Общероссийский математический портал

Л. Р. Гайсина, Решение краевой задачи со смещением для обобщенного волнового уравнения, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 11–15

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 13:41:55

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Для обобщенного волнового уравнения поставлена и исследована новая краевая задача с нелокальным условием, содержащим обобщенный оператор дробного интегродифференцирования, носителем которого является характеристическая часть границы области. Доказана однозначная разрешимость рассматриваемой задачи.

Рассмотрим уравнение

$$LU = U_{xx} - U_{yy} - \frac{2p}{y} U_y - I^2 U = 0, \quad (1)$$

где $I = \text{const} \neq 0$, $0 < 2p < 1$, в характеристическом треугольнике Ω с вершинами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0.5, -0.5)$.

Постановка задачи DS - 1. Найти функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую условиям: $LU \equiv 0$ в области Ω ;

$$U(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega); \quad (2)$$

$$U(x, 0) = t(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$A_1 I_{0+}^{a_1, b_1, -a_1} U[q_0(x)] = A_2 \left(I_{0+}^{a_1+1-p, p+b_1-1, -a_1} x^{-p} n \right)(x) + y(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (4)$$

где
$$n(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-2p} \right)^{2p} (-y)^{2p} U_y(x, y), \quad 0 < x < 1,$$

$(I_{0+}^{a, b, g} f)(x)$ - обобщенный оператор дробного интегродифференцирования М.Сайго [4]; $q_0(x)$ - аффикс, то есть точка пересечения характеристики, выходящей из точки $(x, 0)$, с характеристикой AC ; A_1, A_2 - постоянные коэффициенты; $y(x), t(x)$ - заданные функции, причем $t(x), y(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ и $t(x) \in H^{l_1}[0, 1]$, $1-2p < l_1 \leq 1$; $y(x) \in H^{l_2}[0, 1]$, $1+a_1-p < l_2 \leq 1$, $0 < a_1 < p$, $b_1 > 1$.

Постановка задачи DS - 2. Найти функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1), условию (2) и, кроме того, условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-2p} \right)^{2p} (-y)^{2p} U_y(x, y) = n(x), \quad 0 < x < 1; \quad (5)$$

$$A_3 I_{0+}^{a_2, b_2, -a_2} U[q_0(x)] = A_4 \left(I_{0+}^{a_2+p, p+b_2-1, -a_2} x^{p-1} t \right)(x) + j(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (6)$$

где $t(x) = U(x, 0)$, $0 \leq x \leq 1$; A_3, A_4 - постоянные коэффициенты; $j(x), n(x)$ - заданные функции, причем $j(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ и $n(x) \in H^{l_3}(0, 1)$, $j(x) \in H^{l_4}[0, 1]$, $a_2 + p < l_4 \leq 1$, $0 < a_2 < p$, $b_2 > 1-p$.

Для уравнения (1) М.Б. Капилевым в работе [1] получено решение задачи Коши с данными

$$U(x, 0) = t(x), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-2p} \right)^{2p} (-y)^{2p} U_y(x, y) = n(x), \quad 0 < x < 1,$$

которое в характеристических координатах $x+y=h$, $x-y=h$ имеет вид

$$U(x, h) = g_1(h-x)^{1-2p} \int_x^h t(z)(z-x)^{p-1}(h-z)^{p-1} \bar{J}_{p-1} \left[l \sqrt{(z-x)(h-z)} \right] dz - \\ - \bar{g}_2 \int_x^h n(z)(z-x)^{-p}(h-z)^{-p} \bar{J}_{-p} \left[l \sqrt{(z-x)(h-z)} \right] dz, \quad (7)$$

где $\bar{J}_n(z) = \Gamma(n+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} J_n(z)$; $\bar{J}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!(1+n)_k}$ - функция Бесселя-Клиффорда [2];

$$g_1 = \frac{\Gamma(2p)}{\Gamma^2(p)}; \quad g_2 = \frac{\Gamma(2-2p)}{\Gamma^2(1-p)}; \quad \bar{g}_2 = g_2(2-4p)^{2p-1}.$$

Н.И. Бакиевичем [3] доказано, что если функции $t(x)$ и $n(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы при $0 < x < 1$, $t(x)$ непрерывна при $0 \leq x \leq 1$, а $n(x)$ обращается в бесконечность порядка меньше, чем $1-2p$, при $x=0$ и $x=1$, то формула (7) дает регулярное решение задачи Коши для уравнения (1).

