Общероссийский математический портал

А. С. Ерёмин, А. А. Андреев, Краевая задача для уравнения с матричным интегродифференциальным оператором, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 5–10

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu169>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:37:50

Дифференциальные уравнения

УДК 517.95

А. С. Еремин, А. А. Андреев

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С МАТРИЧНЫМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Поставлена краевая задача для матричного уравнения с интегродифференциальным оператором. В случае матриц определенного спектра доказана теорема о корректности этой задачи по Адамару. Приведен метод решения задачи.

В настоящей работе развиваются результаты, изложенные в [1].

1. Матричный интегродифференциальный оператор. Пусть a – любое комплексное число; $j(x) \in L(0, T)$. Оператор дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля по t порядка a с началом в точке 0 ($t > 0$) определяется соотношением [2]

$$I_{0+}^a j(t) \equiv D_{0+}^{-a} j(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t \frac{j(t-t') dt'}{(t-t')^{1-a}}, & \operatorname{Re} a > 0; \\ \frac{d^n}{dt^n} D_{0+}^{-(n+a)} j(t), & \operatorname{Re} a \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

$n-1 < \operatorname{Re}[-a] \leq n$, а значение многозначной функции t^a при $a = u + iv$ выбирается следующим образом:

$$t^a = t^u [\cos(v \ln t) + i \sin(v \ln t)], t > 0. \quad (2)$$

Подобно формулам (1) определяются операторы со степенно-логарифмическим ядром [3]:

$$J_{0+}^{a,m} j(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t \frac{\ln^m(t-t') j(t') dt'}{(t-t')^{1-a}}, \quad \operatorname{Re} a > 0. \quad (3)$$

Из определения (3) видно, что, например, $J_{0+}^{a,1}$ ($\operatorname{Re} a > 0$) возникает при дифференцировании по параметру a выражения $I_{0+}^a j(t)$:

$$J_{0+}^{a,1} j(t) = y(a) I_{0+}^a j(t) + \frac{\partial}{\partial a} I_{0+}^a j(t), \quad (4)$$

где $y(z)$ - пси-функция Эйлера [4]:

$$y(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (5)$$

Определим оператор $J_{0+}^{a,1}$ при $\operatorname{Re} a \leq 0$ равенством (4), полагая в нем $\operatorname{Re} a \leq 0$. Справедливо равенство

$$J_{0+}^{a,1} j(t) = [y(a) + y(n-a)] I_{0+}^a j(t) - \frac{d^n}{dt^n} J_{0+}^{n-a,1} j(t), \quad \operatorname{Re} a \leq 0. \quad (6)$$

Обозначим M_n – множество постоянных матриц порядка n . Пусть матрица $G \in M_n$. Обозначим $\Lambda(G) = \{I_i\}$ – спектр матрицы G ; I_i – собственные значения матрицы G , $I_i \in \mathbb{C}$; $J(G)$ - жорданова форма [5] матрицы G . Последняя имеет квазидиагональный вид и специальную структуру клеток:

$$J(G) = \{J_1(G), J_2(G), \dots, J_s(G)\}, \quad (7)$$

$$J_i(G) = I_i I^{(m_i)} + H^{(m_i)}, \quad i = \overline{1, s}, \quad (8)$$

где у матрицы $H^{(m_i)}$ элементы первой наддиагонали равны единице, а все остальные - нулю:

$$H^{(m_i)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что у матрицы $(H^{(m_i)})^p$ элементы p -й наддиагонали равны единице, а все остальные равны нулю.

Рассмотрим дифференцируемое отображение $f(z): H \xrightarrow{f} X$, где X , в частности, может быть областью на комплексной плоскости, множеством функций комплексной или действительной переменной, зависящих от $I \in H$ как параметра, и т.д.

С помощью интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра [5] можно определить значение отображения на множестве квадратных матриц:

$$f(G) = \sum_{k=1}^s y^k(G) \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{(G - I_k I)^j}{j!} \frac{d^j}{dI^j} \left[\frac{f(I)}{y^k(I)} \right]_{I=I_k}, \quad (10)$$

где m_i – кратность собственного значения I_i ; $y^k(I) = \frac{y(I)}{(I - I_k)^{m_k}}$; $y(I) = \prod_{k=1}^s (I - I_k)^{m_k}$ – минимальный многочлен матрицы G , $j = \overline{1, m_k}$; $k = \overline{1, s}$. Если $X \subset \mathbb{C}$, а $f(z)$ – аналитическая функция, то (10) является определением функции от матрицы.

