Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Яценко, Система “заряд – тороидальный соленоид” как пример “одно-стороннего” взаимодействия, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2003, выпуск 19, 186–189

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu167>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:29:41

УДК 537.8

В.А.Яценко

СИСТЕМА “ЗАРЯД – ТОРОИДАЛЬНЫЙ СОЛЕНОИД” КАК ПРИМЕР “ОДНОСТОРОННЕГО” ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрена простая система “заряженная частица – тороидальный соленоид с током”, представляющая собой пример полного нарушения третьего закона Ньютона. В этой системе существует “одностороннее” силовое действие одной части системы на другую (заряда на соленоид или наоборот, в зависимости от условий эксперимента). Возникающий парадокс, аналогичный известному парадоксу Фейнмана, связан с кажущимся нарушением закона сохранения импульса и разрешается путем прямых вычислений.

В учебной литературе нарушение третьего закона Ньютона обычно иллюстрируется на примере взаимодействия движущихся под углом друг к другу двух заряженных частиц [1]. Очевидная трудность строгого решения данной задачи о движении двух тел вынуждает ограничиваться при этом лишь качественным рассмотрением. В настоящей статье рассматривается пример системы, в которой существует “одностороннее” действие одной части системы на другую в течение сколь угодно большого промежутка времени. Рассмотрим систему, состоящую из покоящегося тороидального соленоида с постоянным током J и равномерно движущейся со скоростью $\vec{v}$ из бесконечности частицы с зарядом q . Будем считать, что постоянное магнитное поле, создаваемое обмоткой соленоида, целиком сосредоточено внутри тора. Пусть линия движения заряда совпадает с координатной осью Ox и проходит через центр тороида O перпендикулярно его плоскости (рис.1, а).

Р и с. 1. Движущаяся заряженная частица и тороидальный соленоид с током

Очевидно, что соленоид не будет оказывать никакого влияния на заряд. С другой стороны, магнитное поле движущегося заряда приводит к появлению отличной от нуля силы, действующей на соленоид и направленной (как будет показано ниже) вдоль оси Ox . Действительно, каждый виток соленоида с током находится в неоднородном магнитном поле движущегося заряда и, следовательно, будет испытывать действие силы, проекция которой на ось Ox одинакова для любого витка.

Пусть соленоид содержит N витков, радиусы которых значительно меньше радиуса b осевой окружности тороида. Рассчитаем силу, действующую со стороны магнитного поля движущегося заряда на соленоид с током. Равномерно движущийся заряд q создаёт магнитное поле, напряжённость $\vec{h}$ которого равна [2]

$$\vec{h} = \frac{q(1-b^2)[\vec{v} \vec{r}]}{cr^3(1-b^2 \sin^2 j)^{3/2}},$$

(1)

где c – скорость света, $b = v/c$; $\vec{r}$ – радиус-вектор от заряда к точке наблюдения (виток соленоида); φ – угол между вектором $\vec{r}$ и осью Ox (рис.1,б). Величины $\vec{r}$ и φ берутся в момент наблюдения в неподвижной системе отчёта.

Будем пренебрегать смещением соленоида, считая его достаточно массивным, под действием неоднородного магнитного поля. Сила $\vec{f}_j$, действующая со стороны последнего на j -тый виток площадью s , равна

$$\vec{f}_j = \text{grad}(\vec{m}_j \vec{h}),$$

(2)

где $\vec{m}_j$ – магнитный момент j -того витка с током:

$$\vec{m}_j = m = \frac{1}{c} sJ.$$

(3)

Результирующая сила $\vec{F}$, действующая на соленоид, очевидно, будет направлена вдоль оси симметрии, т.е. вдоль оси Ox .

Для определённости рассмотрим движение положительного заряда q в положительном направлении из бесконечности к центру тороида; пусть при этом ток в верхнем витке соленоида (см. рис.1,б) циркулирует по часовой стрелке. Нетрудно убедиться, что в этом случае сила $\vec{F}$ будет направлена в положительном направлении.

Величину этой силы определим с помощью (2):

$$F = \sum_{j=1}^N f_{xj} = N \frac{\partial}{\partial x} (mh).$$

(4)

Здесь у величины m опущен индекс, так как в силу симметрии задачи для любого j векторы $\vec{m}_j$ и $\vec{h}$ коллинеарны. Используя выражение (1), скалярное произведение $\vec{m} \vec{h}$ запишем в виде

$$\vec{m} \vec{h} = - \frac{(1-b^2)mqvb}{c[x^2 + (1-b^2)b^2]^{3/2}}.$$

Подставляя это в (4), получим

$$F = -3Nmbqv(x^2 + b^2)^{-5/2} x / c \quad (x \leq 0).$$

Отсюда найдём величину механического импульса $\vec{P}_o$, приобретаемого массивным соленоидом в результате перемещения заряда q из минус бесконечности в центр тороида:

$$P_o = \int_{-\infty}^0 F dt = \frac{1}{(1-b^2)^{1/2}} \frac{Nm q}{cb^2}.$$

(5)

При этом, очевидно, направления векторов $\vec{P}_o$ и $\vec{F}$ совпадают.

