Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Мелентьев, Оптимизация алгоритмов определения мощности периодических сигналов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 144–149

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu155>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:22:39

ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОЩНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Проведен анализ метода измерения активной и реактивной мощностей по мгновенным значениям сигналов, равномерно распределенным по периоду. Предложена методика оптимального выбора числа точек дискретизации в зависимости от спектра сигналов и требуемой точности измерения.

Широко распространенные периодические сигналы различной физической природы в большинстве случаев преобразуются в электрические, наиболее удобные для передачи, усиления и сравнения. В свою очередь среди электрических сигналов одними из наиболее распространенных и удобных для измерения являются электрические напряжения и токи.

Важнейшими параметрами, характеризующими энергетические соотношения в цепях переменного тока, являются активная и реактивная мощности:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos j_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k ; \quad (1)$$

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin j_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k , \quad (2)$$

где U_k , I_k - среднеквадратические значения напряжения и тока k -той гармоники; j_k - угол сдвига фаз между k -тыми гармониками напряжения и тока.

При измерении интегральных характеристик периодических сигналов цифровыми методами наиболее распространен метод, основанный на обработке мгновенных значений сигналов, равномерно распределенных по периоду.

В соответствии с данным методом точное интегрирование непрерывной функции заменяется численным интегрированием. Из большого числа известных методов интегрирования периодических функций чаще всего используется метод прямоугольников.

При этом выражения (1) и (2) заменяются следующими приближенными формулами [1]:

$$P = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} u(t_p) i(t_p) ; \quad (3)$$

$$Q = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} u\left(t_{p+\frac{n}{4}}\right) i(t_p) , \quad (4)$$

где n - число измерений мгновенных значений за период; $t_p = \frac{Tp}{n}$; T - период сигнала.

Проведем анализ погрешности интегрирования при использовании метода прямоугольников.

В наиболее общем случае, при периодическом переменном токе произвольной формы, активную и реактивную мощности определяют, представляя ток и напряжение в виде тригонометрических рядов:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + y_{kU}) \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + y_{kI}) \right] dt ; \quad (5)$$

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin\left(k\omega t + k\frac{p}{2} + y_{kU}\right) \right] \left[\sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + y_{kI}) \right] dt , \quad (6)$$

где y_{kU} , y_{kI} - начальные фазы k -тых гармоник напряжения и тока. Рассмотрим мгновенные значения мощности. Из (5) и (6) следует, что сочетание a -той гармоники напряжения с b -той гармоникой тока определяются выражениями:

$$\frac{1}{2} U_{am} I_{bm} \{ \cos[(a-b)\omega t + y_{aU} - y_{bI}] - \cos[(a+b)\omega t + y_{aU} + y_{bI}] \} ; \quad (7)$$

$$\frac{1}{2} U_{am} I_{bm} \left\{ \cos\left[(a-b)\omega t + a\frac{p}{2} + y_{aU} - y_{bI}\right] - \cos\left[(a+b)\omega t + a\frac{p}{2} + y_{aU} + y_{bI}\right] \right\} . \quad (8)$$

При $a=b=k$ выражения (7) и (8) преобразуются к виду

$$\frac{1}{2}U_{km}I_{km}[\cos(y_{kU} - y_{kI}) - \cos(2kwt + y_{kU} + y_{kI})]; \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}U_{km}I_{km}\left[\cos\left(k\frac{p}{2} + y_{kU} - y_{kI}\right) - \cos\left(2kwt + k\frac{p}{2} + y_{kU} + y_{kI}\right)\right]. \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) показывают, что сочетание k -той гармоники напряжения с k -той гармоникой тока дают два члена ряда мгновенной мощности. Один постоянный член добавляется к средней мощности, а другой член – с частотой $2k\omega$.