В работах [6-9] определение (10) было распространено на понятие интегродифференциального оператора, являющегося матричным аналогом оператора дробного интегродифференцирования Римана-Лиувилля.

Пусть $\mathbf{j}(x) = (j_1(x), j_1(x), \dots, j_n(x))^T$, а отображение $f: \mathbf{R} \rightarrow L(0, T)$ определяется формулой $f(I) = D_{0k}^I \mathbf{j}(t)$. Тогда, в соответствии с [6], (10) является определением матричного интегродифференциального оператора:

$$I_{0r}^{-G} \mathbf{j}(t) \equiv D_{0k}^G \mathbf{j}(t) = \sum_{k=1}^s y^k(G) \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{(G - I_k I)^j}{j!} \frac{d^j}{dI^j} \left[\frac{D_{0k}^I \mathbf{j}(t)}{y^k(I)} \right]_{I=I_k}. \quad (11)$$

В случае $G = pI$, $p \in \mathbf{R}$ имеем $s = n$, $m_k = 1$, $y^k(I) = (I - p)^{n-1}$ и из определения (11) следует

$$D_{0r}^{pI} \mathbf{j}(t) = D_{0k}^p \mathbf{j}(t). \quad (12)$$

В частности,

$$D_{0k}^0 \mathbf{j}(t) = \mathbf{j}(t), \quad D_{0r}^{-I} \mathbf{j}(t) = \int_0^t \mathbf{j}(t) dt, \quad D_{0r}^{mI} \mathbf{j}(t) = \frac{d^m \mathbf{j}(t)}{dt^m}. \quad (13)$$

Если $G \in M_2$, $\mathbf{j}(x) = (j_1(x), j_1(x))^T$, то (11) записывается в виде:

$$D_{0k}^G \mathbf{j}(t) = \begin{cases} \frac{G - I_2 I}{I_1 - I_2} D_{0k}^{I_1} \mathbf{j}(t) + \frac{G - I_1 I}{I_2 - I_1} D_{0r}^{I_2} \mathbf{j}(t), & I_1 \neq I_2; \\ I D_{0k}^{I_1} \mathbf{j}(t) + (G - I I) \frac{d}{dI} D_{0k}^{I_1} \mathbf{j}(t), & I_1 = I_2 \equiv I. \end{cases} \quad (14)$$

С учетом (4) соотношения (14) принимают вид:

$$D_{0k}^G \mathbf{j}(t) = \begin{cases} \frac{G - I_2 I}{I_1 - I_2} D_{0k}^{I_1} \mathbf{j}(t) + \frac{G - I_1 I}{I_2 - I_1} D_{0r}^{I_2} \mathbf{j}(t), & I_1 \neq I_2; \\ I D_{0k}^{I_1} \mathbf{j}(t) + (G - I I) (J_{0r}^{-I, I_1} \mathbf{j}(t) - y(I) D_{0k}^{I_1} \mathbf{j}(t)), & I_1 = I_2 \equiv I. \end{cases} \quad (15)$$

2. Уравнение с матричным интегродифференциальным оператором. Пусть матрицы $G, A \in M_n$ коммутативны. В области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < L, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$D_{0r}^G u = A u_{xx} \quad (16)$$

относительно неизвестной вектор-функции $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t))$.

Жорданова форма матрицы G имеет вид (7). Существует такая неособенная матрица T ($\det T \neq 0$), что

$$G = TJ(G)T^{-1}. \quad (17)$$

Поскольку матрицы G и A коммутативны, то имеет место равенство

$$A = TJ(A)T^{-1}, \quad (18)$$

причем жорданова форма $J(A)$ матрицы A имеет структуру (17):

$$J(A) = \{J_1(A), J_2(A), \dots, J_s(A)\}, \quad (19)$$

$$J_i(A) = a_i I^{(m_i)} + H^{(m_i)}, \quad i = \overline{1, s}. \quad (20)$$

Выполним в уравнении (16) замену неизвестной вектор-функции

$$u = Tv. \quad (21)$$

Уравнение (16) заменится уравнением

$$D_{0t}^{J(G)} v = J(A)v_{xx}. \quad (22)$$

Из (7), (19), (22) видно, что замена (21) сводит уравнение (16) к s независимым уравнениям

