Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Корниенко, Об одной спектральной задаче для системы дифференциальных уравнений смешанного типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2017, номер 4, 611–632

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1567>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 11:58:37

УДК 517.956.227

Об одной спектральной задаче для системы дифференциальных уравнений смешанного типа

Д. В. Корниенко

Елецкий государственный университет имени И. А. Бунина,
Россия, 399770, Елец, Липецкая обл., ул. Коммунаров, 28.

Аннотация

Изучаются спектральные характеристики дифференциального оператора, порожденного граничной задачей для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа. Простейшим примером классической системы уравнений в частных производных, попадающих в поле нашего рассмотрения, может служить система уравнений смешанного типа:

$$D_t u_1 - \text{sign}(t) D_x u_2 - \varepsilon u_2 = f_1, \quad D_t u_2 + D_x u_1 + \varepsilon u_1 = f_2,$$

эллиптическая при $t > 0$ и гиперболическая при $t < 0$.

Ключевые слова: граничные задачи, спектр оператора, системы дифференциальных уравнений в частных производных, периодическая задача, системы уравнений смешанного типа, базис.

Получение: 17 октября 2017 г. / Исправление: 15 декабря 2017 г. /

Принятие: 18 декабря 2017 г. / Публикация онлайн: 28 декабря 2017 г.

Введение. Настоящая статья посвящена изучению спектральных характеристик дифференциального оператора L , порожденного в гильбертовом пространстве H периодической задачей для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа. Эта система имеет следующий вид:

$$a D_t u(t) + b B u(t) = f(t), \quad \text{при } a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & -\text{sign}(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где B является M -оператором [1] в сепарабельном гильбертовом пространстве H_x ; D_t — оператор дифференцирования по переменной t ; $t \in V_t \equiv [T_1, T_2]$,

Научная статья

© Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

Образец для цитирования

Корниенко Д. В. Об одной спектральной задаче для системы дифференциальных уравнений смешанного типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2017. Т. 21, № 4. С. 611–632. doi: [10.14498/vsgtu1567](http://doi.org/10.14498/vsgtu1567).

Сведения об авторе

Дмитрий Васильевич Корниенко <http://orcid.org/0000-0002-3115-194X>

кандидат физико-математических наук, доцент; доцент; каф. прикладной математики и информатики; e-mail: dmkornienko@mail.ru

$-\infty < T_1 < 0 < T_2 < +\infty$. К системе уравнений (1), являющейся квазиэллиптической (квазигиперболической) системой первого типа [2] при $t > 0$ ($t < 0$), присоединены граничные условия вида

$$u(T_1) = u(T_2). \quad (2)$$

Для оператора L , порожденного задачей (1), (2), выписаны точечный спектр и аналитическое представление его собственных вектор-функций:

$$u_{m,k,s}(t) = e^k(t) \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{m,s}^1(t)e_1 + (-1)^{m+1} p_{m,s}^2(t)e_2).$$

Далее последовательно в гильбертовых пространствах H_t , H_t^2 , H_{tx} изучаются базисные свойства систем, составленных соответственно из компонент $u_{k,m,s}^j(t)$, $u_{k,m,s}(t)$, $u_{k,m,s}^j(t)\varphi^s$, $j = 1, 2$, собственных вектор-функций $\varphi^s u_{k,m,s}(t)$ оператора L . На основе проведенных исследований сформулирована теорема о базисных свойствах системы собственных вектор-функций периодической задачи для системы уравнений смешанного типа.

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H рассмотрим граничную задачу

$$aD_t u(t) + bBu(t) = \lambda u(t) + f(t), \quad (3)$$

$$\mu_1 u(T_1) + \mu_2 u(T_2) = 0 \quad (4)$$

со спектральным параметром $\lambda \in \mathbb{C}$. Здесь $f(t) \in H$; a, b, μ_1, μ_2 — заданные матрицы $(m \times m)$; D_t — оператор дифференцирования по переменной t .

Дифференциальный оператор B действует в H_x и удовлетворяет определенным требованиям, формулируемым в терминах спектральной теории операторов. Примеры интересующих нас дифференциальных операторов B и, следовательно, линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных приведены ниже.

Операция $L(Dt, B) = aD_t + bB$ в этом случае определена, естественно, на достаточно гладких вектор-функциях $u : \mathbb{R} \rightarrow H_x^m$, $u = u(t)$, $u(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^m(t))^T \in H_x^m$, $u^j(t) \in H_x$, $j = 1, 2, \dots, m$, принадлежащих для каждого $t \in V_t$ области определения $\mathfrak{D}(B)$ оператора B .

Элемент $u(t) \in H$ будем называть решением задачи (3), (4), если найдется последовательность таких гладких и удовлетворяющих условиям (4) вектор-функций $u_n(t) \in \mathfrak{D}(B)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = u(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} L(Dt, B)u_n(t) = f(t).$$

Другими словами, мы имеем дело с задачей (3), (4), понятие решения которой, как легко заметить, использует стандартную процедуру замыкания (расширения) операции $L(Dt, B) = aD_t + bB$ при условиях (4). Оператор $L : H \rightarrow H$, определяемый как замыкание в H операции $L(Dt, B)$, первоначально заданной на гладких вектор-функциях, удовлетворяющих условиям (4), называют сильным расширением операции $L(Dt, B)$ при условиях (4). В этом случае решение $u = u(t)$ называют *сильным решением* задачи (3), (4).

Уравнение (3) зачастую называют *операторным* или *дифференциально-операторным* уравнением первого порядка по t . Уравнение (3) находит широкое применение при исследовании в цилиндре граничных задач для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Принципиальная схема перехода от граничной задачи для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных к соответствующему дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве H будет описана ниже. Здесь же отметим следующее. Интересующие нас вопросы спектральной теории граничных задач для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных будут изучены на основе свойств сопоставляемого задаче дифференциального оператора $L : H \rightarrow H$. Свойства оператора L описываются в терминах спектральной теории линейных операторов.

2. Пространство H и его представления. Пусть H_x — сепарабельное гильбертово пространство с базисом Рисса $\{\varphi^s\}$, $s \in S$. Здесь и в дальнейшем S — некоторое счетное множество индексов s , которыми нумеруются элементы φ^s базиса пространства H_x . Не ограничивая общности результатов и учитывая ограничения, накладываемые на изучаемую граничную задачу, можно считать, что $H_x = \mathcal{L}_2(V_x)$ — гильбертово пространство комплексных функций над замкнутой ограниченной областью V_x евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля. Пусть также система $\{\psi^s\}$, $s \in S$, является базисом H_x , биортогональным базису $\{\varphi^s\}$, $s \in S$. В таком случае биортогональная система $\{\varphi^s, \psi^s\}$, $s \in S$, состоит из базисов Рисса пространства H_x .

Обозначим через $e_1, e_2, \dots, e_m$ канонический ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}^m$ вектор-столбцов:

$$e_1 \stackrel{\text{def}}{=} (1, 0, \dots, 0)^\top, \quad \dots, \quad e_m \stackrel{\text{def}}{=} (0, \dots, 0, 1)^\top,$$

а через U — унитарное пространство элементов $u = u^1 e_1 + \dots + u^m e_m$, $u^k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots, m$, со скалярным произведением

$$(u, v)_U = u^1 \overline{v^1} + u^2 \overline{v^2} + \dots + u^m \overline{v^m}.$$

Пусть также H_x^m — гильбертово пространство элементов $u = u^1 e_1 + \dots + u^m e_m$, $u^k \in H_k$; $k = 1, 2, \dots, m$, с нормой

$$\|u\|_{H_x^m} = \sqrt{\sum_{k=1}^m \|u^k\|_{H_x}^2}.$$

Очевидно, что любой элемент U является элементом $H_x = \mathcal{L}_2(V_x)$. При таком подходе U является собственным подпространством H_x . Отметим, что H_x^m можно представить в виде ортогональной суммы m копий гильбертова пространства H_x , то есть в виде

$$H_x^m = \sum_{k=1}^m \oplus H_x,$$

или кратко в виде

$$H_x^m = \bigoplus_{k=1}^m H_x.$$

Пусть $t \in V_t = [T_1, T_2]$, $-\infty < T_1 \leq 0 \leq T_2 < +\infty$, $T_2 - T_1 \neq 0$. Положим $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$ — гильбертово пространство комплексных функций над V_t с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля, $H_{tx} = H_t \otimes H_x$. В дальнейшем изучение свойств разрешимости граничной задачи для линейных систем уравнений в частных производных будем проводить в гильбертовом пространстве $H = H_t \otimes H_x^m$, $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$. Важную роль при исследовании свойств спектральной задачи для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных играет нижеследующая лемма 1 и вытекающая из нее лемма 2.

