Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Б. Нахушева, Смешанная задача для уравнения гиперболо-параболического типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu158>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:21:17

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.9

Ф.Б. Нахушева

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрена смешанная задача для одного уравнения гиперболо – параболического типа на плоскости. Доказана ее однозначная разрешимость.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = 0 = \begin{cases} u_{xxx} - u_y + \sum_{i=0}^2 a_i(x, y) \frac{\partial^i u}{\partial x^i}, & y > 0, \\ y^2 u_{xx} - u_{yy} + au_x, & y < 0 \end{cases} \quad (1)$$

в конечной области Ω , ограниченной при $y < 0$ характеристиками $AC: x - \frac{1}{2}y^2 = 0$, $BC: x + \frac{1}{2}y^2 = 1$ уравнения (1), а при $y > 0$ – отрезками AA_0 , BB_0 , A_0B_0 прямых $x=0$, $x=1$, $y=h$. Пусть Ω^+ (Ω^-)- параболическая (гиперболическая) части области Ω , J – интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

З а д а ч а. Найти в области Ω функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

- $u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_{(x,y)}^{(3,1)}(\Omega^+) \cap C^2(\Omega^-) \cap C^1(\overline{\Omega}^+)$;
- $u(x, y)$ регулярное в области Ω при $y \neq 0$ решение уравнения (1) ;
- $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\begin{aligned} u(0, y) &= j_1(y), & u(1, y) &= j_2(y); \\ u_x(0, y) &= j_3(y), & 0 \leq y &\leq h; \end{aligned} \quad (2)$$

$$u|_{BC} = j(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

где $j(x)$, $j_i(y)$, $i = \overline{1,3}$ - заданные достаточно гладкие функции, $\frac{\partial^i a_i(x, y)}{\partial x^i} \in C(\overline{\Omega}^+)$, $i = \overline{1,3}$, причём $x^2 a'_2(x, 0) + 2 \neq 0$.

Пусть $u(x, y)$ - регулярное в Ω^- решение уравнения (1), непрерывное всюду в замыкании $\overline{\Omega^-}$ за исключением, быть может, точек А и В, обладающее тем свойством, что функция $y(h) = u|_{AC}$ дважды непрерывно дифференцируема. Тогда имеем [1]

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (1-x)^{b'}(h-x)^{-b'} j(x) - h^{-b'}(1-x)^{-b} F(b, b', 1; z_1) j(0) - \\ &- b'(1-b)(1-h)(1-x)^{-b} \int_0^x (1-t)^{-\frac{1}{2}} (h-t)^{-b'-1} F(b, b'+1, 2; z_2) j(t) dt + \\ &+ h^b (h-x)^{-b} y(h) + b(1-b') x h^{-b'} \int_1^h t^{-\frac{1}{2}} (t-x)^{-b-1} F(b+1, b', 2; z_3) y(t) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где $F(a, b, g; z)$ - гипергеометрическая функция Гаусса, $b' = \frac{1+a}{4}$, $b = \frac{1-a}{4}$, $b + b' = \frac{1}{2}$,

$$z_1 = \frac{x(1-h)}{h(1-x)}, z_2 = \frac{(1-h)(x-t)}{(1-x)(h-t)}, z_3 = \frac{x(t-h)}{h(t-x)}.$$

Функцию $u(x, y)$, определенную формулой (4), где $j(x) \in C(I_0)$ и $y(x) \in C(I_1)$, назовём обобщенным решением уравнения (1) при $y < 0$.

Предполагая $a=4n+1$, $n=0, 1, 2, \dots$, и устремляя $y \rightarrow -0$, из (4) получим

$$g(x) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = -j_1(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\Gamma\left(n + \frac{3}{2} - k\right)}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right)} (-1)^k (n+1) F(-k+1, 2+n; 2; 1) (1-x)^k j_1^{(k)}(x), \quad (5)$$

$$j_1(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}} j(x).$$

Переходя к пределу при $y \rightarrow +0$ в уравнении (1) при $y > 0$, получим функциональное соотношение между $t(x)$ и $n(x)$ из параболической части Ω^+ на линии $y=0$.

$$t''(x) + a_2(x, 0)t''(x) + a_1(x, 0)t'(x) + a_0(x, 0)t(x) = g(x). \quad (6)$$

Интегрируя равенство (6) трижды, учитывая (5) и граничные условия $t(0) = j_1(0)$, $t(l) = j_2(0)$, $t'(0) = j_3(0)$ получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $t(x)$:

$$t(x) + \int_0^x k(x, x)t(x)dx = f(x), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa(x, x) = & \frac{2}{x^2 a_2'(x) + 2} \left[\frac{1}{2} (x-x)^2 a_0(x, 0) + (x-x) a_1(x, 0) - \frac{1}{2} (x-x)^2 a_1'(x, 0) - (x-x) a_2'(x, 0) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[(x-x)^2 a_2'(x, 0) \right] + a_2(x, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = & \left\{ \left[1 - \frac{1}{2} a_1(0, 0)x^2 + a_2(0, 0)x \right] j_1(0) + \left[x + \frac{1}{2} a_2(0, 0)x^2 \right] j_3(0) + \frac{1}{2} \int_0^x (x-x)^2 n(x) dx \right\} \times \\ & \times \frac{2}{x^2 a_2'(x, 0) + 2} + \frac{t''(0)x^2}{x^2 a_2'(x, 0) + 2}. \end{aligned}$$

В силу сделанных предположений относительно гладкости известных функций, нетрудно усмотреть, что $f(x) \in C^3(\bar{I})$, $k(x, x) \in C^2(\bar{I} \times \bar{I})$.

Решение уравнения (7) имеет вид [2]

$$t(x) = f(x) - \int_0^x R(x, t) dt + t''(0) \left[\frac{x^2}{x^2 a_2'(x) + 2} - \frac{1}{2} \int_0^x R(x, t) \frac{t^2}{t^2 a_2'(t) + 2} dt \right], \quad (8)$$

где $R(x, t)$ - резольвента ядра $k(x, t)$. Используя условие $t(l) = j_2(0)$, из (8) легко определить $t''(0)$. Таким образом, неизвестная функция $t(x)$ единственным образом определяется по формуле (8). Следовательно, решение исходной задачи в области Ω^- может быть найдено как решение задачи Коши при $a=4n+1$, а в области Ω^+ - решением следующей задачи: найти регулярное в области Ω^+ решения уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0, y) = j_1(y); u(1, y) = j_2(y); u_x(0, y) = j_3(y); u(x, 0) = t(x).$$

Однозначная разрешимость этой задачи установлена в работе [2]

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.

1. Нахушева Ф.Б. Дифференциальные уравнения. 1982. Т.18. №2. С. 334-340.
2. Елеев В.А. Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 19. №1. С.60-65.

Поступила 12.03.2003 г.