Общероссийский математический портал

А. В. Ефимов, О краевых задачах с операторами М. Сайго для уравнения смешанного типа с дробной производной, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 16–20

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu171>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 10:15:38

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С ОПЕРАТОРАМИ М.САЙГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Для уравнения смешанного типа с дробной производной поставлены и исследованы две нелокальные задачи в области, параболическая часть которой – верхняя полуплоскость. Отличительной особенностью данной работы является наличие обобщенных операторов в смысле М.Сайго в краевом условии. Доказана однозначная разрешимость обеих задач.

Введение. Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} U_{xx} - D_{0+,y}^a U, & y > 0; \\ (-y)^m U_{xx} - U_{yy} = 0, & y < 0, \quad m > -1, \quad m \neq 0, \end{cases} \quad (1)$$

которое имеет вырождение первого ($m > 0$) и второго рода ($-1 < m < 0$). Здесь $D_{0+,y}^a$ – частная дробная производная Римана-Лиувилля порядка a ($0 < a < 1$) от функции $U(x, y)$ по второй переменной [1, с. 341]:

$$(D_{0+,y}^a U)(x, y) = \frac{d}{dy} \frac{1}{\Gamma(1-a)} \int_0^y \frac{U(x, t)}{(y-t)^{1-a}} dt, \quad (0 < a < 1, y > 0).$$

Обозначим через $J = (0, 1)$ единичный интервал прямой $y = 0$; $(I_{0+}^a f)(x)$, $(D_{0+}^a f)(x)$ – операторы дробного интегрирования в смысле Римана-Лиувилля; $(I_{0+}^{a,b,h} f)(x)$ – обобщенный оператор дробного интегрирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; c; z)$, введенный в [2] (см. также [1], с. 326-327) и имеющий при действительных $a > 0, b, h$ и $x > 0$ вид

$$(I_{0+}^{a,b,h} f)(x) = \frac{x^{-a-b}}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} F(a+b, -h; a; 1 - \frac{t}{x}) f(t) dt.$$

Заметим, что

$$(I_{0+}^{a,-a,h} f)(x) = (I_{0+}^a f)(x), \quad (I_{0+}^{-a,a,h} f)(x) = (D_{0+}^a f)(x). \quad (2)$$

Вариант 1. Пусть $m > 0$, $D = D^+ \cup D^-$, где $D^+ = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, y > 0\}$, D^- – область, ограниченная характеристиками $AC : x = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$, $BC : h = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$ и отрезком $[0, 1]$ прямой $y = 0$, $y < 0$.

$q_0(x)$ – абсцисса точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x, 0) \in J$, с характеристикой AC .

Для уравнения (1) изучим следующую нелокальную краевую задачу.

Задача 1. Найти решение $U(x, y)$ уравнения (1) в области D , удовлетворяющее краевым условиям:

$$y^{1-a} U|_{y=0} = 0, \quad -\infty < x \leq 0, \quad 1 \leq x < \infty, \quad (3)$$

$$A_1 x^{1-2b+b} (I_{0+}^{-b-c,b,c} t^{2b-1} U[q_0(t)])(x) + A_2 (I_{0+}^{-c,0,-1+2b+c-b} U(t, 0))(x) + A_3 (I_{0+}^{1-2b-c,2b-1,-1+2b+c-b} U_y(t, 0))(x) = g(x), \quad x \in J, \quad (4)$$

а также условиям сопряжения:

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-a} U(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} U(x, y) \quad (x \in \bar{J}), \quad (5)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-a} (y^{1-a} U(x, y))_y = \lim_{y \rightarrow 0-} U_y(x, y) \quad (x \in J). \quad (6)$$

Здесь $g(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^2(J)$ – заданная функция; $b = \frac{m}{2(m+2)}$, $0 < b < \frac{1}{2}$; A_1, A_2, A_3, c, b – действительные числа, причем A_1 и A_2 числа одинаковых знаков, A_1 и A_3 – противоположных знаков, а $c < 0$.