ЛЕММА 1. *Справедливо следующее равенство:*

$$H_{tx} = H_x \otimes U.$$

В силу теории биортогональных систем для любого элемента $u \in H_x^m$ имеет место представление в виде ряда $u = \sum_{s,k} u_s^k \varphi_k^s$ по биортогональной системе $\{\varphi_k^s, \psi_k^s\}$, $\varphi_k^s = \varphi^s e_k$, $\psi_k^s = \psi^s e_k$. Так как $u_s^k = (u, \psi_k^s) H_x^m = (u^k, \psi^s) H_x$, в силу безусловной базисности базиса $\{\varphi_k^s\}$ имеем также равносильное представление для элемента u : $u = \sum_s \varphi^s u_s$, где $u_s = u_s^1 e_1 + u_s^2 e_2 + \dots + u_s^m e_m \in U$.

Теперь мы можем получить другие формы представления гильбертова пространства H .

ЛЕММА 2. *Справедливы следующие равенства:*

$$H = H_t^m \otimes H_x = H_t \otimes H_x^m = \bigoplus_{k=1}^m H_{tx}.$$

Достаточно заметить, что для вектор-функции $u(t) \in H$ в силу леммы 1 справедливы два представления:

$$u(t) = \sum_{s,k} u_s^k(t) \varphi_k^s = \sum_s \varphi^s u_s(t),$$

и воспользоваться разложением вектор-функций $u_s(t)$ (функций $u_s^k(t)$) в ряд по полной ортонормированной системе в H_t^m (в H_t).

Отметим, что норма элемента u гильбертова пространства H вектор-функций $u : \bar{V} \rightarrow H_x^m$, $u = u(t) = u^1(t)e_1 + u^2(t)e_2 + \dots + u^m(t)e_m$ может быть вычислена по формуле

$$\|u\|_H = \left\| \|u(t)\|_{H_x^m} \right\|_{H_t}.$$

3. Дифференциальный оператор B и его расширение. Пусть $B : H_x \rightarrow H_x$ — линейный замкнутый неограниченный оператор с плотной в H_x областью определения $\mathfrak{D}(B)$, не зависящей от $t \in V_t$ и $B\varphi^s = B(s)\varphi^s$ для

любого $s \in S$, то есть все элементы базиса Рисса $\{\varphi^s\}$, $s \in S$, пространства H_x являются собственными элементами оператора B (собственному значению $B(s)$ соответствует собственный элемент φ^s). Оператор, для которого существует полная система собственных элементов, образующая базис Рисса в H_x , принято называть M -оператором [1] (от слова — модельный). Следует отметить, что существует M -оператор B , точечный спектр которого не имеет конечных предельных точек. В этом случае его резольвентное множество не пусто. Кроме этого, существует M -оператор B , резольвентное множество которого пусто [1]. Приведем примеры интересующих нас M -операторов.

1. $B = B(x, D_x)$, где $B(\cdot, D_x)$ является обыкновенным дифференциальным оператором на отрезке $V_x = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, порождаемым сильно регулярными краевыми условиями. Предполагается, что оператор $B(x, D_x)$ не имеет присоединённых функций.
2. Пусть $V_x = V_{x_1} \times V_{x_2} \times \dots \times V_{x_m}$, $V_{x_k} = [0, a_k]$, $0 < a_k < +\infty$, $k = 1, 2, \dots, m$. Пусть также $B(D_X) = \sum_{|a| \leq r} b_a D_x^a$ — дифференциальная операция с постоянными комплексными коэффициентами $b_a = b_{a_1, a_2, \dots, a_m}$; $D_x^a = D_{x_1}^{a_1} D_{x_2}^{a_2} \dots D_{x_m}^{a_m}$; $|a| = a_1 + a_2 + \dots + a_m$. Обозначим через $B : \mathcal{L}_2(V_x) \rightarrow \mathcal{L}_2(V_x)$ замыкание в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(V_x)$ дифференциальной операции $B(D_x)$, первоначально заданной на гладких функциях, удовлетворяющих по каждой переменной x_k нелокальным краевым условиям вида

$$\mu_k D_{x_k}^{l_k} u|_{x_k=0} = D_{x_k}^{l_k} u|_{x_k=b_k}, \quad l_k = 0, 1, \dots, r_k - 1,$$

где $\mu_k \neq 0$ и r_k — порядок $B(D_x)$ по переменной x_k ; $k = 1, 2, \dots, m$. Известно (см. [3, 4]), что замкнутый дифференциальный оператор B является M -оператором. Если $\mu_k = \dots = \mu_k = 1$, то оператор B принято называть Π -оператором [1].

3. Пусть V_x — замыкание ограниченной гладкой гиперповерхностью $S = \partial \tilde{V}_x$ области $\tilde{V}_x$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Пусть также $B(D_X) = \sum_{|a| \leq 2r} b_a(x) D_x^a$ — формально самосопряженная эллиптическая дифференциальная операция, причем $(-1)^r \sum_{|a| \leq 2r} b_a(x) \xi^a > 0$ для всех $x \in V_x$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\xi \neq 0$. Обозначим через $B : \mathcal{L}_2(V_x) \rightarrow \mathcal{L}_2(V_x)$ замыкание в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(V_x)$ дифференциальной операции $B(D_x)$, первоначально заданной на гладких функциях, удовлетворяющих условиям Дирихле

$$D_v^{k-1} u|_{x \in S} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r,$$

где v — единичная внешняя нормаль к поверхности S . Известно [5], что замкнутый дифференциальный оператор B обладает свойствами M -оператора, причем B является правильным оператором, то есть $0 \in \rho B$. В дальнейшем этот M -оператор B будем называть M -эллиптическим дифференциальным оператором.

Примечание 1. Следует отметить, что выбор M -оператора B определит при заданных матрицах a и b , во-первых, вид системы (3) дифференциальных уравнений в частных производных и, во-вторых, тип краевых условий по переменной x . Поэтому, говоря о краевой задаче для линейной системы

дифференциальных уравнений в частных производных, записанной в форме дифференциально-операторного уравнения (3), мы будем указывать только условия по переменной t , так как выбор условий по t определяет название задачи. Например, говоря о задаче Дирихле для системы (3), мы имеем в виду, что краевые условия (4) являются условиями Дирихле; условия по x вошли в определение оператора B и явно не оговариваются. Кроме этого, ради простоты обозначений переменная x (а иногда и переменная t) как аргумент вектор-функции $u \in H$ явно не указывается.

Положим $B(S) = \{B(s) : s \in S\}$. Будем считать выполненным следующее условие на структуру спектра M -оператора B .

УСЛОВИЕ 1. Точечный спектр оператора $B : H_x \rightarrow H_x$ представим в виде $P\sigma B = B(S)$.

Известно, что спектр σB оператора $B : H_x^m \rightarrow H_x^m$ состоит из замыкания на комплексной плоскости точечного спектра $P\sigma B$ оператора B . Множество $C\sigma B = \sigma B \setminus P\sigma B$ образует непрерывный спектр оператора B .

Заметим, что уравнение (3) мы рассматриваем в гильбертовом пространстве H вектор-функций $u(t) = u^1(t)e_1 + u^2(t)e_2 + \dots + u^m(t)e_m$ а оператор B определен на скалярах $u^k(t) \in H_x$ для любого $t \in V_t$ и любого $k = 1, 2, \dots, m$. Следующие соглашения являются оправданием такой записи. Так как H_x^m можно представить в виде ортогональной суммы m копий гильбертова пространства H_x , естественно определить расширение оператора B на H . Расширение оператора $B : H_x^m \rightarrow H_x^m$ на гильбертово пространство векторов H_x^m , как и принято, будем обозначать тем же символом B . Будем говорить, что $u = u^1e_1 + u^2e_2 + \dots + u^me_m \in \mathfrak{D}(B)$ — области определения оператора $B : H_x^m \rightarrow H_x^m$ и $Bu = (BU^1)e_1 + (BU^2)e_2 + \dots + (Bu^m)e_m$, если $u^k \in \mathfrak{D}(B)$ — области определения оператора $B : H_x \rightarrow H_x$ для любого $k = 1, 2, \dots, m$. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Спектр σB оператора $B : H_x^m \rightarrow H_x^m$ совпадает с замыканием $P\sigma B$ его точечного спектра $P\sigma B$. Точечный спектр $P\sigma B$ оператора B дается формулой $P\sigma B = B(S)$. Собственному значению $B(s)$ оператора B соответствуют m собственных векторов $\varphi_k^s = \varphi^s e_k$, $k = 1, 2, \dots, m$. Система $\{\varphi_k^s : k = 1, \dots, m, s \in S\}$ собственных векторов оператора B является базисом Рисса в гильбертовом пространстве H_x^m .