Таким образом, мгновенные значения мощностей при $a=b=k$ можно представить в виде

$$p'(t) = p_{k0} - \frac{1}{2}U_{km}I_{km}\cos(2kwt + y_{kU} + y_{kI}); \quad (11)$$

$$q'(t) = q_{k0} - \frac{1}{2}U_{km}I_{km}\cos\left(2kwt + k\frac{p}{2} + y_{kU} + y_{kI}\right). \quad (12)$$

Подставляя (11), (12) в (3), (4) и учитывая, что $t_p = \frac{p}{n}T$ и $w = \frac{2p}{T}$, получим

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[p_{k0} - \frac{1}{2}U_{km}I_{km}\cos\left(\frac{4ppk}{n} + y_{kU} + y_{kI}\right) \right] = \\ &= P_0 - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{\infty} \left[U_{km}I_{km} \sum_{p=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4ppk}{n} + y_{kU} + y_{kI}\right) \right]; \end{aligned} \quad (13)$$

$$Q' = Q_0 - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{\infty} \left[U_{km}I_{km} \sum_{p=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4ppk}{n} + k\frac{p}{2} + y_{kU} + y_{kI}\right) \right]. \quad (14)$$

Рассмотрим выражения

$$X_{Pk} = \sum_{p=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4ppk}{n} + y_{kU} + y_{kI}\right); \quad (15)$$

$$X_{Qk} = \sum_{p=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4ppk}{n} + k\frac{p}{2} + y_{kU} + y_{kI}\right). \quad (16)$$

Найдем суммы рядов при $\frac{k}{n} = g$, где $g=1, 2, \dots$:

$$X_{Pk} = \sum_{p=0}^{n-1} \cos(y_{kU} + y_{kI}) = n\cos(y_{kU} + y_{kI}); \quad (17)$$

$$X_{Qk} = n\cos\left(ng\frac{p}{2} + y_{kU} + y_{kI}\right). \quad (18)$$

Тогда абсолютная погрешность в соответствии с (17), (18) равна:

$$\begin{aligned} \Delta P' &= -\frac{1}{2} \sum_{g=1}^{\infty} U_{ngm}I_{ngm}\cos(y_{kU} + y_{kI}); \\ \Delta Q' &= -\frac{1}{2} \sum_{g=1}^{\infty} U_{ngm}I_{ngm}\cos\left(ng\frac{p}{2} + y_{kU} + y_{kI}\right). \end{aligned}$$

Так как в общем случае $\cos(y_{kU} + y_{kI})$ и $\cos\left(ng\frac{p}{2} + y_{kU} + y_{kI}\right)$ могут принимать случайные значения, то предельные значения абсолютной погрешности равны

$$\sup(\Delta Q') = \sup(\Delta P') = \frac{1}{2} \sum_{g=1}^{\infty} U_{ngm}I_{ngm}. \quad (19)$$

При $\frac{k}{n} \neq g$, используя формулу Эйлера, представим (15) и (16) в виде рядов

$$X'_{Pk} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \left\{ \exp\left[j\left(\frac{4ppk}{n} + y_{kU} + y_{kI}\right)\right] + \exp\left[-j\left(\frac{4ppk}{n} + y_{kU} + y_{kI}\right)\right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \left\{ \exp \left[j(y_{kU} + y_{kl}) \right] \exp \left(j \frac{4p p k}{n} \right) + \exp \left[-j(y_{kU} + y_{kl}) \right] \exp \left(-j \frac{4p p k}{n} \right) \right\};$$

$$X'_{Qk} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n-1} \left\{ \exp \left[j \left(k \frac{p}{2} + y_{kU} + y_{kl} \right) \right] \exp \left(j \frac{4p p k}{n} \right) + \exp \left[-j \left(k \frac{p}{2} + y_{kU} + y_{kl} \right) \right] \exp \left(-j \frac{4p p k}{n} \right) \right\}.$$

Сумма $\sum_{p=0}^{n-1} \exp \left(j \frac{4p p k}{n} \right)$ представляет собой сумму геометрической прогрессии

$$\sum_{p=0}^{n-1} \exp \left(j \frac{4p p k}{n} \right) = \frac{1 - \exp(j4pk)}{1 - \exp \left(j \frac{4p p k}{n} \right)}. \quad (20)$$

Аналогично

$$\sum_{p=0}^{n-1} \exp \left(-j \frac{4p p k}{n} \right) = \frac{1 - \exp(-j4pk)}{1 - \exp \left(-j \frac{4p p k}{n} \right)}. \quad (21)$$

Поскольку в соответствии со следствием из формулы Эйлера $1 - \exp(j4pk) = 0$, то (20) и (21) равны нулю, кроме случаев, когда $\frac{k}{n} = g$, при котором знаменатели также становятся равными нулю. Однако сумма X_k в этом случае известна из (17) и (18).