Будем искать решение $U(x, y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области D , таких, что

$$y^{1-a}U(x, y) \in C(\overline{D^+}), \quad U(x, y) \in C(\overline{D^-}), \quad (7)$$

$$y^{1-a}(y^{1-a}U)_y \in C(D^+ \cup \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}),$$

$$U_{xx} \in C^2(D^+ \cup D^-), \quad U_{yy} \in C^2(\overline{D^-}). \quad (8)$$

Единственность решения задачи 1. Пусть существует решение исследуемой задачи. Введем обозначения:

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-a}U(x, y) = t_1(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0-} U(x, y) = t_2(x), \quad (9)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-a}(y^{1-a}U)_y = n_1(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0-} U_y(x, y) = n_2(x). \quad (10)$$

Известно [3], что функциональное соотношение между $t_1(x)$ и $n_1(x)$, принесенное из параболической части D^+ на линию $y = 0$, имеет вид

$$n_1(x) = \frac{1}{\Gamma(1+a)} t_1'(x). \quad (11)$$

Найдем соотношение между $t_2(x)$ и $n_2(x)$, принесенное на линию $y = 0$ из гиперболической части D^- области D . Используя формулу (19) из [4], имеем

$$U[q_0(x)] = g_1 \Gamma(b) (I_{0+}^{b,0,b-1} t_2)(x) - g_2 \Gamma(1-b) (I_{0+}^{1-b,2b-1,b-1} n_2)(x), \quad (12)$$

где

$$g_1 = \frac{\Gamma(2b)}{\Gamma^2(b)}, \quad g_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2b} \frac{\Gamma(1-2b)}{\Gamma^2(1-b)}.$$

Подставляя (12) в (4) и применяя ряд свойств обобщенных операторов дробного интегрирования, получаем

$$t_2(x) = K (I_{0+}^{1-2b} n_2(t))(x) + \Psi_1(x), \quad (13)$$

где

$$K = \frac{A_1 g_2 \Gamma(1-b) - A_3}{A_1 g_1 \Gamma(b) + A_2}, \quad \Psi_1(x) = \frac{1}{A_1 g_1 \Gamma(b) + A_2} (I_{0+}^{c,0,-1+2b-b} g(t))(x). \quad (14)$$

Единственность решения задачи доказывается по схеме, предложенной в [4].

Существование решения задачи 1. Для доказательства существования решения задачи сведем ее к дифференциальному уравнению дробного порядка. Дифференцируя обе части (13) дважды по x , полагая $t_1(x) = t_2(x) = t(x)$, $n_1(x) = n_2(x) = n(x)$ и учитывая (11), придем к дифференциальному уравнению дробного порядка $1 + 2b$:

$$(D_{0+}^{1+2b} n(t))(x) - \frac{\Gamma(1+a)}{K} n(x) = -\frac{\Psi_1''(x)}{K}. \quad (15)$$

Известно (см. [1], прим. 42.1 и 42.2, с. 601-602), что общее решение дифференциального уравнения дробного порядка $a > 0$ вида

$$(D_{0+}^a y)(x) - I y(x) = h(x) \quad (a > 0, n = -[-a]) \quad (16)$$

задается формулой

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^{a-k} E_{a,1+a-k}(I x^a) + \int_0^x (x-t)^{a-1} E_{a,a}[I(x-t)^a] h(t) dt. \quad (17)$$

Здесь $c_1, \dots, c_n$ – произвольные постоянные, а $E_{a,1+a-k}(I x^a)$ и $E_{a,1+a-k}[I(x-t)^a]$ – специальные случаи функции Миттаг-Леффлера $E_{a,b}(z)$, определяемой равенством

$$E_{a,b}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(am+b)} \quad (a > 0, b > 0), \quad E_a(z) \equiv E_{a,1}(z),$$

и являющейся целой функцией от z (см. [5, 18.1], [1, с.33], [6, с.117]).

Уравнение (15) – уравнение вида (16) с $y(x)=n(x)$, $a=1+2b$, $l=\Gamma(1+a)/K$ и $h(x)=-\Psi_1''(x)/K$. Так как $0 < b < \frac{1}{2}$, то $1 < 1+2b < 2$, и поэтому общее решение вида (17) для уравнения (15) с $K \neq 0$ дается формулой

$$n(x) = c_1 x^{2b} E_{1+2b, 1+2b} \left(\frac{\Gamma(1+a)}{K} x^{1+2b} \right) + c_2 x^{2b-1} E_{1+2b, 2b} \left(\frac{\Gamma(1+a)}{K} x^{1+2b} \right) - \frac{1}{K} \int_0^x (x-t)^{2b} E_{1+2b, 1+2b} \left[\frac{\Gamma(1+a)}{K} (x-t)^{1+2b} \right] \Psi_1''(t) dt, \quad (18)$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