Доказательство. Если $\{\varphi^s, \psi^s : s \in S\}$ — биортогональная система в H_x , то система $\{\varphi_k^s, \psi_k^s : k = 1, 2, \dots, m; s \in S\}$ биортогональна в H_x^m . Для любого $u = \sum_{k=1}^m u^k e_k \in H_x^m$ имеем $u^k = \sum_s (u^k, \psi^s)_{H_x} \varphi^s$ в H_x , следовательно, и $u = \sum_{k,s} (u, \psi_k^s)_{H_x^m} \varphi_k^s$, причем разложение единственно. Существуют такие константы $0 < C_1 \leq C_2 < +\infty$, что для любого элемента $u^k \in H_x$ имеем

$$C_1^2 \sum_s |(u^k, \psi^s)_{H_x}|^2 \leq \|u^k\|_{H_x}^2 \leq C_2^2 \sum_s |(u^k, \psi^s)_{H_x}|^2. \quad (5)$$

Складывая неравенства (5) для значений $k = 1, 2, \dots, m$ и учитывая, что $(u^k, \psi^s)_{H_x} = (u^k, \psi^s)_{H_x^m}$, получаем неравенство

$$C_1^2 \sum_{k,s} |(u^k, \psi^s)_{H_x^m}|^2 \leq \|u^k\|_{H_x^m}^2 \leq C_2^2 \sum_{k,s} |(u^k, \psi^s)_{H_x^m}|^2,$$

из которого следует, что B является M -оператором в H_x^m . $\square$

4. Обобщенное решение. Пусть $\mathfrak{D}_t$ — линейное многообразие гладких вектор-функций из H_t^m , удовлетворяющих условию (4), а точнее,

$$\nu \in \mathfrak{D}_t, \text{ если } \begin{cases} v \in C^2(V_t^\pm) \cap C(V_t), \\ L_2(D_t)v \in H_t^m, \\ \Gamma_t v = 0, \end{cases}$$

где $L_2(D_t) = aD_t + bB(s)$, $\Gamma_t v = \mu_1 v(T_1) + \mu_2 v(T_2)$, $V_t^\pm = V_t \setminus \{T_1, 0, T_2\}$.

Пусть также $\mathfrak{D}$ — линейное многообразие, состоящее из вектор-функций $u : \mathbb{R} \rightarrow H_x^m$ вида

$$u(t) = \sum_s v_s(t) \varphi^s,$$

где $v_s(t)$ из $\mathfrak{D}_t$ и суммирование проводится для конечного набора индексов $s \in S$.

Для любых $u, f \in H$ будем говорить, что $u \in \mathfrak{D}(L)$ — области определения оператора $L : H \rightarrow H$ и $Lu = f$, если найдется такая последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ вектор-функций $u_n \in \mathfrak{D}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \|L(D_t, B)u_n - f\|_H = 0.$$

Оператор $L : H \rightarrow H$ называют замыканием операции $L(D_t, B) = aD_t + bB(D_x)$ — левой части системы уравнений (3), на вектор-функциях из $\mathfrak{D}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элемент $u \in \mathfrak{D}(L)$ будем называть обобщенным решением задачи (3), (4), если $Lu = \lambda u + f$ в H .

Таким образом, изучение свойств разрешимости задачи (3), (4) свелось к исследованию спектральных характеристик сопоставляемого ей оператора $L : H \rightarrow H$. Приведем некоторые подходы описания его спектра и свойств системы собственных вектор-функций. Пусть $L_s : H_x^m \rightarrow H_x^m$ — замыкание операции $L_s(D_t) = aD_t + bB(s)$ на функциях из $\mathfrak{D}_t$. Удобно считать, что и в этом случае B является оператором:

$$Bu = B(s)u, \quad B : H_x^m \rightarrow H_x^m,$$

оператором умножения на константу $B(s)$. Отметим ниже следующие очевидные свойства.

1. Для конечных линейных комбинаций $u_n = \sum_{k=1}^n \varphi^{sk} u_{sk}(t) \in \mathfrak{D}$ и $f_n = \sum_{k=1}^n \varphi^{sk} u_{sk}(t) \in H$ вектор-функция $u_n \in H$ является решением уравнения $Lu = \lambda u + f$ тогда и только тогда, когда для любого $k = 1, 2, \dots, n$ вектор-функция $u_{sk} \in H_x^m$ является решением уравнения $L_{sk}v = \lambda u + f_{sk}$.
2. Точечный спектр $P\sigma L$ оператора $L : H \rightarrow H$ дается формулой

$$P\sigma L = \bigcup_{s \in S} P\sigma L_s;$$

если $u(t)$ — собственная вектор-функция оператора $L_s : H_x^m \rightarrow H_x^m$, соответствующая собственному значению λ , то $\varphi^s u(t)$ — собственная вектор-функция оператора L , соответствующая собственному значению λ .

Структура собственных вектор-функций оператора L позволяет, как это проделано для скалярных функций, доказать ряд аналогичных теорем о свойствах систем собственных вектор-функций оператора L . Докажем интересные нас свойства.

ТЕОРЕМА 2. Если для любого $s \in S$ система (последовательность) $\{v_{k,s} : k \in K_s\}$ собственных вектор-функций оператора L_s , где K_s — некоторое (упорядоченное) множество значений индекса k , полна (образует базис) в пространстве H_x^m , то система

$$\{\varphi^2 v_{k,s} : k \in K_s; s \in S\} \quad (6)$$

собственных вектор-функций оператора L полна (образует базис) в пространстве H .

Доказательство. Сначала докажем полноту в H системы $\{u_{k,s} : k \in K_s; s \in S\}$ собственных вектор-функций $u_{k,s} = \varphi^s u_{k,s}$ оператора L . Пусть f — произвольный элемент H . Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой конечный набор $\{\varphi^{s_i} : i = 1, 2, \dots, N\}$, что

$$\left\| f - \sum_{i=1}^N \varphi^{s_i} f_{s_i} \right\|_H < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $f_{s_i} \in H_x^m$. Пусть $C = \max_{1 \leq i \leq N} \|\varphi^{s_i}\|_{H_x}$. Подберем для каждого $i = 1, 2, \dots, N$ такой конечный набор $\{v_{k_n, s_i} : n = 1, 2, \dots, N_i\}$, чтобы

$$\left\| f_{s_i} - \sum_{i=1}^{N_i} f_{k_n, s_i} v_{k_n, s_i} \right\|_{H_t^m} < \frac{\varepsilon}{2CN},$$

где $f_{k_n, s_i} \in \mathbb{C}$. Неравенство

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{N_i} f_{k_n, s_i} \varphi_{s_i} v_{k_n, s_i} \right\|_H &\leq \\ &\leq \left\| f - \sum_{i=1}^N f_{s_i} \varphi_{s_i} \right\|_H + C \sum_{i=1}^N \left\| f_{s_i} - \sum_{n=1}^{N_i} f_{k_n, s_i} v_{k_n, s_i} \right\|_{H_t^m} < \varepsilon \end{aligned}$$

дает утверждаемую полноту.

Исследуем теперь вопрос о базисности системы (6) в H . Из равенства $H = H_t^m \otimes H_x$ следует, что для любого элемента $f \in H$ справедливо в H представление $f = \sum_{s \in S} \varphi^s f_s$ в котором коэффициенты $f_s \in H_x^m$ определены однозначно. Так как последовательность $\{v_{k,s} : k \in K_s\}$ образует базис в пространстве H_t^m , для каждого элемента $f_s \in H_x^m$ справедливо в H_t^m представление

$$f_s = \sum_{k \in K_s} f_{k,s} v_{k,s},$$

где коэффициенты $f_{k,s} \in \mathbb{C}$ также определены однозначно. Следовательно, получаем единственное представление

$$f_s = \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_s} f_{k,s} \varphi^s u_{k,s}$$

произвольного элемента $f \in H$ в виде ряда по системе собственных вектор-функций оператора L . $\square$

Аналогично можно исследовать и другие свойства. А именно, является ли система собственных вектор-функций минимальной, бесселевой, гильбертовой, базисом Рисса и так далее. Соответствующие исследования проводились многими авторами. Например, при исследовании граничных задач для уравнений смешанного типа Е. И. Моисеев [6–8] широко использовал базисность систем синусов и косинусов для построения решения в виде биортogonalных рядов по этим системам. В дальнейшем мы будем изучать граничные задачи в пространстве $H = H_t^m \otimes H_x$ при $m = 2$. Поэтому естественно возникает вопрос о базисности аналогичных систем в пространствах вектор-функций. Приведем пример ортонормированного базиса $\{e_k : k \in K\}$ в H_t^2 составленного из синусов и косинусов, тем самым построим базис Рисса $\{e_k \varphi^s : k \in K, s \in S\}$ в пространстве H .