Следовательно, при $a=b=k$ высшие гармоники, для которых $\frac{k}{n} \neq g$ - нецелое число, не вносят методической погрешности.

При $a \neq b$ оба члена в выражениях (5) и (6) синусоидальны и имеют разные частоты.

Тогда в соответствии с (7) и (8) для мгновенных значений мощностей получим

$$p''(t) = \frac{1}{2} U_{am} I_{bm} \{ \cos[(a-b)wt + y_{aU} - y_{bL}] - \cos[(a+b)wt + y_{aU} + y_{bL}] \};$$

$$q''(t) = \frac{1}{2} U_{am} I_{bm} \left\{ \cos \left[(a-b)wt + a \frac{p}{2} + y_{aU} - y_{bL} \right] - \cos \left[(a+b)wt + a \frac{p}{2} + y_{aU} + y_{bL} \right] \right\}.$$

В этом случае средняя мощность будет определяться только сочетанием гармоник $a=b=k$, а абсолютная погрешность равна:

$$\Delta P'' = \frac{1}{2n} \sum_{a=1}^{\infty} U_{am} \sum_{\substack{b=1 \\ a \neq b}}^{\infty} I_{bm} \sum_{p=0}^{n-1} \left\{ \cos \left[(a-b) \frac{2p p}{n} + y_{aU} - y_{bL} \right] - \cos \left[(a+b) \frac{2p p}{n} + y_{aU} + y_{bL} \right] \right\}, \quad (22)$$

$$\Delta Q'' = \frac{1}{2n} \sum_{a=1}^{\infty} U_{am} \sum_{\substack{b=1 \\ a \neq b}}^{\infty} I_{bm} \sum_{p=0}^{n-1} \left\{ \cos \left[(a-b) \frac{2p p}{n} + a \frac{p}{2} + y_{aU} - y_{bL} \right] - \right.$$

$$\left. - \cos \left[(a+b) \frac{2p p}{n} + a \frac{p}{2} + y_{aU} + y_{bL} \right] \right\}. \quad (23)$$

Рассмотрим выражения

$$X_{Pa} = \sum_{p=0}^{n-1} \cos \left[(a-b) \frac{2p p}{n} + y_{aU} - y_{bL} \right] \text{ и } X_{Qa} = \sum_{p=0}^{n-1} \cos \left[(a-b) \frac{2p p}{n} + a \frac{p}{2} + y_{aU} - y_{bL} \right].$$

При $\frac{(a-b)}{n} = g$ (т.е. - целое число) аналогично (17), (18) получим

$$X_{Pa} = n \cos(y_{aU} - y_{bL}); \quad X_{Qa} = n \cos \left(a \frac{p}{2} + y_{aU} - y_{bL} \right).$$

При $\frac{(a-b)}{n} \neq g$ (т.е. - нецелое число) по аналогии с (20) - (21) X_{Pa} и X_{Qa} обращаются в

ноль. Таким образом, высшие гармоники, сочетание которых $\frac{(a-b)}{n}$ - нецелое число, не вносят методической погрешности.