$$D_{0t}^{J_i(G)} w = J_i(A)w_{xx}, \quad i = \overline{1, s}, \quad (23)$$

где $w(x, t) = (v_p(x, t), v_{p+1}(x, t), \dots, v_{p+m_i-1}(x, t))^T$, $(D_{0t}^{J_i(G)} w(t, x))_j = \sum_{k=j}^{m_i} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dI^{k-1}} [D_{0t}^l w_k(t, x)]_{l=l_i}$.

Действие оператора $D_{0t}^{J_i(G)}$ на вектор-функцию $w(x, t)$ в соответствии с определением (11) записывается в виде

$$D_{0t}^{J_i(G)} w(t, x) = \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{(H^{(m_i)})^k}{k!} \frac{d^k}{dI^k} [D_{0t}^l w(t, x)]_{l=l_i}. \quad (24)$$

Отсюда для j -го элемента вектора $D_{0t}^{J_i(G)} v(t, x)$ ($j = \overline{1, m_i}$) справедлива формула

$$(D_{0t}^{J_i(G)} w(t, x))_j = \sum_{k=j}^{m_i} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dI^{k-1}} [D_{0t}^l w_k(t, x)]_{l=l_i}. \quad (25)$$

В силу (25) матричное уравнение (23) равносильно системе скалярных уравнений

$$\sum_{k=j}^{m_i} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dI^{k-1}} [D_{0t}^l w_k(t, x)]_{l=l_i} = a_j \frac{d^2 w_j(x, t)}{dx^2} + \frac{d^2 w_{j+1}(x, t)}{dx^2}, \quad j = \overline{1, m_i}, \quad (26)$$

где полагается $w_{m_i+1} \equiv 0$.

Таким образом, матричное уравнение (16) с помощью замены (21) приводится к s независимым системам из m_i уравнений вида (26) каждая. Заметим, что уравнения (26), при наличии для них соответствующих граничных условий, решаются последовательно, начиная с уравнения $j = m_i$. Действительно, последнее уравнение системы (26) содержит только производные

$D_{0t}^{l_i} w_{m_i}(t, x)$ и $\frac{d^2 w_{m_i}}{dx^2}$. Если для этого уравнения задана корректная задача, то в результате получаем решение $w_{m_i}(x, t)$ задачи. Подставляя $w_{m_i}(x, t)$ в уравнение с номером $j = m_i - 1$, получаем

неоднородное уравнение, содержащее производные $D_{0t}^{l_i} w_{m_i-1}(t, x)$ и $\frac{d^2 w_{m_i-1}}{dx^2}$. Если для него также задана корректная задача, то при ее решении получим функцию $w_{m_i-1}(x, t)$. И так далее, до тех пор, пока не определятся все неизвестные функции $w_1(x, t)$.

Из вышеизложенного следует, что для того чтобы ставить и решать задачи для уравнения (16), требуется уметь ставить и решать задачи для уравнений вида

$$D_{0t}^a u(t, x) = au_{xx} + f(x, t), \quad (27)$$

где $a, a \in \mathbb{C}$. Этому посвящен следующий пункт работы.

3. Краевые задачи для уравнения со скалярным интегродифференциальным оператором. В области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < L, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$D_{0t}^a u(t, x) = au_{xx} + f(x, t), \quad (28)$$

где $a, a \in \mathbb{C}$, $f(x, t)$ - некоторая, в общем случае, комплекснозначная функция.

Уравнение (28) с $0 < a \leq 2$, $a > 0$, $f \equiv 0$ относительно хорошо изучено. Краевые задачи для него рассматривались ранее в работах [10-12].

Пусть $a, a \in \mathbb{R}$, $f(x, t) \equiv 0$. В этом пункте $n = 1 - [1 - a]$.