Положим

$$e_k^1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_2 - T_1}} \sin(A(k)(t - T_1)), \quad e_k^2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_2 - T_1}} \cos(A(k)(t - T_1));$$

$$e_k(t) = e_k^1(t)e_1 + e_k^2(t)e_2,$$

где $A(k) = k\pi/(T_2 - T_1)$.

ЛЕММА 3. Система $\{e_k(t)\varphi^s : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}; s \in S\}$ заведомо не является полной в гильбертовом пространстве $H = H_t^m \otimes H_x$. Система $\{e_k(t)\varphi^s : k \in \mathbb{Z}; s \in S\}$ является базисом Рисса в H .

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы 3. В силу рассмотренной теоремы 2 достаточно доказать, что система вектор-функций

$$\{e_k(t) : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \quad (7)$$

не является полной в H_t^2 . Найдем представление вектор-функции $f \in H_t^2$, $f(t) = f^1(t)e_1 + f^2(t)e_2$, ортогональной всем вектор-функциям системы (7). Из условия ортогональности для любого $k = 1, 2, 3, \dots$ в H_t имеем равенство

$$f(t) - A(k)F^1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^k e_m^2(t),$$

где

$$F^1(t) = \int_{T_1}^t f^1(\tau) d\tau, \quad c_k^k = 0.$$

Откуда получаем представление для функции $F^1(t)$:

$$A(1)F^1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (c_m^k - c_m^{k+1})e_m^2(t).$$

Так как $c_m^k - c_m^{k+1} = c_m^{k+1} - c_m^{k+2}$ при любом $k = 0, 1, 2, \dots$, имеем $c_m^{m-1} = -c_m^{m+1}$ для любого $m = 1, 2, 3, \dots$. Из равенства $c_m^k = (f^2 - A(1)F^1, e_m^2)_{H_t}$

последовательно получаем:

$$\begin{aligned} c_m^{m-1} &= c_m^0 - A(m-1)(F^1, e_m^2)_{H_t}; \\ c_m^{m+1} &= c_m^0 - A(m+1)(F^1, e_m^2)_{H_t}; \\ c_m^0 &= A(m)(F^1, e_m^2)_{H_t}. \end{aligned}$$

Отсюда находим $(f^1, e_m^1)_{H_t} = -c_m^0$. Следовательно, имеем разложения

$$f^1(t) = - \sum_{m=1}^{\infty} c_m^0 e_m^1(t), \quad f^2(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^0 e_m^2(t).$$

Положив в этих разложениях, например, $c_m^0 = 2^{-m}$, получаем искомую вектор-функцию $f \in H_t^2$, то есть вектор-функцию, ортогональную всем вектор-функциям системы (7).

Докажем теперь вторую часть леммы, рассуждая, как и прежде, от противного. Пусть вектор-функция $f(t) \in H_t^2$ отлична от нуля и ортогональна в H_t^2 всем вектор-функциям системы $\{e_k(t) : k \in \mathbb{Z}\}$. В силу доказанного ранее при $k = -1, -2, -3, \dots$ имеем

$$0 = (f, e_k)_{H_t^2} = 2c_{|k|}^0,$$

то есть $f = 0$. Замечая, что система

$$\{e_k(t)/\sqrt{2} : k \in \mathbb{Z}\} \quad (8)$$

является ортонормированной системой в H_t^2 и учитывая ее полноту в H_t^2 , получаем, что система (8) — ортонормированный базис в H_t^2 , а система $\{e_k(t)\varphi^2 : k \in \mathbb{Z}; s \in S\}$ — базис Рисса в $H = H_t^m \otimes H_x$. $\square$

Выделенные свойства оператора L приводят к необходимости исследования свойств операторов L_s . Займемся этим. Рассмотрим в H_t^m цепочку следующих спектральных задач:

$$L_s u(t) = \lambda u(t) + f(t), \quad s \in S. \quad (9)$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Если $\lambda \notin P\sigma L_s$, то структура резольвенты $R_\lambda = R_\lambda(L_s)$ оператора L_s легко просматривается из представления $u(t) = R_\lambda f(t)$:

$$R_\lambda f(t) = \int_{T_1}^{T_2} G_s(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau$$

— решения операторного уравнения (9). Матрицу Грина $G_s(t, \tau, \lambda)$ в данном случае удобно выписать в виде

$$G_s(t, \tau, \lambda) = \begin{cases} \Phi_s(t, \lambda) M_s^{-1}(\lambda) \mu_1 \Phi_s(T_1, \lambda) \times \\ \quad \times \Phi_s^{-1}(\tau, \lambda) a^{-1}(\tau), & T_1 \leq \tau \leq t \leq T_2; \\ \Phi_s(t, \lambda) M_s^{-1}(\lambda) \mu_2 \Phi_s(T_2, \lambda) \times \\ \quad \times \Phi_s^{-1}(\tau, \lambda) a^{-1}(\tau), & T_1 \leq t \leq \tau \leq T_2, \end{cases} \quad (10)$$

где $M_s(\lambda) = \mu_1 \Phi_s(T_1, \lambda) + \mu_2 \Phi_s(T_2, \lambda)$; $\Phi_s(t, \lambda)$ — фундаментальная матрица оператора $(L_s - \lambda E)$, E — тождественный оператор в H_t^m .

Представление (10) позволяет выписать функцию, нули которой являются собственными значениями оператора L_s и, следовательно, оператора L . Такой функцией, очевидно, является определитель $\Delta_2(\lambda)$ матрицы $\mu_1\Phi_s(T_1, \lambda) + \mu_2\Phi_s(T_2, \lambda)$. Положим $W_t = V_t \times V_t$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\lambda \notin P\sigma L$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\lambda \in \rho L$, если существуют такие
  - а) число $C > 0$ и
  - б) скалярные функции $g_s = g_s(t, \tau, \lambda)$, что для всех $s \in S$ и всех $(t, \tau) \in W_t$ матрица Грина $G_s(t, \tau, \lambda)$ оператора $(L_s - \lambda E)$ удовлетворяет неравенству

$$\|G_s(t, \tau, \lambda)u(\tau)\|_U \leq \|g_s(t, \tau, \lambda)u(\tau)\|_U$$

и нормы $\|g_s\|_{\mathcal{L}_2(\overline{W}_t)}$ равномерно по s ограничены, то есть для любого $s \in S$ имеет место неравенство $\sqrt{m}\|g_s\|_{\mathcal{L}_2(\overline{W}_t)} < C$.

