Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Маклаков, Параметрическая идентификация коэффициентов определяющих уравнений теории неполной обратимости с использованием порядковых статистик, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 170–172

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu161>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:03:38

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ НЕПОЛНОЙ ОБРАТИМОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

Предложена и апробирована методика параметрической идентификации коэффициентов решения системы определяющих уравнений теории неполной обратимости деформации с использованием среднеквадратических приближений и порядковых статистик для случая, когда точка (точки) излома расположена произвольно на участке стадии упрочнения.

В [1, 2] предложена теория неполной обратимости деформации ползучести, определяющие уравнения которой могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} p = u + v + w, & \dot{\epsilon} = A S^m, & w(0) = 0; \\ u = \sum_{i=1}^s u_i, & \dot{\epsilon}_i = k_i \left[(1-d) a_i S^n - u_i \right], & u_i(0) = 0; \\ v = \sum_{i=1}^s v_i, & \dot{\epsilon}_i = k_i \left[d a_i S^n - v_i \right] H \left[d a_i S^n - v_i \right], & v_i(0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где p – полная деформация ползучести; u , v – вязкоупругая и вязкопластическая компоненты деформации; w – деформация установившегося течения; S – напряжение; H – функция Хевисайда. Постоянные материала $A, k_i, a_i, d, n, m, i = \overline{1, s}$ – определяются согласно методике, изложенной в [1, 2]. Обобщение теории неполной обратимости для стадии разупрочнения при ползучести и для многоциклового усталости дано в [3, 4].

Значение s определяется числом экспоненциальных слагаемых в решении системы (1). В [1] показано, что постоянные k_1, a_1 определяются по опытным значениям деформации ползучести в моменты времени t_1, t_2, t_3 , где $t_2 = t_1/2$, $t_3 = t_1/4$; t_1 – длительность стадии упрочнения. Постоянные k_2, a_2 определяются по опытным данным в моменты времени t_3, t_4, t_5 , где $t_4 = t_3/2$, $t_5 = t_3/4$, и т.д. Следовательно, изложенная в [1] методика предполагает, что в координатах $y, \dot{\epsilon}$, где $y = u + v$, точка пересечения графиков (точка излома) зависимостей $\dot{\epsilon}_1 = k_1 a_1 S^n - k_1 y_1$ и $\dot{\epsilon}_2 = k_2 a_2 S^n - k_2 y_2$ фиксирована и определяется значением t_3 независимо от опытных данных.

Целью статьи является разработка методики выделения экспоненциальных слагаемых в решении системы (1) с использованием среднеквадратических приближений для случая, когда точка (точки) излома расположена произвольно в отрезке времени $[0, t_1]$.

Пусть даны опытные пары наблюдений при постоянном напряжении (t_j, y_j) , $j = \overline{1, n}$, n – объём выборки, где принято, что деформация стадии установившегося течения уже выделена. Для описания вязкой компоненты деформации примем

$$y = \sum_{i=1}^s y_i, \quad \dot{\epsilon}_i = b_i - k_i y_i, \quad y_i(0) = 0, \quad (2)$$

где $b_i = k_i a_i S^n$.

Постоянные материала системы (1) вычисляются с использованием экспериментальных диаграмм деформирования. На практике опытные результаты обычно получены с некоторыми погрешностями. В [5] предложена методика непараметрического выравнивания экспериментальных данных и их производных при заранее известном характере монотонности и выпуклости. Характер монотонности и выпуклости кривой ползучести на стадии упрочнения известен, поэтому сглаженные массивы величин деформации y_j , $j = \overline{1, n}$ и их производных по времени $\dot{\epsilon}_j$, $j = \overline{1, n}$ могут быть получены с использованием методики непараметрического выравнивания [5] до решения задачи параметрической идентификации.

Рассмотрим методику нахождения точки (точек) излома по известным массивам $y_j, \mathfrak{y}_j$. При достаточно большом m ($m < n$) все экспоненциальные слагаемые в (2), кроме первого, практически равны некоторым постоянным значениям [1]. Поэтому наклон линии регрессии $\mathfrak{y} = b - ky$ определяется лишь первым экспоненциальным слагаемым в (2). Оценки b, k найдём по методу наименьших квадратов (МНК) [6], используя $y_j, \mathfrak{y}_j, j = \overline{m, n}$. По найденным оценкам b и k можно определить остаточную дисперсию [5]

$$s_M^2 = \frac{\sum_{j=M}^N [\mathfrak{y}_j - (b - ky_j)]^2}{N - M - 2}, \quad M < n, \quad N \leq n \quad (3)$$

по любому объёму выборки. Примем сначала в (3) $M=m, N=n$ и будем увеличивать на единицу объём выборки, уменьшая M пока его значение не окажется равным единице. В результате вычислений получим $n-m+1$ штук остаточных дисперсий. В качестве первой точки излома примем t_k , когда будет отвергнута по критерию Фишера нулевая гипотеза $H_0: s_M^2 = s_k^2$ для некоторого уровня значимости α [6].