Подставляя в решение задачи Коши значения $x=0, h=x$, получим

$$\begin{aligned} U[q_0(x)] &= g_1 x^{1-2p} \int_0^x t(z) z^{p-1} (x-z)^{p-1} \bar{J}_{p-1}[L\sqrt{z(x-z)}] dz - \\ &\quad - \bar{g}_2 \int_0^x n(z) z^{-p} (x-z)^{-p} \bar{J}_{-p}[L\sqrt{z(x-z)}] dz. \end{aligned} \quad (8)$$

Введя новые обозначения $t_1(z) = t(z) z^{p-1}$, $n_1(z) = n(z) z^{-p}$ и воспользовавшись тождеством [3]

$$(x-t)^{-n} \bar{J}_{-n}[L\sqrt{t(x-t)}] = \frac{\partial}{\partial x} \int_t^x (x-s)^{-n} J_0[L\sqrt{t(s-t)}] ds \quad (n < 1),$$

перепишем (8) в виде

$$\begin{aligned} U[q_0(x)] &= g_1 x^{1-2p} \int_0^x t_1(z) \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_z^x (x-s)^{p-1} J_0[L\sqrt{z(s-z)}] ds \right] dz - \\ &\quad - \bar{g}_2 \int_0^x n_1(z) \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_z^x (x-s)^{-p} J_0[L\sqrt{z(s-z)}] ds \right] dz. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим интегралы, входящие в состав (9):

$$i_1 = \int_0^x t_1(z) \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_z^x (x-s)^{p-1} J_0[L\sqrt{z(s-z)}] ds \right] dz, \quad i_2 = \int_0^x n_1(z) \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_z^x (x-s)^{-p} J_0[L\sqrt{z(s-z)}] ds \right] dz.$$

Применим последовательно к интегралам i_1 и i_2 : формулу дифференцирования интеграла по параметру, перемену порядка интегрирования, интегрирование по частям и опять дифференцирование интеграла по параметру. В результате получим:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{d}{dx} \int_0^x t_1(z) \int_z^x (x-s)^{p-1} J_0[L\sqrt{z(s-z)}] ds dz = \frac{d}{dx} \int_0^x (x-s)^{p-1} \left(\int_0^s t_1(z) J_0[L\sqrt{z(s-z)}] dz \right) ds = \\ &= \frac{d}{dx} \left\{ \left(-\frac{(x-s)^p}{p} \int_0^s t_1(z) J_0[L\sqrt{z(s-z)}] dz \right) \Big|_{s=x}^{s=0} + \int_0^x \frac{(x-s)^p}{p} \left(\frac{d}{ds} \int_0^s t_1(z) J_0[L\sqrt{z(s-z)}] dz \right) ds \right\} = \\ &= \int_0^x (x-s)^{p-1} \left(\frac{d}{ds} \int_0^s t_1(z) J_0[L\sqrt{z(s-z)}] dz \right) ds = \int_0^x t_2(s) (x-s)^{p-1} ds, \end{aligned}$$

где

$$t_2(s) = \frac{d}{ds} \int_0^s t_1(z) J_0[L\sqrt{z(s-z)}] dz. \quad (10)$$

Аналогично

$$i_2 = \frac{d}{dx} \int_0^x n_1(z) \int_z^x (x-s)^{-p} J_0[L\sqrt{z(s-z)}] ds dz = \frac{d}{dx} \int_0^x (x-s)^{-p} \left(\int_0^s n_1(z) J_0[L\sqrt{z(s-z)}] dz \right) ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dx} \left\{ \left(-\frac{(x-s)^{1-p}}{1-p} \int_0^s n_1(z) J_0 \left[l \sqrt{z(s-z)} \right] dz \right) \Big|_{s=x}^{s=0} + \int_0^x \frac{(x-s)^{1-p}}{1-p} \left(\frac{d}{ds} \int_0^s n_1(z) J_0 \left[l \sqrt{z(s-z)} \right] dz \right) ds \right\} = \\
&= \int_0^x (x-s)^{-p} \left(\frac{d}{ds} \int_0^s n_1(z) J_0 \left[l \sqrt{z(s-z)} \right] dz \right) ds = \int_0^x n_2(s) (x-s)^{-p} ds,
\end{aligned}$$

где

$$n_2(s) = \frac{d}{ds} \int_0^s n_1(z) J_0 \left[l \sqrt{z(s-z)} \right] dz. \quad (11)$$

Перепишем выражение (9) с учетом преобразованных интегралов i_1 и i_2 :

$$U[q_0(x)] = g_1 x^{1-2p} \int_0^x t_2(s) (x-s)^{p-1} ds - \bar{g}_2 \int_0^x n_2(s) (x-s)^{-p} ds,$$

или

$$U[q_0(x)] = g_1 x^{1-2p} \Gamma(p) (I_{0+}^p t_2)(x) - \bar{g}_2 \Gamma(1-p) (I_{0+}^{1-p} n_2)(x), \quad (12)$$

где $(I_{0+}^a j)(x)$ - дробный интеграл в смысле Римана-Лиувилля [2].