- 2) $\lambda \in C\rho L$, если существуют такие вектор-функции $f(t) \in H_t^m$, $s \in S' \subseteq S$, что $f_s \neq 0$ и

$$\sup_{s \in S'} \frac{\|R_{\lambda, s} f_s\|_{H_t^m}}{\|f_s\|_{H_t^m}} = +\infty. \quad (11)$$

Доказательство. 1. Для любой вектор-функции $f(t) \in H$ в силу теоремы 2 имеем представление

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n \varphi^{s_k} f_{s_k}(t), \quad f_s(t) \in H_t^m.$$

Аппроксимируем $f(t) \in H$ частичной суммой $f_n(t) \in H$ ее разложения в ряд по биортогональной системе $\{\varphi_m^s, \psi_m^s\}$:

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^n \varphi^{s_k} f_{s_k}(t), \quad f_{s_k}(t) \in H_t^m$$

и определим входящую в определение обобщенного решения изучаемой задачи последовательность $\{u_n(t)\}$ в виде

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n \varphi^{s_k} u_{s_k}(t), \quad u_{s_k}(t) = R_{\lambda, s_k}(t).$$

Из свойств а) нормы, б) матрицы Грина, в) неравенства Коши—Буняковского и условий теоремы получаем необходимую нам оценку:

$$\|u_{s_k}\|_{H_t^m} \leq C \|f_{s_k}\|_{H_t^m}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 \|u_{s_k}(t)\|_U^2 &= \sum_{n=1}^m \left| \int_{V_t} \sum_{i=1}^m G_{s_k}^{n,i}(t, \tau, \lambda) f_{s_k}^i(\tau) d\tau \right|^2 \leq \\
 &\leq \left(\int_{V_t} \sum_{n=1}^m \left| \sum_{i=1}^m G_{s_k}^{n,i}(t, \tau, \lambda) f_{s_k}^i(\tau) \right| d\tau \right)^2 \leq m \int_{V_t} \|G_{s_k}(t, \tau, \lambda) f_{s_k}(\tau)\|_U d\tau \leq \\
 &\leq m \int_{V_t} |g(t, \tau, \lambda)|^2 d\tau \int_{V_t} \|f_{s_k}(\tau)\|_U^2 d\tau = \\
 &= m \int_{V_t} |g(t, \tau, \lambda)|^2 d\tau \|f_{s_k}(t)\|_U^2_{H_t}.
 \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться равенством $\|u_{s_k}\|_{H_t^m} = \|u_{s_k}(t)\|_U \|H_t\|$.

Далее, в силу теоремы 1 имеем двойное неравенство

$$C_1^2 \sum_{k=1}^n \|u_{s_k}\|_{H_t^m}^2 \leq \|u_n\|_H^2 \leq C_2^2 \sum_{k=1}^n \|u_{s_k}\|_{H_t^m}^2.$$

Учитывая доказанное, получаем неравенство

$$\|u_n\|_H \leq c \|f_n\|_H, \quad c = C \frac{C_2}{C_1}, \quad (12)$$

из которого следует единственность решения уравнения $Lu_n = \lambda u_n + f_n$, фундаментальность последовательности $\{u_n\}$ в H и существование решения уравнения $Lu_n = \lambda u_n + f$. Если положить $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, то, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве (12), получаем

$$\|u_n\|_H = \|(L - \lambda)^{-1} f\|_H \leq c \|f\|_H,$$

то есть $\lambda \in \rho L$.

2. Воспользуемся обозначениями и результатами первой части теоремы 3. В частности, было доказано, что оператор $(L - \lambda)^{-1}$ существует и задан на множестве, всюду плотном в H . Имеем

$$\frac{\|(L - \lambda)^{-1} \varphi^s f_s\|_H}{\|\varphi^s f_s\|_H} \geq \frac{C_1}{C_2} \frac{\|(L_s - \lambda)^{-1} f_s\|_{H_t^m}}{\|f_s\|_{H_t^m}},$$

откуда в силу условия (11) теоремы 3 получаем $\|(L - \lambda)^{-1}\| = +\infty$, то есть $\lambda \in C\rho L$. $\square$

Обозначим через $\widehat{L}_s$ сужение оператора L на подпространство $H_t^m \otimes \varphi_s$ пространства H . Тогда $\widehat{L}_s = L_s \otimes 1$. Учитывая важность оператора L_s , в дальнейшем будем называть его проекцией оператора L на пространство H_t^m относительно φ^s , или просто s -проекцией оператора L .

5. Спектральные характеристики дифференциального оператора одной линейной системы дифференциальных уравнений смешанного типа. Пусть $t \in V_t \equiv [T_1, T_2]$, $-\infty < T_1 < T_2 < +\infty$; $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$; $H_x = \mathcal{L}_2(V_x)$; $H = H_t \otimes H_x^2$.

Для $f(t) \in H$ рассмотрим уравнение

$$L(D_t, B)u \equiv aD_t u(t) + aBu(t) = f(t) \quad (13)$$

(под уравнением мы понимаем систему) и граничные условия вида

$$u(T_1) = u(T_2). \quad (14)$$

Здесь $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & -\text{sign}(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Как и ранее, $\mathfrak{D}$ — линейное многообразие, состоящее из гладких вектор-функций $u(t) \in C(V_t, H_x) \cap C^1(V_t^\pm, H_x)$, удовлетворяющих условиям (14) и принадлежащих для любого $t \in V_t^\pm$ области определения $\mathfrak{D}(B)$ оператора B . Здесь $C(V_t, H_x) = C(V_t) \otimes H_x$, $C(V_t) = C(V_t) \otimes U$; $C^1(V_t^\pm, H_x) = C^1(V_t^\pm) \otimes H_x$, $C^1(V_t^\pm) = C^1(V_t^\pm) \otimes U$; $V_t^\pm = V_t^- \cup V_t^+$, $V_t^- = (T_1, 0)$, $V_t^+ = (0, T_2)$.

Вопросами изучения спектральной теории граничных задач для уравнений смешанного типа посвящены работы [9–11]; в меньшей степени изучены соответствующие вопросы для систем уравнений смешанного типа. Отметим работу [12], в которой изучаются задача Римана—Гильберта для однородной системы уравнений Лаврентьева—Бицадзе в смешанной области с характеристическим участком границы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $f(t) \in H$. Элемент $u(t) \in H$ называем обобщенным решением граничной задачи (13), (14), если найдется последовательность таких гладких вектор-функций $u_n(t) \in \mathfrak{D}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(t) - u(t)\|_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \|L(D_t, B)u_n(t) - f(t)\|_H = 0.$$

Приведем вначале некоторые общие подходы к изучению спектра и свойств системы собственных вектор-функций граничной задачи (13), (14), то есть ее спектральные свойства. Под спектральными свойствами граничной задачи мы понимаем спектральные свойства оператора $L : H \rightarrow H$, сопоставляемого этой задаче в силу определения 2.

Пусть $L_s : H_t^2 \rightarrow H_t^2$ — замыкание операции $L_s(D_t) = aD_t + bB(s)$ на функциях из $\mathfrak{D}_t$ или s -проекция оператора L .

Выделенные свойства оператора L приводят к необходимости исследования свойств операторов L_s . Займемся этими исследованиями.

ЛЕММА 4. Если $0 \in P\sigma B$, то есть $B(s) = 0$, то спектр σL_s оператора $L_s : H_t^2 \rightarrow H_t^2$ совпадает с его точечным спектром $P\sigma L_s$. Точечный спектр оператора L_s дается формулой

$$\lambda_k = \frac{2\pi k i}{T_2 - T_1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Собственному значению λ_k соответствуют две собственные вектор-функции

$$u_{k,m,s}(t) \equiv u_{k,m}(t) = e_m^k(t) = e^k(t) \frac{e_1 + (-1)^{m+1} e_2}{\sqrt{2}}, \quad (15)$$

$$e^k(t) = \frac{\exp(\lambda_k(t - T_1))}{\sqrt{T_2 - T_1}}, \quad m = 1, 2$$

оператора L_s . Система собственных вектор-функций оператора L_s образует ортонормированный базис в пространстве H_t^2 .

Доказательство. Из равенства

$$(u_{k,m}, u_{k',m'})_{H_t^2} = \delta_k^{k'} \delta_m^{m'},$$

где $\delta_k^{k'}$ — функция Кронекера, следует ортонормированность в H_t^2 системы

$$\{u_{k,m}(t) : k \in \mathbb{Z}; m = 1, 2\} \quad (16)$$

собственных вектор-функций оператора L_s . Предположим, что множество (16) неполно в H_t^2 . Тогда существует вектор-функция $f \in H_t^2$, $f = f^1(t)e_1 + f^2(t)e_2$, $f \neq 0$ в H_t^2 , ортогональная всем вектор-функциям (16). Так как $\{e^k(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ — полная ортонормированная в H_t система, из равенства

$$(f, e_m^k)_{H_t^2} = (f^1 + (-1)^{m+1}f^2, e^k)_{H_t}/\sqrt{2},$$

где $m = 1, 2; k \in \mathbb{Z}$, следует противоречие: $f = 0$ в H_t^2 и, следовательно, полнота в H_t^2 системы (16). $\square$

