Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. И. Кадашевич, С. П. Помыткин, Описание эффектов второго порядка при учете конечных деформаций, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu159>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:46:23

Механика деформируемого твердого тела

УДК 539.374

Ю.И.Кадашевич, С.П.Помыткин

ОПИСАНИЕ ЭФФЕКТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ УЧЕТЕ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

В работе излагается один из методов расширения понятия меры деформации на основе общей связи ортогонального и кососимметричного тензоров.

В работе [1] была предложена новая теория пластичности, учитывающая конечные деформации. Согласно этой теории мера деформации определялась по формуле

$$e = R \left(\int R^T D R dt \right) R^T, \quad (1)$$

где R - ортогональный тензор поворота, причем $R = F u^{-1}$; D - тензор скоростей деформации ($D = (L + L^T)/2$, $L = \dot{F} F^{-1}$); F - градиент деформации; u - правый тензор удлинения; e - деформация. Формула (1) эквивалентна решению дифференциального уравнения (Ω - спин):

$$\dot{e} + e\Omega - \Omega e = D, \quad \dot{\Omega} = \dot{R} R^T. \quad (2)$$

Легко усмотреть, что при простом сдвиге, когда

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

выражения для деформаций имеют вид

$$e_{11} = -e_{22} = \cos 2b(2 \ln \cos b) + \sin 2b(2b - tg b);$$

$$e_{12} = \cos 2b(2b - tg b) - \sin 2b(2 \ln \cos b); \quad e_{13} = e_{23} = e_{33} = 0; \quad t = tg b.$$

Такая жесткость решения требует расширения понятия меры деформации. Один из таких приемов исследуется ниже, когда при простом сдвиге $e_{13} \neq 0$, $e_{23} \neq 0$.

В работе [2] была предложена общая форма связи кососимметрического тензора K и ортогонального тензора Q в форме

$$Q = I + \frac{\sin w}{w} K + \frac{1 - \cos w}{w^2} K^2, \quad (3)$$

где I - единичный тензор,

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}; \quad K^2 = \begin{pmatrix} -(w_3^2 + w_2^2) & w_1 w_2 & w_1 w_3 \\ w_1 w_2 & -(w_1^2 + w_3^2) & w_2 w_3 \\ w_1 w_3 & w_2 w_3 & -(w_2^2 + w_1^2) \end{pmatrix};$$
$$w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}.$$

Эти соотношения могут быть легко обращены, при этом связь K и Q будет иметь вид

$$K = \frac{w}{2 \sin w} \left[\frac{\cos 2w - \cos w}{1 - \cos w} I + \frac{2 \sin^2 w}{1 - \cos w} Q - Q^2 \right]. \quad (4)$$

Здесь $\cos w = \frac{1}{2} [\cos a \cos b + \cos b \cos g + \cos g \cos a - \sin a \sin b \sin g - 1]$. При этом a , b , g определяют ортогональный тензор Q :

$$Q = \begin{pmatrix} \cos a & \sin a & 0 \\ -\sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & 0 & -\sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos g & \sin g \\ 0 & -\sin g & \cos g \end{pmatrix}$$

или в развернутом виде –

$$Q = \begin{pmatrix} \cos a \cos b & \sin a \cos g + \cos a \sin b \sin g & \sin a \sin g - \cos a \sin b \cos g \\ -\sin a \cos b & \cos a \cos g - \sin a \sin b \sin g & \cos a \sin g + \sin a \sin b \cos g \\ \sin b & -\sin g \cos b & \cos b \cos g \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Напомним, что $\cos w = \frac{1}{2}(Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} - 1)$.

Пусть K_1 будет изотропным кососимметричным тензором:

$$K_1 = w_0 K_0 = w_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad K_1^2 = w_0^2 K_0^2 = w_0^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда по (3) Q_1 определяется как

$$Q_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{13} & Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{13} & Q_{11} \end{pmatrix},$$

$Q_{11} = 1 + 2 \cos \sqrt{3} w_0$; $Q_{12} = 1 - 2 \sin \left(\sqrt{3} w_0 + \frac{p}{6} \right)$; $Q_{13} = 1 + 2 \sin \left(\sqrt{3} w_0 - \frac{p}{6} \right)$. Кроме того, если сохранить форму тензора Q в виде (5), то

$$Q_1 = \frac{2}{2 + \sin 2g} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{13} & A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{13} & A_{11} \end{pmatrix}$$

где $A_{11} = \cos g \sqrt{1 + \sin 2g}$; $A_{12} = -\sin g \cos g$; $A_{13} = \sin g \sqrt{1 + \sin 2g}$. Легко показать, что $\Omega_1 = Q_1^T = w_0 K_0$. Таким образом, видно, что тензор Q_1 имеет один свободный параметр, который может уточнить определение меры деформации.

Возьмем теперь в соотношении (2) в качестве тензора Ω следующее представление:

$$\Omega = R R^T + Q Q^T.$$

При этом наиболее простой случай возникает, когда $Q = Q_1$ и $w_0 = \text{const}$. Тогда $\Omega = R R^T + w_0 K_0$.

Интересные результаты имеют место, если $Q_* = Q_2 Q_1$ и $Q_2 = R$. В этом случае $\Omega_* = R R^T + w_0 R K_0 R^T$.

По-видимому, специальные опыты позволят детально определить характер поправочного тензора Q .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кадашев Ю.И., Помяткин С.П. Анализ сложного нагружения при конечных деформациях по эндохронной теории неупругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. М.:КМК, 1998. С. 72–76.
2. Черных К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.:Наука, 1996. 288с.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-01-00770) и частичной поддержке Министерства образования Российской Федерации (грант Е-02-4.0-158).

Поступила 15.01.2003 г.