На основании работы [7] можно найти константы c_1 и c_2 , а затем, используя (18), выпи- сать явный вид для функции $t(x)$:

$$t(x) = c_1 x E_{2b+1, 2} \left(\frac{\Gamma(1+a)}{K} x^{2b+1} \right) + c_2 E_{2b+1} \left(\frac{\Gamma(1+a)}{K} x^{2b+1} \right) - \int_0^x (x-t) E_{2b+1, 2} [(x-t)^{2b+1} \frac{\Gamma(1+a)}{K}] \Psi_1''(t) dt + \Psi_1(x).$$

Вариант 2. Пусть $-1 < m < 0$, $D = D^+ \cup D^-$, где D^+ – область, описанная выше, а D^- – об- ласть, ограниченная характеристиками $AC: x = x - \frac{2}{2-m} (-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0$,

$BC: h = x + \frac{2}{2-m} (-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1$ и отрезком $[0,1]$ прямой $y = 0$, $y < 0$. Величина $q_0(x)$ – аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,0) \in J$, с характери- стикой AC . Для уравнения (1) изучим следующую нелокальную краевую задачу.

Задача 2. Найти решение $U(x, y)$ уравнения (1) в области D , удовлетворяющее краевым условиям (3) и (4), а также условиям сопряжения (5) и (6). Здесь $g(x) \in C^1(\bar{J}) \cap C^2(J)$ – задан- ная функция; $b = \frac{m}{2(m+2)}$, $-\frac{1}{2} < b < 0$; A_1, A_2, A_3, c, b – действительные числа, причем A_1 и A_2 числа одинаковых знаков, A_1 и A_3 – противоположных знаков, а $c < 0$.

Будем искать решение $U(x, y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области D , таких, что выполняются условия (7) и (8).

Единственность решения задачи 2. Пусть существует решение исследуемой задачи. Примем обозначения (9) и (10). Поскольку область D^+ в задаче 2 та же, что и в задаче 1, то первое функциональное соотношение между $t_1(x)$ и $n_1(x)$ будет иметь вид (11).

Найдем соотношение между $t_2(x)$ и $n_2(x)$, принесенное на линию $y = 0$ из гиперболиче- ской части D^- области D . Известно [8], что обобщенное решение класса R_2 [9] уравнения (1) с начальными данными Коши

$$U(x, -0) = t_2(x) = \Gamma(1-2b) \left(I_{0+}^{1-2b} T \right) (x) = \int_0^x T(t) (x-t)^{-2b} dt \quad (x \in \bar{J}),$$

$$\lim_{y \rightarrow 0-} U_y(x, y) = [2(1-2b)]^{-2b} \cdot \lim_{(h-x) \rightarrow 0-} (h-x)^{2b} (U_x - U_h) = n_2(x) \quad (x \in J) \quad (19)$$

можно представить в виде

$$U(x, h) = \int_0^x T(t) (h-t)^{-b} (x-t)^{-b} dt + \frac{1}{2 \cos pb} \int_x^h T(t) (h-t)^{-b} (t-x)^{-b} dt - k_0 \int_x^h n_2(t) (h-t)^{-b} (t-x)^{-b} dt, \quad (20)$$

где

$$k_0 = \frac{\Gamma(2-2b)}{\Gamma^2(1-b)} [2(1-2b)]^{2b-1},$$

$T(x)$ и $n_2(x)$ непрерывны в интервале $(0,1)$ и интегрируемы на отрезке $[0,1]$.

Из формулы (20) имеем

$$U[q_0(x)] = I_{0+}^{1-b, 2b-1, b-1} \left[\frac{\Gamma(1-b)}{2 \cos pb} T(x) - k_0 n_2(x) \Gamma(1-b) \right]. \quad (21)$$

Подставляя (21) в (4), применяя ряд свойств обобщенных операторов дробного интегрирования, получаем

$$n_2(x) = K_1 T(x) + C(x), \quad (22)$$

где

$$K_1 = \frac{A_1 \frac{\Gamma(1-b)}{2 \cos pb} + A_2 \Gamma(1-2b)}{A_1 k_0 \Gamma(1-b) - A_3}, \quad K_2 = \frac{1}{A_1 k_0 \Gamma(1-b) - A_3}, \quad C(x) = K_2 \left(I_{0+}^{-1+2b+c, 1-2b, -b} g(t) \right)(x).$$

Или, воспользовавшись (19), имеем

$$n_2(x) = K_1 (D_{0+}^{1-2b} t_2(t))(x) + C(x). \quad (23)$$

При $g(x) \equiv 0$ из (23) получим

$$n_2(x) = K_1 (D_{0+}^{1-2b} t_2(t))(x). \quad (24)$$

Единственность решения задачи вытекает из аналога принципа экстремума А.В. Бицадзе [10].