Если частица с зарядом q и массой m находится на бесконечности, то механический импульс системы частица - соленоид равен импульсу частицы gmv , где $g = (1-b^2)^{-1/2}$. Однако в момент прохождения частицей центра тороида механический импульс рассматриваемой системы равен

$$\vec{P}_{\text{мех}} = gmv + \vec{P}_o.$$

Возникший парадокс, связанный с кажущимся нарушением закона сохранения импульса, легко разрешим и для родственной задачи качественно рассмотрен в известном курсе [1]. В нашем случае справедливость закона сохранения полного импульса системы, включающего в себя и электромагнитный импульс, можно показать путём прямых вычислений. Общее выражение для электромагнитного импульса $\vec{G}$ имеет вид [1]

$$\vec{G} = \frac{1}{4\pi c} \int_V [\vec{E} \vec{H}] dv. \quad (6)$$

Электрическое поле $\vec{E}$ движущегося заряда в момент наблюдения равно [2]

$$\vec{E} = \frac{q(1 - b^2) \vec{r}}{c(1 - b^2 \sin^2 j)^{3/2}}. \quad (7)$$

Поскольку магнитное поле $\vec{H}$, создаваемое током соленоида, вне тороида отсутствует, то область интегрирования в (6) совпадает с внутренним объёмом тороида. Так как мы рассматриваем элементарный тороид ($s^{1/2} \ll b$) и задача имеет цилиндрическую симметрию, то выражение (6) для импульса поля $\vec{G}$ упрощается и записывается в виде

$$\vec{G} = \frac{[\vec{E} \vec{H}]}{4\pi c} V = \frac{bs}{2c} [\vec{E} \vec{H}], \quad (8)$$

где V – объём тороида.

Далее используем известное выражение для магнитного поля внутри тороида

$$H = \frac{2}{cb} NJ. \quad (9)$$

По формуле (7) находим величину поля $\vec{E}$ в момент перемещения заряда в центр тороида

$$E = \frac{1}{(1 - b^2)^{1/2} b^2} \frac{q}{b^2} \quad (x=0). \quad (10)$$

Принимая во внимание ортогональность полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$, с помощью соотношений (3) и (8)-(10) получим для импульса поля $\vec{G}_o$:

$$\vec{G}_o = -N \frac{mq}{(1 - b^2)^{1/2} cb^2} \vec{e}_x \quad (x=0), \quad (11)$$

где $\vec{e}_x$ – орт оси Ox .

Сравнивая полученное значение импульса поля $\vec{G}_o$ и механический импульс соленоида $\vec{P}_o$ (5), имеем $\vec{G}_o = -\vec{P}_o$. Последнее равенство, разумеется, справедливо при любом положении заряженной частицы, $\vec{G} = -\vec{P}$. Поэтому полный импульс нашей системы в любой момент времени равен $\vec{P}_{полн} = \vec{g}m v + \vec{P} + \vec{G} = \vec{g}m v$, т.е. как и следовало ожидать, закон сохранения импульса не нарушается.

Полезно рассмотреть нашу систему заряд - соленоид, а также возникающие при этом вопросы под другим углом зрения. Пусть в центре неподвижного тороидального соленоида с током покоится жёстко с ним связанный заряд (рис 1,а; неподвижный заряд находится в точке O). Если в какой-то момент времени выключить ток в соленоиде, то вся система придёт в движение, несмотря на кажущееся нарушение закона сохранения импульса. Данный пример вполне аналогичен широко известному парадоксу о "нарушении" закона сохранения момента импульса, рассмотренному в Фейнмановских лекциях по физике [1]. В нашем примере в справед-

ливости закона сохранения импульса можно убедиться, проведя строгие, но достаточно простые выкладки.

Найдём импульс, полученный зарядом (и, следовательно, всей системой) при выключении тока в соленоиде. При выключении тока возникает действующее на заряд электрическое поле

$$\vec{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

где $\vec{A}$ – векторный потенциал поля в месте нахождения заряда. Пренебрегая смещением заряда за время выключения тока dt , найдём импульс, приобретаемый системой

$$\vec{P} = \int_0^t q \vec{e} dt = \frac{q}{c} \vec{A}_o,$$

где $\vec{A}_o$ – векторный потенциал в центре тороида до выключения тока. Последнюю величину можно рассчитать, используя формулу, приведённую в [2]:

$$\vec{A} = \frac{[\vec{m} \vec{r}]}{r^3}.$$

Здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор от магнитного момента (виток с током) к центру тороида. Отсюда

$$\vec{A}_o = -N \frac{\vec{m}}{b^2} \vec{e}_x.$$

Окончательно для полного (механического) импульса системы имеем

$$\vec{P} = -N \frac{mq}{cb^2} \vec{e}_x.$$

Легко видеть, что этот импульс равен электромагнитному импульсу поля (11) при $b=0$ до момента выключения тока. Если в последнем эксперименте частицу не скреплять с соленоидом, то, как и в случае движения свободного заряда из бесконечности, налицо полное нарушение третьего закона Ньютона. При этом сила, в отличие от первого случая, будет приложена (во время выключения тока) только к заряду, соленоид же останется неподвижным.

Наконец, интересно отметить следующий момент. При обсуждении рассмотренных выше вопросов возникает искушение ввести с целью "спасения" закона сохранения импульса так называемый обобщённый импульс $\vec{P}_{обоб}$ заряженной частицы [2]: $\vec{P}_{обоб} = g n \vec{v} + \frac{q}{c} \vec{A}$.

Однако нетрудно видеть, что из-за отсутствия здесь у последнего члена множителя g правильный результат может быть получен лишь в нерелятивистском случае.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т.6, М.: Мир, 1977. 347 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.

Поступила 12.05.2003 г.