Рассмотрим выражения

$$X_{pb} = \sum_{p=0}^{n-1} \cos \left[(a+b) \frac{2pp}{n} + y_{aU} + y_{bl} \right] \text{ и } X_{Qb} = \sum_{p=0}^{n-1} \cos \left[(a+b) \frac{2pp}{n} + a \frac{p}{2} + y_{aU} + y_{bl} \right].$$

При $\frac{(a+b)}{n} = g$ (т.е. – целом числе) аналогично получим

$$X_{pb} = n \cos(y_{aU} + y_{bl}); \quad (24)$$

$$X_{Qb} = n \cos \left(a \frac{p}{2} + y_{aU} + y_{bl} \right). \quad (25)$$

При $\frac{(a+b)}{n} \neq g$ (т.е. – нецелом числе) X_{pb} и X_{Qb} обращаются в ноль. Таким образом, высшие гармоники, сочетание которых $\frac{(a+b)}{n}$ – нецелое число, не вносят методической погрешности.

В случае $a \neq b$ в соответствии с (22) – (25) находим абсолютную погрешность

$$\begin{aligned} \Delta P'' &= \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{\infty} I_{bm} \sum_{g=1}^{\infty} U_{(ng+b)m} \cos[y_{(ng+b)U} - y_{bl}] - \frac{1}{2} \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq ng}}^{\infty} I_{bm} \sum_{g=1}^{\infty} U_{(ng-b)m} \cos[y_{(ng-b)U} + y_{bl}]; \\ \Delta Q'' &= \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{\infty} I_{bm} \sum_{g=1}^{\infty} U_{(ng+b)m} \cos \left[\frac{(ng+b)p}{2} + y_{(ng+b)U} - y_{bl} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq ng}}^{\infty} I_{bm} \sum_{g=1}^{\infty} U_{(ng-b)m} \cos \left[\frac{(ng-b)p}{2} + y_{(ng-b)U} + y_{bl} \right]. \end{aligned}$$

Так как в общем случае $\cos[y_{(ng+b)U} - y_{kl}]$, $\cos[y_{(ng-b)U} + y_{kl}]$, $\cos \left[\frac{(ng+b)p}{2} + y_{(ng+b)U} - y_{kl} \right]$ и $\cos \left[\frac{(ng-b)p}{2} + y_{(ng-b)U} + y_{kl} \right]$ могут принимать случайные значения, то предельные значения абсолютной погрешности имеют следующий вид:

$$\sup(\Delta P'') = \sup(\Delta Q'') = \frac{1}{2} \left[\sum_{a=1}^{\infty} U_{am} \sum_{g=1}^{\infty} I_{(ng+a)m} + \sum_{b=1}^{\infty} I_{bm} \sum_{g=1}^{\infty} U_{(ng+b)m} + \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq ng}}^{\infty} I_{bm} \sum_{g=1}^{\infty} U_{(ng-b)m} \right]. \quad (26)$$

Из (19) и (26) получим

$$\sup(\Delta P) = \sup(\Delta Q) = \frac{1}{2} \left[\sum_{g=1}^{\infty} U_{ngm} I_{ngm} + \sum_{a=1}^{\infty} U_{am} \sum_{g=1}^{\infty} I_{(ng+a)m} + \sum_{b=1}^{\infty} I_{bm} \sum_{g=1}^{\infty} U_{(ng+b)m} + \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq ng}}^{\infty} I_{bm} \sum_{g=1}^{\infty} U_{(ng-b)m} \right]. \quad (27)$$

Приведенные погрешности в соответствии с (27) равны:

$$\sup(g_P) = \frac{\sup(\Delta P)}{S} = \frac{\sum_{g=1}^{\infty} U_{ngm} I_{ngm} + \sum_{a=1}^{\infty} U_{am} \sum_{g=1}^{\infty} I_{(ng+a)m} + \sum_{b=1}^{\infty} I_{bm} \sum_{g=1}^{\infty} U_{(ng+b)m} + \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq ng}}^{\infty} I_{bm} \sum_{g=1}^{\infty} U_{(ng-b)m}}{2S}; \quad (28)$$

$$\sup(g_Q) = \frac{\sup(\Delta Q)}{S} = \frac{\sum_{g=1}^{\infty} U_{ngm} I_{ngm} + \sum_{a=1}^{\infty} U_{am} \sum_{g=1}^{\infty} I_{(ng+a)m} + \sum_{b=1}^{\infty} I_{bm} \sum_{g=1}^{\infty} U_{(ng+b)m} + \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq ng}}^{\infty} I_{bm} \sum_{g=1}^{\infty} U_{(ng-b)m}}{2S}, \quad (29)$$

где $S = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} U_{km}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2}$ – полная мощность.