Следует отметить, что доказательство структуры спектра оператора L_s в лемме 4 вытекает из представления резольвенты $R_\lambda(L_s) = (L_s - \lambda E)^{-1}$ оператора L_s в виде ряда Фурье по системе собственных вектор-функций оператора. Оператор L_s , вообще говоря, базиса Рисса в H_t^2 не образует, поэтому структуру его спектра будем исследовать, опираясь на аналитическое представление матрицы Грина резольвенты $R_\lambda(L_s)$. Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 5. Если $0 \notin P\sigma B$, то спектр σL_s оператора $L_s : H_t^2 \rightarrow H_t^2$ совпадает с его точечным спектром $P\sigma L_s$. Точечный спектр оператора L_s дается формулой

$$\begin{aligned} \lambda_{k,m,s} &\equiv \lambda_k + \lambda_{m,s} = \frac{2\pi k i + \ln \omega_{m,s}}{T_2 - T_1}, \\ \lambda_{m,s} &= \frac{\ln \omega_{m,s}}{T_2 - T_1}, \quad m = 1, 2, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\omega_{m,s} = \operatorname{ch}(B(s)T_1) \cos(B(s)T_2) + (-1)^{m+1} \sqrt{\operatorname{ch}^2(B(s)T_1) \cos^2(B(s)T_2) - 1}.$$

Собственному значению $\lambda_{k,m,s}$ соответствует собственная вектор-функция

$$u_{k,m,s}(t) = e^k(t) \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{m,s}^1(t)e_1 + (-1)^{m+1}p_{m,s}^2(t)e_2), \quad (18)$$

где

$$p_{m,s}^1(t) = \exp(\lambda_{m,s}(t - T_1)) \begin{cases} a_{m,s} \sin(B(s)t) + b_{m,s} \cos(B(s)t), & \text{если } t > 0, \\ -a_{m,s} \operatorname{sh}(B(s)t) + b_{m,s} \operatorname{ch}(B(s)t), & \text{если } t < 0; \end{cases}$$

$$\frac{p_{m,s}^2(t)}{(-1)^{m+1}} = \exp(\lambda_{m,s}(t - T_1)) \begin{cases} a_{m,s} \cos(B(s)t) - b_{m,s} \sin(B(s)t), & \text{если } t > 0, \\ a_{m,s} \operatorname{ch}(B(s)t) - b_{m,s} \operatorname{sh}(B(s)t), & \text{если } t < 0; \end{cases}$$

$$a_{m,s} = \operatorname{ch}(B(s)T_1) - \omega_{m,s} \cos(B(s)T_2), \quad b_{m,s} = \operatorname{sh}(B(s)T_1) - \omega_{m,s} \sin(B(s)T_2),$$

оператора L_s .

Доказательство. Справедливость формулы (17), описывающей распределение собственных значений оператора L_s на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и представлений (18) соответствующих им собственных вектор-функций достаточно просто проверяется.

Если $\lambda \notin P\sigma L_s$, то решение $u_s = u_s(t)$ уравнения $L_s u = \lambda u + f$ для $f = f(t) \in C(V_t)$ дается формулой

$$u_s = R_{\lambda,s} f(t) = \int_{V_t} G_s(t, \tau, \lambda) f(\tau) d\tau, \quad (19)$$

где матрица Грина $G_s(t, \tau, \lambda)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_2(W_t)$, $W_t = V_t \times V_t$. Используя для (19) неравенство Коши—Буняковского, получаем оценку

$$\|u_s\|_{H_t^2} \leq C_s \|f_s\|_{H_t^2},$$

из которой в силу плотности $C(V_t)$ в H_t следует включение $\lambda \in P\sigma L_s$. $\square$

Следующие утверждения позволяют выяснить свойства систем элементов, составленных из собственных вектор-функций оператора L_s в случае $\lambda \notin P\sigma B$. Изучение начнем со свойств в пространстве H_t систем, составленных из их координат.

ЛЕММА 6. *При любых фиксированных $l = 1, 2$; $m = 1, 2$; $s \in S$, система*

$$\{u_{k,m,s}^l(t) : k \in \mathbb{Z}\} \quad (20)$$

элементов $u_{k,m,s}^l(t) = e^k p_{m,s}^l(t)$ полна в H_t .

Доказательство. Доказательство проводим от противного: предполагаем существование элемента $f \in H_t$, $f \neq 0$ в H_t , ортогонального всем элементам системы (20), то есть такого элемента, что для любого $m = 1, 2$ и для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$(f, u_{k,m,s}^l)_{H_t} = 0. \quad (21)$$

Пусть $h \in H_t$, $h \neq 0$ и $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$, где $h_n = \sum_{k=-n}^n a_k e^k$, $e^k = e^k(t)$. Очевидно, что произведение $h_n f$ принадлежит пространству H_t , то есть $h_n f \in H_t$, и удовлетворяет условию нетривиальной ортогональности (21). Так как $\bar{f} u_{k,m,s}^l \in H_t$, в силу непрерывности скалярного произведения и ранее отмеченного условия ортогональности получаем цепочку равенств

$$(h, \bar{f} u_{k,m,s}^l)_{H_t} = h = \lim_{n \rightarrow \infty} (h_n, \bar{f} u_{k,m,s}^l)_{H_t} = \lim_{n \rightarrow \infty} (h_n f, u_{k,m,s}^l)_{H_t} = 0. \quad (22)$$

Из (22) в силу произвольности h следует равенство $\|(h_n f, u_{k,m,s}^l)_{H_t}\|_{H_t} = 0$, эквивалентное равенству $f = 0$. Получено противоречие. $\square$

Теперь, опираясь на лемму 6, докажем критерий полноты системы собственных вектор-функций оператора L_s в H_t^2 . Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 7. Система

$$\{u_{k,m,s}(t) : k \in \mathbb{Z}; m = 1, 2\} \quad (23)$$

собственных вектор-функций оператора L_s полна в H_t^2 тогда и только тогда, когда

$$a_{1,s}b_{2,s} - a_{2,s}b_{1,s} \neq 0. \quad (24)$$

Доказательство. Пусть вектор-функция $f \in H_t^2$, $f \neq 0$, $f = f^1 e_1 + f^2 e_2$, ортогональна всем вектор-функциям системы (23). Если $f^1 = 0$ или $f^2 = 0$ в H_t , то в силу леммы 6 получаем противоречие: $f = 0$. Если $f^1 \neq 0$ и $f^2 \neq 0$ в H_t , то для $h_n = \sum_{k=-n}^n a_k e^k$, $e^k = e^k(t)$, имеем $(h_n f, u_{k,m,s})_{H_t^2} = 0$, откуда, в силу непрерывности скалярного произведения, рассматривая цепочку (22), получаем равенство

$$(\overline{f^1} u_{k,m,s}^1 + \overline{f^2} u_{k,m,s}^2)_{H_t} = 0,$$

где $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$. Следовательно, имеем (в силу произвольности h) равенство

$$\|\overline{f^1} u_{k,m,s}^1 + \overline{f^2} u_{k,m,s}^2\|_{H_t} = 0$$

или, что то же самое, равенство

$$p_{1,s}^2(t)p_{2,s}^1(t) + p_{2,s}^2(t)p_{1,s}^1(t) = 0,$$

справедливое для почти всех $t \in V_t$. Вспоминая представление $p_{m,s}^l(t)$, получаем в случае выполнения условия (24) противоречие $f = 0$.

Если условие (24) не выполнено, то вектор-функция

$$f(t) = p_{1,s}^2(t)e_1 - p_{1,s}^1(t)e_2$$

ортогональна всем вектор-функциям системы (23). $\square$

ЛЕММА 8. Система (23) собственных вектор-функций оператора L_s обладает следующими свойствами:

- а) минимальна в H_t^2 ;
- б) является гильбертовой системой в H_t^2 тогда и только тогда, когда выполнено условие (24).