Используя краевое условие (4), получим

$$\begin{aligned}
&A_1 (I_{0+}^{a_1, b_1, -a_1} g_1 x^{1-2p} \Gamma(p) (I_{0+}^p t_2))(x) - A_1 (I_{0+}^{a_1, b_1, -a_1} \bar{g}_2 \Gamma(1-p) (I_{0+}^{1-p} n_2))(x) = \\
&= A_2 (I_{0+}^{a_1+1-p, p+b_1-1, -a_1} x^{-p} n)(x) + y(x).
\end{aligned} \quad (13)$$

Воспользовавшись известными свойствами операторов дробного интегрирования [4]

$$(I_{0+}^{a, -a, c} f)(x) = (I_{0+}^a f)(x), \quad a > 0; \quad (I_{0+}^{a, b, c} f)(x) = x^{-a-b-c} (I_{0+}^{a, -a-c, -a-b} f)(x), \quad a > 0,$$

перепишем (13) следующим образом:

$$A_1 g_1 \Gamma(p) (I_{0+}^{a_1, b_1, -a_1} (I_{0+}^{p, p-1, 0} t_2))(x) - A_1 \bar{g}_2 \Gamma(1-p) (I_{0+}^{a_1+1-p, b_1+p-1, -a_1} n_2)(x) = A_2 (I_{0+}^{a_1+1-p, p+b_1-1, -a_1} x^{-p} n)(x) + y(x)$$

или

$$\begin{aligned}
&A_1 g_1 \Gamma(p) (I_{0+}^{a_1+p, b_1+p-1, -a_1} t_2)(x) - A_1 \bar{g}_2 \Gamma(1-p) (I_{0+}^{a_1+1-p, b_1+p-1, -a_1} n_2)(x) = \\
&= A_2 (I_{0+}^{a_1+1-p, p+b_1-1, -a_1} x^{-p} n)(x) + y(x).
\end{aligned} \quad (14)$$

Применяя к обеим частям (14) обратный оператор

$$[(I_{0+}^{a_1+1-p, b_1+p-1, -a_1} n_2)(x)]^{-1} = (I_{0+}^{p-a_1-1, 1-b_1-p, 1-p} n_2)(x),$$

получим

$$A_1 \bar{g}_2 \Gamma(1-p) n_2(x) + A_2 x^{-p} n(x) = A_1 g_1 \Gamma(p) (I_{0+}^{2p-1, 0, 1-p} t_2)(x) - (I_{0+}^{p-1-a_1, 1-b_1-p, 1-p} y)(x). \quad (15)$$

Вернемся к выражению (11), которое можно записать в виде

$$n_2(x) = n_1(x) + \int_0^x n_1(t) \frac{\partial}{\partial x} J_0 \left[l \sqrt{t(x-t)} \right] dt.$$

Используя известные свойства функций Бесселя [2]

$$\frac{d}{dz} (z^{\pm n} J_n(z)) = \pm z^{\pm n} J_{n \mp 1}(z), \quad \bar{J}_n(z) = \Gamma(n+1) \left(\frac{z}{2} \right)^{-n} J_n(z),$$

получим следующую формулу:

$$\frac{\partial}{\partial x} J_0 \left[l \sqrt{t(x-t)} \right] = J_1 \left[l \sqrt{t(x-t)} \right] \frac{lt}{2\sqrt{t(x-t)}} = \frac{l^2 t}{4} \bar{J}_1 \left[l \sqrt{t(x-t)} \right]. \quad (16)$$

Следовательно,

$$n_2(x) = n_1(x) + \frac{l^2}{4} \int_0^x n_1(t) \bar{J}_1 \left[l \sqrt{t(x-t)} \right] dt. \quad (17)$$