Задача 1. В области Ω в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$t^{1-a}u \in C(\overline{\Omega}), \quad u_{xx} \in C(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in C(\Omega), \quad (29)$$

найти решение $u(x, t)$ уравнения (28), удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = u(p, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{a-1} u = t(x). \quad (30)$$

Задача 2. В области Ω в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$t^{2-a}u \in C(\overline{\Omega}), \quad u_{xx} \in C(\Omega), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in C(\Omega), \quad (31)$$

найти решение $u(x, t)$ уравнения (28), удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = u(p, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{a-s} u = t_s(x), \quad s = \overline{1, 2}. \quad (32)$$

Задача 3. В области Ω в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$t^{1-a}u \in C(\overline{\Omega}), \quad u_{xx} \in C(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in C(\Omega), \quad (33)$$

найти решение $u(x, t)$ уравнения (28), удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = u(p, t) = 0, \quad D_{0t}^{a-1} u \Big|_{t=T} = t(x). \quad (34)$$

Задача 4. В области Ω в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$t^{n-a}u \in C(\overline{\Omega}), \quad u_{xx} \in C(\Omega), \quad \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \in C(\Omega), \quad (35)$$

найти решение $u(x, t)$ уравнения (28), удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = u(p, t) = 0, \quad D_{0t}^{a-2} u \Big|_{t=0} = t_1(x), \quad D_{0t}^{a-2} u \Big|_{t=T} = t_2(x). \quad (36)$$

Задача 1 при $a > 0$ решена в [10] методом сведения к системе уравнений меньшего порядка. При $a > 0$ задача 2 решена в [12] методом разделения переменных. Задачи 3 и 4 являются корректными при $a < 0$.

Теорема 1. Пусть в задачах 1-3 функции $t_s(x)$ ($s = \overline{1, 2}$) удовлетворяют условию согласования $t_s(0) = t_s(p) = 0$ и разлагаются на $(0, p)$ в ряд Фурье по синусам. Тогда при $a > 0$, $0 < a \leq 1$, задача 1 при $a > 0$, $1 < a \leq 2$; задача 2 при $a < 0$, $0 < a \leq 1$; задача 3 при $a < 0$, $1 < a \leq 2$; задача 4 – корректны по Адамару.

Замечание. Решения задач 1-4 имеют в $t = 0$ особенность порядка $n - a$. Под корректностью по Адамару для задач 1-4 понимается корректность на паре пространств $C, C^{(n-a)}$, метрики которых определяются следующим образом:

$$r_C(t_1(x), t_2(x)) = \max_{0 < x < L} |t_1(x) - t_2(x)|, \quad (37)$$

$$r_{C^{(g)}}(u_1(x, t), u_2(x, t)) = \max_{0 < x < L} t^g |u_1(x, t) - u_2(x, t)|. \quad (38)$$

Доказательство теоремы 1 при $a > 0$, $0 < a \leq 2$ выполнено в [10-12]. При $a < 0$, $0 < a \leq 1$ и при $a < 0$, $1 < a \leq 2$ доказательство выполняется аналогично. Приведем явный вид решений, полученных методом разделения переменных.

Решение задачи 1 имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k t^{a-1} E_{1/a}(-ak^2 t^a; a) \sin \frac{pkx}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} D_{0t}^{-a} \{E_{1/a}(-ak^2(t-h)^a; a) D_{0h}^{-a} f_n\} \sin \frac{pkx}{L}. \quad (39)$$

Решение задачи 2 имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^2 t_{sk} t^{a-s} E_{1/a}(-ak^2 t^a; a-s+1) \sin \frac{pkx}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} D_{0t}^{-a} \{E_{1/a}(-ak^2(t-h)^a; a) f_n(h)\} \sin \frac{pkx}{L}. \quad (40)$$

Решение задачи 3 при $f(x, t) \equiv 0$ имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{1k} t^{a-1} \frac{E_{1/a}(-ak^2 t^a; a)}{E_{1/a}(-ak^2 T^a; 1)} \sin \frac{pkx}{L}. \quad (41)$$

Решение задачи 4 при $f(x, t) \equiv 0$ имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{t^{a-1} E_{1/a}(-ak^2 t^a; a)}{T E_{1/a}(-ak^2 T^a; 2)} t_{2k} + \right.$$

$$+ \left\{ \frac{t^{a-2} TE_{1/a}(-ak^2 t^a; a-1) E_{1/a}(-ak^2 T^a; 2)}{TE_{1/a}(-ak^2 T^a; 2)} - \frac{t^{a-1} E_{1/a}(-ak^2 t^a; a) E_{1/a}(-ak^2 T^a; 1)}{TE_{1/a}(-ak^2 T^a; 2)} \right\} t_{1k} \sin \frac{pkx}{L}. \quad (42)$$

4. Краевая задача для уравнения с матричным интегродифференциальным оператором. Метод сведения уравнения (16) к системе скалярных уравнений вида (28) и теорема 1 о корректности задач 1-4 позволяют сформулировать краевую задачу для уравнения (16).