Доказательство. Пусть L_s^τ — замыкание в H_t^2 операции $L_s^\tau(D_t) = -a^\tau D_t + b^\tau \overline{B}(s)$, первоначально заданной на линейном многообразии $\mathfrak{D}_t$. Оператор $L_s^\tau : H_t^2 \rightarrow H_t^2$ обычно называют формально сопряженным оператору L_s . Точечный спектр оператора L_s^τ дается формулой $\bar{\mu}_{k,m,s} = -\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_{m,s}$, $m = 1, 2$, $k \in \mathbb{Z}$. Собственному значению $\bar{\mu}_{k,m,s}$ соответствует собственная вектор-функция $\bar{\nu}_{k,m,s}(t)$ оператора L_s , причем

$$\bar{\nu}_{k,m,s}(t) = e^k(t) \frac{1}{\sqrt{2}} (q_{m,s}^1(t)e_1 + (-1)^{m+1} q_{m,s}^2(t)e_2),$$

где

$$e^k(t) = \exp(\lambda_k(t - T_1)) / \sqrt{T_2 - T_1},$$

$$q_{m,s}^1(t) = \exp(\lambda_{m,s}(t - T_1)) \begin{cases} b_{m,s} \sin(B(s)t) - a_{m,s} \cos(B(s)t), & \text{если } t > 0, \\ b_{m,s} \operatorname{sh}(B(s)t) - a_{m,s} \operatorname{ch}(B(s)t), & \text{если } t < 0; \end{cases}$$

$$\frac{q_{m,s}^2(t)}{(-1)^{m+1}} = \exp(\lambda_{m,s}(t - T_1)) \begin{cases} b_{m,s} \cos(B(s)t) + a_{m,s} \sin(B(s)t), & \text{если } t > 0, \\ b_{m,s} \operatorname{ch}(B(s)t) - a_{m,s} \operatorname{sh}(B(s)t), & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Система

$$\{\nu_{k,m,s}(t) : k \in \mathbb{Z}; m = 1, 2\} \quad (25)$$

собственных вектор-функций оператора L_s^τ полна в H_t^2 тогда и только тогда, когда выполнено условие (24).

Заметим теперь, что точечный спектр $P\sigma L_s$ оператора L_s дается формулой

$$\lambda_{k,m,s} \equiv \lambda_k + (-1)^{m+1} \lambda_s, \quad \lambda_s = \frac{\ln \omega_s}{T_2 - T_1}, \quad m = 1, 2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

а точечный спектр $P\sigma L_s^\tau$ оператора L_s^τ дается также формулой

$$\mu_{k,m,s} \equiv \bar{\lambda}_k + (-1)^{m+1} \bar{\lambda}_s, \quad \lambda_s = \frac{\ln \omega_s}{T_2 - T_1}, \quad m = 1, 2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где

$$\omega_s = \operatorname{ch}(B(s)T_1) \cos(B(s)T_2) + \sqrt{\operatorname{ch}^2(B(s)T_1) \cos^2(B(s)T_2) - 1}.$$

Так как $L_s^\tau \subseteq L_s^*$, где L_s^* — оператор, сопряженный оператору L_s в смысле теории операторов, собственные вектор-функции операторов L_s и L_s^τ , соответствующие собственным значениям $\lambda_{k,m,s}$ и $\mu_{k',m',s}$, ортогональны, если $\lambda_{k,m,s} - \bar{\mu}_{k',m',s} \neq 0$. В силу критерия минимальности [13] получаем минимальность в H_t^2 системы собственных вектор-функций оператора L_s .

Следовательно, системы (23) и (25) являются B -системами тогда и только тогда, когда выполнено условие (24). Осталось заметить, что вектор-функции системы (23) отличаются от вектор-функции системы (15) умножением на непрерывные функции. $\square$

Обозначим через $\Gamma_{m,s}^l$ кривую, задаваемую в комплексной плоскости параметрическим представлением $p_{m,s}^l(t)$, $t \in V_t$, то есть

$$\Gamma_{m,s}^l = \{p_{m,s}^l(t) : t \in V_t\}.$$

ЛЕММА 9. Система (18) собственных вектор-функций оператора L_s образует в пространстве H_t^2 базис Рисса тогда и только тогда, когда

$$0 \notin \cup_{m,l=1}^2 \Gamma_{m,s}^l.$$

Доказательство. Определим в H_t^2 линейный оператор $\mathcal{B}_s$ следующим образом. Пусть $c_{k,m}$ — коэффициенты Фурье разложения вектор-функции f в ряд по системе (15). Положим

$$f(t) = \sum_{m=1}^2 f_m(t),$$

где $f_m(t) = c_{k,m} e_m^k(t)$. По построению

$$f(t) = \bigoplus_{m=1}^2 f_m(t),$$

то есть построено ортогональное разложение $H_t^2 = H_{t,1}^2 \oplus H_{t,2}^2$ пространства H_t^2 . Обозначим через $\mathcal{B}_{s,m}$, $m = 1, 2$, сужение оператора $\mathcal{B}_s$ на пространство $H_{t,m}^2$, $m = 1, 2$. Положим

$$\mathcal{B}_s f(t) = \sum_{m=1}^2 \mathcal{B}_{s,m} f_m(t),$$

где $\mathcal{B}_{s,m} f_m(t) = \sum_k c_{k,m} e_m^k(t)$. Так как функции $p_{m,s}^l(t)$ непрерывна на V_t , то оператор $\mathcal{B}_s : H_t^2 \rightarrow H_t^2$ ограничен. Если $0 \notin \cup_{m,l=1}^2 \Gamma_{m,s}^l$, то $0 < c_s < \inf_{m,l,t} |p_{m,s}^l(t)|$, то есть операторы $\mathcal{B}_{s,m} : H_t^2 \rightarrow H_t^2$ непрерывно обратимы и преобразуют систему (15) в систему (18). Докажем, что оператор $\mathcal{B}_{s,m} : H_t^2 \rightarrow H_t^2$ также непрерывно обратим. Система $\{u_{k,m,s}(t)\}$ — минимальна в H_t^2 . Следовательно, $\mathfrak{R}(\mathcal{B}_{s,1}) \cup \mathfrak{R}(\mathcal{B}_{s,2}) = \emptyset$. Но в таком случае оператор $\mathcal{B}_s$ имеет обратный, который ограничен в силу ограниченности операторов $\mathcal{B}_{s,1}^{-1}$, $m = 1, 2$. Это означает, что система (18) является одновременно гильбертовой и беселевой, то есть базисом Рисса в H_t^2 .

Если $0 \in \cup_{m,l=1}^2 \Gamma_{m,s}^l$, то достаточно воспользоваться результатами работ [2, 14]. $\square$

Рассмотрим теперь спектральные свойства оператора L . Для удобства обозначим $H^m = H_t^m \otimes H_x$.

ЛЕММА 10. *При любых фиксированных значениях $l = 1, 2$; $m = 1, 2$, система*

$$\{u_{k,m,s}^l(t) \varphi^s : k \in \mathbb{Z}; s \in S\}$$

элементов $u_{k,m,s}^l(t) \varphi^s = e^k(t) p_{m,s}^l(t) \varphi^s$ полна в H_{tx} .

Доказательство. Достаточно заметить, что $H_{tx} = H^m$ при $m = 1$, и воспользоваться результатами леммы 6. $\square$

Теперь докажем критерий полноты системы собственных вектор-функций оператора L в H .

ЛЕММА 11. *Система*

$$\{\varphi^s u_{k,m,s}(t) : k \in \mathbb{Z}; m = 1, 2; s \in S\} \quad (26)$$

собственных вектор-функций оператора L полна в H тогда и только тогда, когда для любого индекса $s \in S$ имеет место неравенство

$$a_{1,s}b_{2,s} - a_{2,s}b_{1,s} \neq 0. \quad (27)$$

Доказательство. Если для любого индекса $s \in S$ имеет место неравенство (27), то достаточно заметить, что $H = H^m$ при $m = 2$, и воспользоваться результатом леммы 7.

Если условие (27) не выполнено при некотором $s \in S$, то вектор-функция $\tilde{f}(t) = \psi^s(p_{1,s}^2(t)e_1 - p_{1,s}^1(t)e_2)$ ортогональна всем вектор-функциям системы (26). $\square$

Теперь мы можем обсудить вопрос о базисе в пространстве H из системы собственных вектор-функций задачи (13), (14).

ЛЕММА 12. Система

$$\{\varphi_s u_{k,m,s}(t) : k \in \mathbb{Z}; m = 1, 2; s \in S\} \quad (28)$$

собственных вектор-функций оператора L , где вектор-функция $u_{k,m,s}$ имеет вид

$$u_{k,m,s}(t) = \begin{cases} (15), & \text{если } B(s) = 0; \\ (18), & \text{если } B(s) \neq 0, \end{cases} \quad (29)$$

образуют в пространстве H базис тогда и только тогда, когда для любого индекса $s \in S$ имеем $0 \notin \cup_{m,l=1}^2 \Gamma_{m,s}^l$.

Доказательство. Если для любого индекса $s \in S$ не выполнено включение: $0 \in \cup_{m,l=1}^2 \Gamma_{m,s}^l$, то в силу леммы 4 и леммы 9 система (29) собственных вектор-функций оператора L_s образует базис в пространстве H_t^2 для любого индекса $s \in S$. В этом случае система (28) образует базис в пространстве $H^2 \equiv H$.