Решение линейного уравнения $\mathfrak{y}_i = b_i - k_i y_i, \quad y_i(0) = 0$ запишем в виде

$$y_i = \frac{b_i}{k_i} (1 - e^{-k_i t}), \quad (4)$$

откуда

$$\mathfrak{y}_i = b_i e^{-k_i t}. \quad (5)$$

Пусть $\tilde{t}_1$ – первая точка излома. В отрезке времени $[\tilde{t}_1, t_1]$ все экспоненциальные слагаемые (4), кроме первого, стремятся к постоянным значениям, а именно:

$$y_i \rightarrow \frac{b_i}{k_i}, \quad i > 1. \quad (6)$$

Из системы (1) найдём $y = \sum_{i=1}^s y_i = \sum_{i=2}^s \frac{b_i}{k_i} + y_1$, откуда

$$y_1 = y - \sum_{i=2}^s \frac{b_i}{k_i}. \quad (7)$$

Из системы (1) с учётом (6), (7) получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{y} &= \sum_{i=1}^s \mathfrak{y}_i = \sum_{i=1}^s b_i - \sum_{i=1}^s k_i y_i = \sum_{i=1}^s b_i - k_1 y_1 - \sum_{i=2}^s k_i y_i = \\ &= \sum_{i=1}^s b_i - k_1 \left(y - \sum_{i=2}^s \frac{b_i}{k_i} \right) - \sum_{i=2}^s k_i y_i = A - k_1 y, \end{aligned} \quad (8)$$

где принято $A = b_1 + k_1 \sum_{i=2}^s \frac{b_i}{k_i}$.

Оценку k_1 определим по МНК, используя линейное уравнение (8).

Из соотношения (5) при $i=1$ следует $\mathfrak{y}_1 = b_1 e^{-k_1 t}$, где k_1 уже известно. Применяя последнее соотношение к парам $(t_j, \mathfrak{y}_j)$ и МНК, оценку b_1 вычислим по формуле

$$b_1 = \frac{\sum y_j e^{-k_1 t_j}}{\sum [e^{-k_1 t_j}]^2}, \quad t_j \in [\tilde{t}_1, t_1].$$

Выделяя первое экспоненциальное слагаемое из экспериментальных данных, найдём

$$\bar{y}_j = y_j - \frac{b_1}{k_1} (1 - e^{-k_1 t_j}).$$

Используя пары $(t_j, \bar{y}_j), t_j \in [\tilde{t}_2, \tilde{t}_1]$, где $\tilde{t}_2$ – вторая точка излома, можно аналогичным образом выделить второе и последующие экспоненциальные слагаемые.

При апробации методики в качестве исходных данных выберем модельные пары значений (t_j, z_j) , $j = \overline{1, n}$, $n = 101$ – объём выборки. Было принято $t_j = t_1 + (j-1)h$, $t_1 = 0$, $h = 0,1$, $z_j = \frac{b_1}{k_1} \left(1 - e^{-k_1 t_j}\right) + \frac{b_2}{k_2} \left(1 - e^{-k_2 t_j}\right)$, $k_1 = 0,33$, $b_1 = 8$, $k_2 = 1$, $b_2 = 25$.

Вместо z_j рассмотрим $y_j = z_j + x_j$, где x_j – шум, полученный с использованием датчика случайных чисел так, что y_j попадают в пятипроцентный интервал z_j .

Сглаженные массивы $y_j, \hat{y}_j$ были получены с использованием процедуры непараметрического выравнивания [5]. На рис. 1 приведены исходные значения z_j (сплошная линия) и зашумлённые y_j (точки). В дальнейшем были использованы сглаженные массивы $y_j, \hat{y}_j$.

При решении задачи параметрической идентификации было принято $m=85$, $\alpha=0,05$. Была найдена точка излома $\tilde{t}_1=41$. Вычисленные оценки параметров оказались следующими: $k_1=0,326$, $b_1=8,96$, $k_2=1,062$, $b_2=25,764$. На рис.2 приведены сглаженные значения y_j (сплошная линия) и результаты расчёта по изложенной методике y_j^T (точки). Средняя процентная ошибка [7] была вычислена по формуле

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{|y_j^T - y_j|}{y_j} * 100\%$$

и оказалась равной 1,78%.

Р и с. 1. Исходные значения z_j (сплошная линия) и зашумлённые y_j (точки)

Р и с. 2. Сглаженные значения y_j (сплошная линия) и результаты расчёта y_j^T (точки)

Заметим, в случае, когда шум x_j отсутствовал, найденные оценки искомых параметров практически в точности совпадали с их модельными значениями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самарин Ю.П. Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // Проблемы прочности. 1974. №9. С.24-27.
2. Самарин Ю.П. Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. Куйбышев: Куйбыш. гос. ун-т, 1979. 84с.
3. Радченко В.П., Самарин Ю.П., Хренов С.М. Определяющие уравнения для материалов при наличии трёх стадий ползучести // Докл. АН СССР. 1986. 288. №3. С. 571-574.
4. Самарин Ю.П., Маклаков В.Н. Индивидуальное прогнозирование поведения материала при многоциклового усталости с использованием закономерностей неупругого деформирования // Проблемы машиностроения и надёжности машин. 1991. №6. С.107-112.
5. Кукинов А.М. Применение порядковых статистик и ранговых критериев для обработки наблюдений. Поиск зависимости и оценка погрешности. М.: Наука, 1985. С.97-110.
6. Закс Л. Статистическое оценивание. М.:Статистика, 1976. 598 с.
7. Мацкевич И.П., Свирид Г.П., Булдык Г.М. Теория вероятностей и математическая статистика. Минск: Вишэйш. шк. 1996. 318 с.

Поступила 21.02.2003 г.