Ввиду справедливости (17) и равенства $n_1(x) = n(x)x^{-p}$, из (15) имеем

$$n_1(x) + B_1 \int_0^x n_1(t) K(x, t) dt = f(x), \quad (18)$$

где $K(x, t) = I_1^{-1} [I \sqrt{t(x-t)}]$, $f(x) = B_2 (I_{0+}^{2p-1, 0, 1-p} t_2)(x) - B_3 (I_{0+}^{p-1-a_1, 1-b_1-p, 1-p} y)(x)$,

$$B_1 = \frac{I^2}{4} \frac{A_1 \bar{g}_2 \Gamma(1-p)}{A_2 + A_1 \bar{g}_2 \Gamma(1-p)}, \quad B_2 = \frac{A_1 g_1 \Gamma(p)}{A_2 + A_1 \bar{g}_2 \Gamma(1-p)}, \quad B_3 = \frac{1}{A_2 + A_1 \bar{g}_2 \Gamma(1-p)}.$$

Равенство (18) - это уравнение Вольтерра второго рода. Таким образом, мы свели «в смысле однозначной разрешимости», решение нашей задачи к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Из общей теории уравнений Вольтерра [5] следует, что данное уравнение допускает единственное непрерывное решение, если его ядро $K(x, t)$ и правая часть $f(x)$ являются непрерывными в целом функциями, причем особенности должны иметь порядок меньше единицы.

Исследуем вопрос о разрешимости уравнения (18). Учитывая, что функция Бесселя [2] представляет собой ряд, который сходится на всей плоскости комплексного переменного, и, следовательно, представляет целую функцию, имеем ядро $K(x, t)$, непрерывное в квадрате $0 \leq x, t < 1$.

Выясним поведение правой части $f(x)$ уравнения (18). Используем лемму, доказанную в работе [6]:

Лемма 1 [6]. Пусть $0 < -a < l \leq 1$ и $b < \min[0, h+1]$. Если $j(x) \in H^l[0, 1]$, то $I_{0+}^{a, b, h} j(x) \in H^{\min[l+a, -b]}[0, 1]$.

На основании леммы при $t_2(x) \in H^l[0, 1]$, $1-2p < l_1 \leq 1$; $y(x) \in H^{l_2}[0, 1]$, $1+a_1-p < l_2 \leq 1$ имеем $(I_{0+}^{2p-1, 0, 1-p} t_2)(x) \in H^{\min[l_1+2p-1, 0]}[0, 1]$, $(I_{0+}^{p-1-a_1, 1-b_1-p, 1-p} y)(x) \in H^{\min[l_2+p-a_1-1, p+b_1-1]}[0, 1]$, причем $b_1 > 1$.

Таким образом, правая часть

$$f(x) \in H^{\min[l_1+2p-1, 0]}[0, 1].$$

Следовательно, уравнение Вольтерра (18) имеет единственное непрерывное решение и задача $DS-1$ однозначна разрешима.

Аналогично решим задачу $DS-2$. Подставляя (12) в краевое условие (6), получим

$$\begin{aligned} & A_3 (I_{0+}^{a_2, b_2, -a_2} g_1 x^{1-2p} \Gamma(p) (I_{0+}^p t_2))(x) - A_3 (I_{0+}^{a_2, b_2, -a_2} \bar{g}_2 \Gamma(1-p) (I_{0+}^{1-p} n_2))(x) = \\ & = A_4 (I_{0+}^{a_2+p, p+b_2-1, -a_2} x^{p-1} t)(x) + j(x). \end{aligned} \quad (19)$$

Воспользовавшись известными свойствами операторов дробного интегрирования [4]

$$(I_{0+}^{a, -a, c} f)(x) = (I_{0+}^a f)(x), \quad a > 0, \quad (I_{0+}^{a, b, c} f)(x) = x^{-a-b-c} (I_{0+}^{a, -a-c, -a-b} f)(x), \quad a > 0,$$

перепишем (19) следующим образом:

$$\begin{aligned} & A_3 g_1 \Gamma(p) (I_{0+}^{a_2+p, b_2+p-1, -a_2} t_2)(x) - A_3 \bar{g}_2 \Gamma(1-p) (I_{0+}^{a_2+1-p, b_2+p-1, -a_2} n_2)(x) = \\ & = A_4 (I_{0+}^{a_2+p, p+b_2-1, -a_2} x^{p-1} t)(x) + j(x). \end{aligned} \quad (20)$$

Применив к обеим частям (20) обратный оператор

$$[(I_{0+}^{a_2+p, b_2+p-1, -a_2} t_2)(x)]^{-1} = (I_{0+}^{-a_2-p, 1-b_2-p, p} t_2)(x),$$