Пусть матрицы $G, A \in M_n$ коммутативны и все собственные значения I_i ($i = \overline{1, s}$) матрицы G удовлетворяют условию

$$0 < I_i \leq 2, \quad i = \overline{1, s}, \quad (43)$$

а все собственные значения a_i матрицы A действительны. Пусть T - матрица, определяемая условием (17); l_k ($k = \overline{1, n}$) - вектора - транспонированные строки матрицы T^{-1} .

Задача 5. В области Ω найти решение $u(x, t)$ уравнения (16), дважды непрерывно дифференцируемое по x , t , удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (44)$$

а также условиям:

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{I_i-1}(l_i, u) = t_{ik}(x), \quad \text{если } 0 < I_i \leq 1, a_i > 0; \forall i: i = \overline{1, s}; \quad (45)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{I_i-1}(l_i, u) = t_{ik1}(x), \quad \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{I_i-2}(l_i, u) = t_{ik2}(x), \quad \text{если } 1 < I_i \leq 2, a_i > 0; \quad (46)$$

$$\lim_{t \rightarrow T} D_{0t}^{I_i-1}(l_i, u) = t_{ik}(x), \quad \text{если } 0 < I_i \leq 1, a_i < 0; \quad (47)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{I_i-2}(l_i, u) = t_{ik1}(x), \quad \lim_{t \rightarrow T} D_{0t}^{I_i-2}(l_i, u) = t_{ik2}(x), \quad \text{если } 1 < I_i \leq 2, a_i < 0. \quad (48)$$

В условиях (45) – (48) $k = \overline{1, m_i}$.

Замечание. Поскольку среди собственных чисел I_i матрицы G нет нуля, то среди собственных чисел матрицы A также нет нуля. Поэтому каждому $i = \overline{1, s}$ в задаче 5 соответствует одна строка условий из (45)-(48). При $I_i \leq 1$ – это строка (45) либо (47) и ровно m_i «начальных» условий. При $I_i > 1$ это строка (46) либо (48) и ровно $2m_i$ «начальных» условий. Кроме того, условия (44) содержат $2n$ скалярных условий – «граничных» условий. Исходя из этого, задача 1 содержит ровно

$$k = 2n + \sum_{\substack{i=1 \\ I_i \leq 1}}^s m_k + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ I_i > 1}}^s m_k = 3n + \sum_{\substack{i=1 \\ I_i > 1}}^s m_k$$

условий на n неизвестных функций $u_i(x, t)$, $u_2(x, t)$, ..., $u_n(x, t)$. Из них $2n$ условий - «граничные» и $n + \sum_{\substack{i=1 \\ I_i > 1}}^s m_k$ - «начальные».

Теорема 2. Пусть матрицы $G, A \in M_n$ коммутативны и все собственные значения I_i ($i = \overline{1, s}$) матрицы G удовлетворяют условию

$$0 < I_i \leq 2, \quad i = \overline{1, s}, \quad (49)$$

а все собственные значения матрицы A действительны. Тогда, если $t_{ik}(x) \in C[0, L] \cap C_2(0, L)$, и выполняются условия согласования $t_{ik}(0) = t_{ik}(L) = 0$, то решение задачи 5 существует, единственно и непрерывно зависит от $t_{ik}(x)$.

Для доказательства теоремы достаточно провести в уравнении (16) и условиях (44) – (48) замену (21) и показать, что все получившиеся краевые задачи для скалярных уравнений исчерпываются задачами 1-4. Из этого и из теоремы 1 следует доказательство теоремы 2.