Анализ (28) и (29) показывает, что если номер высшей гармоники напряжения равен номеру высшей гармоники тока s , то определение активной мощности производится без методической погрешности, если $n > 2s$.

Если оба сигнала несинусоидальны, то любая гармоника напряжения или тока может в общем случае вносить вклад в погрешность. При этом, если номер анализируемой гармоники одного из сигналов v , то наименьшая гармоника другого сигнала, сочетание с которой дает погрешность, имеет номер $n-v$ (при условии, что $v < n$) [2].

Так, если один из сигналов синусоидальный, то наименьшая частота гармоники другого сигнала, вносящая вклад в методическую погрешность, равна частоте $(n-1)$ -й гармоники. В этом случае, например, при $n=100$ номер наименьшей гармоники будет равен 99.

Для анализа выражений (28) и (29), используя коэффициенты j -гармоник напряжения $h_{jU} = \frac{U_{jm}}{U_{1m}}$ и тока $h_{jI} = \frac{I_{jm}}{I_{1m}}$ и считая, что коэффициенты первых гармоник равны нулю, преобразуем их к виду

$$\sup(g_P) = \sup(g_Q) = \frac{\sum_{g=1}^{\infty} h_{ngU} h_{ngI} + \sum_{a=1}^{\infty} h_{aU} \sum_{g=1}^{\infty} h_{(ng+a)I} + \sum_{b=1}^{\infty} h_{bI} \sum_{g=1}^{\infty} h_{(ng+b)U} + \sum_{b=1}^{\infty} h_{bI} \sum_{g=1}^{\infty} h_{(ng-b)U}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} h_{kU}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} h_{kI}^2}}. \quad (30)$$

Так как спектры сигналов в общем случае носят случайный характер, то рассмотрим несколько типовых случаев.

Пусть число отсчетов за период n равно номеру высшей гармоники напряжения и тока s , а амплитуды гармоник обратно пропорциональны их номеру, т.е. $h_{jU} = h_{jI} = \frac{1}{j}$. Графики зависимости приведенной погрешности от числа отсчетов n согласно выражению (30) при различных значениях n представлены на рис. 1 и 2.

Р и с. 1. График зависимости погрешности от числа точек дискретизации при $n=s$ для $h_j = 1/j$

Р и с. 2. График зависимости погрешности от числа точек дискретизации при $n=s$ для $h_j = 1/j$

Анализ приведенных графиков показывает, что значение приведенной методической погрешности $\gamma < 1\%$ можно получить при $n \geq 500$.

Во втором случае будем считать, что $n=s$, а амплитуды гармоник обратно пропорциональны квадрату их номера, т.е. $h_{jU} = h_{jI} = \frac{1}{j^2}$. Для такого случая графики зависимости приведенной погрешности от числа отсчетов n представлены на рис. 3 и 4.

Анализ графиков показывает, что значение приведенной методической погрешности $\gamma < 0,01\%$ можно получить при $n \geq 200$.

Р и с. 3. График зависимости погрешности от числа точек дискретизации при $n=s$ для $h_i = 1/j^2$

Р и с. 4. График зависимости погрешности от числа точек дискретизации при $n=s$ для $h_i = 1/j^2$

Полученные результаты позволяют оптимально выбирать число точек дискретизации n в зависимости от спектра сигналов и заданной точности измерения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Smith Y.R.* Rapid detection and measurement of 3-phase reactive power, power and power-factor // *Electron. Lett.* 1972. Vol.8. №23. P. 574. 575.
2. *Батищев В.И., Мелентьев В.С.* Цифровые методы измерения интегральных характеристик периодических сигналов. Самара: СамГТУ, 2002. 96с.

Поступила 25.03.2003г.