получим

$$A_3 g_1 \Gamma(p) t_2(x) - A_4 x^{p-1} t(x) = A_3 \bar{g}_2 \Gamma(1-p) (I_{0+}^{1-2p, 0, p} n_2)(x) + (I_{0+}^{-a_2-p, 1-b_2-p, p} j)(x). \quad (21)$$

Вернемся к выражению (10), которое можно записать в виде

$$t_2(x) = t_1(x) + \int_0^x t_1(t) \frac{\partial}{\partial x} J_0 [I \sqrt{t(x-t)}] dt$$

или, используя формулу (16), -

$$t_2(x) = t_1(x) + \frac{I^2}{4} \int_0^x t_1(t) I_1 [I \sqrt{t(x-t)}] dt. \quad (22)$$

Ввиду справедливости (22) и равенства $t_1(x) = t(x)x^{p-1}$, из (21) имеем

$$t_1(x) + C_1 \int_0^x t_1(t) L(x, t) dt = g(x), \quad (23)$$

где $L(x,t) = t\bar{J}_1[I\sqrt{t(x-t)}]$, $f(x) = C_2(I_{0+}^{1-2p,0,p}n_2)(x) - C_3(I_{0+}^{-p-a_2,1-b_2-p,p}j)(x)$,

$$C_1 = \frac{I^2}{4} \frac{A_3 g_1 \Gamma(p)}{A_3 g_1 \Gamma(p) - A_4}, \quad C_2 = \frac{A_3 \bar{g}_2 \Gamma(1-p)}{A_3 g_1 \Gamma(p) - A_4}, \quad C_3 = \frac{1}{A_3 g_1 \Gamma(p) - A_4}.$$

Соотношение (23) - это уравнение Вольтерра второго рода. Из общей теории уравнений Вольтерра [5] следует, что данное уравнение допускает единственное непрерывное решение, если его ядро $L(x,t)$ и правая часть $g(x)$ являются непрерывными в целом функциями, причем особенности должны иметь порядок меньше единицы.

Таким образом, мы свели решение задачи $DS-2$, в смысле однозначной разрешимости, к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Исследуем вопрос о его разрешимости. Учитывая, что функция Бесселя [2] представляет собой ряд, который сходится на всей плоскости комплексного переменного, и, следовательно, представляет целую функцию, имеем ядро $L(x,t)$ непрерывное в квадрате $0 \leq x, t < 1$.

Выясним поведение правой части $g(x)$ уравнения (23). Для этого используем лемму, также доказанную в работе [6].

Лемма 2 [6]. Пусть $a > 0, h > b - 1, l > 0$ и $j(x) \in H^l[0,1]$. Тогда $x^b I_{0+}^{a,b,h} j(x) \in H^l[0,1]$.

На основании лемм 1 и 2, при выполнении условий $n_2(x) \in H^{l_3}[0,1]$, $l_3 > 0$; $j(x) \in H^{l_4}[0,1]$, $a_2 + p < l_4 \leq 1$ имеем $(I_{0+}^{1-2p,0,p}n_2)(x) \in H^{l_3}[0,1]$, $(I_{0+}^{-p-a_2,1-b_2-p,p}j)(x) \in H^{\min[l_4-p-a_2,p+b_2-1]}[0,1]$, причем $b_2 > 1 - p$.

Таким образом, правая часть

$$g(x) \in H^{\min[l_3, l_4-p-a_2, p+b_2-1]}[0,1].$$

Следовательно, уравнение Вольтерра (23) имеет единственное непрерывное решение и задача $DS-2$ однозначна разрешима.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Каплевич М.Б. Об одном уравнении смешанного эллипτικο-гиперболического типа // Матем. сб. 1952. Т.30(72). №1. С. 28-31.
2. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск.1987.
3. Бакиевич Н.И. Сингулярные задачи Трикоми для уравнения $\eta^\alpha U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - \mu \eta^2 U = 0$ // Волжский матем. сб. 1963. Вып.1.С.42-52.
4. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu.Univ. 1978. Vol. 11. N 2. P.135-143.
5. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и инте-гродифференциальных уравнений. М.: Наука. 1982.
6. Гринько А.П., Килбас А.А. Обобщенные дробные интегралы в пространствах Гельдера с весом // Доклады АН БССР. 1990.Т.34 №6 С.493-496.

Поступила 6.06.2003 г.