Решение задачи 5 находится заменой переменных (21) и с помощью формул (39) – (42). Рассмотрим в качестве примера случай $n = 2$. Пусть спектр матрицы $G \in M_2$ имеет вид

$$\Lambda(G) = \{I_1, I_2 : 0 < I_1 < I_2 \leq 2\}. \quad (50)$$

Нетрудно получить явный вид матрицы G с заданным спектром:

$$G_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ -\frac{(p-I_1)(p-I_2)}{q} & I_1 + I_2 - p \end{pmatrix}, \quad p, q \in \mathbf{R}, \quad q \neq 0; \quad (51)$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ w & I_2 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ w & I_1 \end{pmatrix}, \quad w \in \mathbf{R}. \quad (52)$$

Рассмотрим случай $G = G_1$. Из условия коммутативности матриц G и A получаем явный параметрический вид матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} r & s \\ -\frac{(p-I_1)(p-I_2)}{q^2}s & r + \frac{(I_1 + I_2 - 2p)}{q}s \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbf{R}. \quad (53)$$

Собственные числа матрицы A определяются формулами:

$$a_1 = r - \frac{p-I_1}{q}s, \quad a_2 = r - \frac{p-I_2}{q}s. \quad (54)$$

Собственные векторы v_1, v_2 матрицы G имеют, с точностью до произвольных множителей, вид

$$v_1 = (q, I_1 - p)^T, \quad v_2 = (q, I_2 - p)^T. \quad (55)$$

Поэтому векторы l_1, l_2 задачи 5 в нашем случае определяются формулой

$$l_1 = (I_1 - p, q)^T, \quad l_2 = (I_2 - p, q)^T. \quad (56)$$

Допустим, что $0 < I_1 < I_2 \leq 1$. Тогда, если $r - \frac{p-I_1}{q}s > 0$, $r - \frac{p-I_2}{q}s < 0$, то задача (16), (44),

(45) ($i=1$), (47) ($i=2$) с постоянными (51), (53), (56) является корректной и ее решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{(I_1 - I_2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{p-I_2}{q} & \frac{I_1-p}{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} t_{1k} t^{l_1-1} E_{1/l_1} \left(-\left(r - \frac{p-I_1}{q}s \right) k^2 t^a; I_1 \right) \sin \frac{pkx}{L} \\ \sum_{k=1}^{\infty} t_{2k} t^{l_2-1} \frac{E_{1/a} \left(-\left(r - \frac{p-I_2}{q}s \right) k^2 t^a; I_2 \right)}{E_{1/a} \left(-\left(r - \frac{p-I_2}{q}s \right) k^2 t^a; 1 \right)} \sin \frac{pkx}{L} \end{pmatrix}. \quad (57)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев А. А., Еремин А. С. Краевые задачи для дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 10. №2. 2003. С. 377-378.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 702 с.
3. Килбас А. А. Степенно-логарифмические интегралы в пространствах гильбертовских функций // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. науки. 1975. №1. С. 37-43.
4. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
6. Андреев А. А. Нелокальные краевые задачи для одной модельной вырождающейся системы гиперболического типа // Краевые задачи для уравнения математической физики. Куйбышев: Куйбышев. пед. ин-т, 1990. С.3-6.
7. Андреев А. А. Об одном обобщении операторов дробного интегродифференцирования и его приложениях // Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики. Матер. Всесоюзной конф. Владивосток. 1990. С. 91.
8. Андреев А. А., Огородников Е. Н. Матричные интегродифференциальные операторы и их применение // Вестник Самар. госуд. техн. ун-та. Сер.: физ.-мат. науки. 1999. Вып. 7. С. 27-37.
9. Андреев А. А., Огородников Е. Н. Применение матричных интегродифференциальных операторов в постановке и решении нелокальных краевых задач для систем уравнений гиперболического типа // Вестник Самар. госуд. техн. ун-та. Сер.: физ.-мат. науки. 2001. Вып. 9. С. 45-53.
10. Псху А. В. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференциальные уравнения. Т. 39. №9. 2003. С. 1286-1289.
11. Андреев А. А., Еремин А. С. Краевая задача для уравнения диффузии с дробной производной по времени // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды двенадцатой межвузовской конференции. Ч.2. Самара: СамГТУ, 2002. С. 3-9.
12. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. 299 с.

Поступила 10.12.2003 г.