку $a_z b_0 x_{i1} = x_{u1} \neq \infty$, имеем $\lim_{a_{y0} \rightarrow 0} |x_{i1}| = 0 \Rightarrow x_{i1} = (0, 0) = 0$.

Для индексов вида $1 \leq k < m$ модули шаговых параметров и реакций в продольных элементах определяются, исходя из соотношений

$$|\beta_k| = \lim_{a_{yk} \rightarrow 0} \left| \frac{(1 + \tilde{K}_k)(\beta_{k-1} + 1) + 1}{\tilde{K}_k(\beta_{k-1} - 1) + 1} \right| = \infty; \quad a_z b_{k-1} x_{ik} = x_{uk} \neq \infty, \quad \lim_{a_{yk} \rightarrow 0} |x_{ik}| = 0 \Rightarrow x_{ik} = 0,$$

в частности, $x_{im} = \frac{x_{um}}{a_z b_{m-1}} = 0$.

При этом использование исходной системы позволяет выявить равенства, содержащие величины воздействия с индексами, не превышающими значение m : $u_1 = \dots = u_m$; $x_{u1} = \dots = x_{um}$.

Заметим, что если положить равными нулю сразу все значения параметров поперечных элементов, то решение, получаемое согласно применённому выше подходу, будет иметь вид $x_{ig} = 0$, $x_{ug} = b_{u\alpha}$. В рамках рассматриваемого случая $y_{q \neq m} = 0$ достижению равенства $k=m$ соответствует значение

$$b_m = \frac{1 + \tilde{K}_m}{\tilde{K}_m} \neq \infty.$$

С превышением индексами из K значения m любой шаговый параметр $\beta_{k>m}$ находится согласно выражению (3), а величины $x_{u g>m}$, $x_{i g>m}$ определяются соотношениями (6) - (7).

Итак, для различных сочетаний комплекснозначных параметров, относящихся к дискретным элементам типов Z и Y , которые входят в схему замещения протяженной среды, получены соответствующие модификации решения линейной системы алгебраических уравнений, отображающей модельное распределение величин u_g , i_g .

Воздействие u_{zg} , выделяемое непосредственно в продольном элементе I -образной схемной ячейки либо в одной из половин продольного элемента T -образной схемной ячейки, а также реакция i_{yq} , непосредственно выделяемая в поперечном элементе, определяются следующими выражениями, которые представляют нормированную форму данных величин:

$$x_{uzg} = a_z x_{ig}, \quad x_{iq} = a_{yq} (x_{u(q+1)} - a_z x_{i(q+1)}).$$

Правые части приведённых выражений содержат компоненты уже полученного нами системного решения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зарилов М.Ф., Никонов А.И., Петрова И.Ю. Элементы теории информационных моделей преобразователей с распределёнными параметрами. Уфа: Башкир. филиал АН СССР, 1983. 156 с.
2. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 432 с.
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994. 320 с.

Поступила 22.04.2003 г.