Если $0 \in \cup_{m,l=1}^2 \Gamma_{m,s}^l$ при некотором $s \in S$, то вектор-функция $\tilde{f}(t) = \psi^s(p_{1,s}^2(t)e_1 - p_{1,s}^1(t)e_2)$ ортогональна всем вектор-функциям системы (28). $\square$

Теперь мы можем сформулировать основной результат о базисных свойствах системы собственных вектор-функций периодической задачи для системы уравнений смешанного типа. Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество индексов $s \in S$, для которых выполнено равенство $a_{1,s}b_{2,s} - a_{2,s}b_{1,s} = 0$:

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{s \in S} \{s : a_{1,s}b_{2,s} - a_{2,s}b_{1,s} = 0; s \in S\}.$$

ТЕОРЕМА 4. Зависимость свойств системы собственных вектор-функций оператора $L : H \rightarrow H$ от параметров задачи (13), (14) следующая:

- 1) система собственных вектор-функций оператора L минимальна в гильбертовом пространстве H ;
- 2) система собственных вектор-функций оператора L полна в гильбертовом пространстве H тогда и только тогда, когда множество G пусто;

3) система собственных вектор-функций оператора L образует базис в гильбертовом пространстве H тогда и только тогда, когда

$$0 \notin \bigcup_s \bigcup_{m,l=1}^2 \Gamma_{m,s}^l.$$

ПРИМЕР. Положив в (13) $B = D_x$ при условиях периодичности по x , получим оператор $L : H \rightarrow H$, порожденный системой уравнений смешанного типа в замкнутой области $V = V_t \times V_x$, $V_t = [-\pi, \pi]$, $V_x = [0, 2\pi]$, при условиях периодичности по t и по x , система собственных вектор-функций которого образует базис в $H = L_2(V)$.

Конкурирующие интересы. Конкурирующих интересов не имею.

Авторская ответственность. Я несу полную ответственность за предоставление окончательной версии рукописи в печать. Окончательная версия рукописи мною одобрена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования.

Библиографический список

1. Дезин А. А. *Общие вопросы теории граничных задач*. М.: Наука, 1980. 208 с.
2. Корниенко Д. В. О спектре задачи Дирихле для систем дифференциально-операторных уравнений // *Дифференц. уравнения*, 2006. Т. 42, № 8. С. 1063–1071.
3. Дезин А. А. *Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач* / Тр. МИАН. Т. 229 / ред. В. С. Владимиров, Е. Ф. Миценко. М.: Наука, 2000. 176 с.
4. Романко В. К. Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // *Докл. АН СССР*, 1986. Т. 286, № 1. С. 47–50.
5. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Part II. Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert space*. Reprint of the 1963 original / Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1988. i–x, 859–1923 pp.
6. Моисеев Е. И. О базисности системы синусов и косинусов // *Докл. АН СССР*, 1984. Т. 275, № 4. С. 794–798.
7. Моисеев Е. И. О базисности одной системы синусов // *Дифференц. уравнения*, 1987. Т. 23, № 1. С. 177–179.
8. Моисеев Е. И. *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром*. М.: МГУ, 1988. 150 с.
9. Моисеев Е. И. *Некоторые вопросы спектральной теории уравнений смешанного типа*: Дисс. ... доктора физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1979.
10. Романко В. К. О собственных значениях краевых задач для некоторых уравнений, меняющих тип // *Дифференц. уравнения*, 1983. Т. 19, № 10. С. 1759–1764.
11. Кальменов Т. Ш. *О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов*: Дисс. ... доктора физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1982.
12. Солдатов А. П. Задачи Римана–Гильберта для системы Лаврентьева–Бицадзе в смешанной области с характеристическим участком границы // *Дифференц. уравнения*, 2002. Т. 38, № 12. С. 1653–1663.
13. Kaczmarz S., Steinhaus H. *Theorie der Orthogonalreihen* / Monografie Matematyczne. vol. 6. New York: Chelsea Publ., 1951. viii+296 pp.
14. Д. В. Корниенко Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // *Дифференц. уравнения*, 2006. Т. 42, № 1. С. 91–100.

MSC: 35P05

On a spectral problem for a system of differential equations of mixed type

D. V. Kornienko

I. A. Bunin Elets State University,
28, Kommunarov st., Elets, Lipetskaya obl., 399770, Russian Federation.

Abstract

This article explores the spectral characteristics of the differential operator generated by the boundary problem for linear systems of differential equations of mixed type. The simplest example of a classical system of equations that falls within the field of our consideration, can serve as the system of equations of mixed type:

$$D_t u_1 - \operatorname{sign} D_x u_2 - \varepsilon u_2 = f_1, \quad D_t u_2 + D_x u_1 + \varepsilon u_1 = f_2$$

Elliptic for $t > 0$ and hyperbolic for $t < 0$.

Keywords: boundary-value problems, the spectrum of the operator of the system of differential equations, periodic problems, the system of equations of mixed type, basis.

Received: 17th October, 2017 / Revised: 15th December, 2017 /

Accepted: 18th December, 2017 / First online: 28th December, 2017

Competing interests. I have no competing interests.

Author's Responsibilities. I take full responsibility for submitting the final manuscript in print. I approved the final version of the manuscript.

Funding. The research has not had any funding.

References

1. Dezin A. A. *Obshchie voprosy teorii granichnykh zadach* [General questions of the theory of boundary value problems]. Moscow, Nauka, 1980, 208 pp. (In Russian)
2. Kornienko D. V. On the spectrum of the Dirichlet problem for systems of operator-differential equations, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 8, pp. 1124–1133. doi: [10.1134/S0012266106080076](https://doi.org/10.1134/S0012266106080076).

Research Article

The content is published under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International License](http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

Please cite this article in press as:

Kornienko D. V. On a spectral problem for a system of differential equations of mixed type, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 4, pp. 611–632. doi: [10.14498/vsgtu1567](https://doi.org/10.14498/vsgtu1567) (In Russian).

Author's Details:

Dmitriy V. Kornienko <http://orcid.org/0000-0002-3115-194X>

Cand. Phys. & Math. Sci., Associate Professor; Associate Professor; Dept. of Applied Mathematics & Computer Science; e-mail: dmkornienko@mail.ru

3. Dezin A. A. *Differential operator equations. A method of model operators in the theory of boundary value problems*, Tr. Mat. Inst. Steklova, vol. 229, ed. V. S. Vladimirov, E. F. Mishchenko. Moscow, Nauka, 2000, 176 pp. (In Russian)
4. Romanko V. K. Mixed boundary value problems for a system of equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 286, no. 1, pp. 47–50 (In Russian).
5. Dunford N., Schwartz J. T. *Linear operators. Part II. Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert space*. Reprint of the 1963 original, Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1988, i–x, 859–1923 pp.
6. Moiseev E. I. The basis property for systems of sines and cosines, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1984, vol. 275, no. 4, pp. 794–798 (In Russian).
7. Moiseev E. I. On the basis property of a system of sines, *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 1, pp. 177–179 (In Russian).
8. Moiseev E. I. *Uravneniia smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom* [Mixed type equations with spectral parameter]. Moscow, Moscow State Univ., 1988, 150 pp. (In Russian)
9. Moiseev E. I. *Some questions in spectral theory of the mixed type equations*, Dr. Phys. & Math. Sci. Thesis. Moscow, Moscow State Univ., 1979 (In Russian).
10. Romanko V. K. Eigenvalues of boundary value problems for certain equations which change type, *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 10, pp. 1759–1764 (In Russian).
11. Kalmenov T. Sh. *Regular boundary-value problems and range for equations of hyperbolic and mixed types*, Dr. Phys. & Math. Sci. Thesis. Moscow, Moscow State Univ., 1982 (In Russian).
12. Soldatov A. P. Riemann–Hilbert problems for the Lavrent'ev–Bitsadze system in a mixed domain with a characteristic part of the boundary, *Differ. Equ.*, 2002, vol. 38, no. 12, pp. 1753–1763. doi: [10.1023/A:1023864230740](https://doi.org/10.1023/A:1023864230740).
13. Kaczmarz S., Steinhaus H. *Theorie der Orthogonalreihen*, Monografie Matematyczne, vol. 6. New York, Chelsea Publ., 1951, viii+296 pp.
14. Kornienko D. V. On a spectral problem for two hyperbolic systems of equations, *Differ. Equ.*, 2006, vol. 42, no. 1, pp. 101–111. doi: [10.1134/S0012266106010083](https://doi.org/10.1134/S0012266106010083).