Пусть $\max_{D^+} U(x, y) = t_2(x_0) > 0$. Тогда, в соответствии с принципом экстремума для операторов дробного дифференцирования [11], из (24) и условия $K_1 > 0$ заключаем, что $n_2(x_0) > 0$. Поскольку $t''(x_0) = 0$, то из (11) заключаем, что $n_1(x_0) = 0$.

Итак, $n_2(x_0) > 0$, а $n_1(x_0) = 0$, что противоречит условию сопряжения (6), откуда и следует единственность решения задачи 2.

Существование решения задачи 2. Для доказательства существования решения исходной задачи сведем ее к интегральному уравнению дробного порядка. Из (19) с помощью второго выражения из (2) имеем

$$T(x) = \frac{1}{\Gamma(1-2b)} \left(I_{0+}^{2b-1, 1-2b, h} t(t) \right)(x). \quad (25)$$

Выражая $t_1(x)$ из соотношения (11), используя первое выражение из (2), получаем

$$t_1(x) = \Gamma(1+a) \left(I_{0+}^{2, -2, h+2b-1} n_1(t) \right)(x).$$

Учитывая (25) и полагая $t_1(x) = t_2(x) = t(x)$ и $n_1(x) = n_2(x) = n(x)$, будем иметь

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(1-2b)} I_{0+}^{2b-1, 1-2b, h} \left(I_{0+}^{2, -2, h+2b-1} n(t) \right)(x) = \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(1-2b)} \left(I_{0+}^{1+2b, -1-2b, h} n(t) \right)(x) = \\ &= \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(1-2b)} \left(I_{0+}^{1+2b} n(t) \right)(x). \end{aligned}$$

Подставляя полученное значение $T(x)$ в (22), приходим к интегральному уравнению дробного порядка

$$n(x) = B_1 \left(I_{0+}^{1+2b} n(t) \right)(x) + C(x), \quad (26)$$

где

$$B_1 = K_1 \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(1-2b)}.$$

Уравнение (26) можно переписать в виде:

$$n(x) = C(x) + \frac{B_1}{\Gamma(1+2b)} \int_0^x n(t) (x-t)^{2b} dt. \quad (27)$$

Далее воспользуемся следующей теоремой (см. [6, с. 123]).

Теорема. Пусть функция $f(x) \in L[a, b]$. Тогда интегральное уравнение

$$u(x) = f(x) + \frac{I}{\Gamma(1/r)} \int_a^x (x-t)^{1/r-1} u(t) dt,$$

где $r > 0$, I – произвольный комплексный параметр, имеет единственное решение

$$u(x) = f(x) + I \int_a^x (x-t)^{1/r-1} E_r [I(x-t)^{1/r}; 1/r] f(t) dt,$$

принадлежащие $L[a, b]$.

Здесь

$$E_r(z; m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(m + k/r)} \equiv E_{1/r, m}(z) \quad (28)$$

– функция типа Миттаг-Леффлера, которая является целой функцией (комплексной) переменной $z = x + iy$ порядка $r > 0$ (см. [6, с. 117]). При $m=1$ функция (28) совпадает с функцией Миттаг-Леффлера $E_{1/r}(z) \equiv E_r(z; 1)$. Поэтому решение уравнения (27) будет иметь вид

$$n(x) = C(x) + A_1 \int_0^x (x-t)^{2b} E_{\frac{1}{1+2b}} [A_1(x-t)^{1+2b}; 1+2b] C(t) dt.$$

Используя явный вид функций $t(x)$ и $n(x)$, можно получить решения задач 1 и 2 в каждой из областей D^+ и D^- , а, значит, и решения задач в заданном классе функций в области D , удовлетворяющие краевым условиям (3), (4) и условиям склеивания (5), (6).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions. // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. Vol. 11. №. 2. P. 135-143.
3. Геккиева С.Х. Об одном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с дробной производной. // Докл. АМАН. 2001. Т. 5. №. 2. С. 18-22.
4. Килбас А.А., Ретин О.А. Задача со смещением для парабола-гиперболического уравнения. // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. №. 6. С. 799-805.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967. 234 с.
6. Джрбабян М.М. Интегральные преобразования и представления функции в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
7. Килбас А.А., Ретин О.А. Аналог задачи Бицадзе-Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной. // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. №. 5. С. 638-644.
8. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.
9. Кароль И.Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллипτικο-гиперболического типа. // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88. №. 2. С. 197-200.
10. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
11. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

Поступила 25.11.2003 г.