Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Огородников, Корректность задачи Коши–Гурса для системы вырождающихся нагруженных гиперболических уравнений в некоторых специальных случаях и ее равносильность задачам с нелокальными краевыми условиями, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 26–38

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:36:06

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ–ГУРСА ДЛЯ СИСТЕМЫ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НАГРУЖЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ И ЕЕ РАВНОСИЛЬНОСТЬ ЗАДАЧАМ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрена система n вырождающихся гиперболических в полуплоскости переменных x и y уравнений с кратными характеристиками. На примерах показано влияние спектра матричных коэффициентов при младших производных на корректность постановки задачи Коши – Гурса. В одном специальном случае для данной, но определенным образом нагруженной системы уравнений обосновано восстановление единственности решения этой задачи и указана связь с ее нелокальной постановкой, содержащей условие типа Бицадзе–Самарского.

Введение. Хорошо известно, что вырождение порядка вносит определенный аспект в теорию краевых задач для уравнений и систем дифференциальных уравнений смешанного типа, в том числе и в вопрос корректности постановки задачи Коши [1, 2]. Не менее известен факт неправопорядка характеристик как носителей данных Дарбу для уравнений с вырождением типа [3–5]. Применительно к системам таких уравнений это обстоятельство приводит к появлению в некоторых специальных случаях особого эффекта, когда в задаче Коши–Гурса с данными на любой граничной характеристике области существования решения задачи Коши отсутствует единственность решения [6–8]. Этой же особенностью будет обладать и система уравнений

$$L_m(\mathbf{u}) \equiv y^{2m+1} \mathbf{u}_{xx} - y \mathbf{u}_{yy} + y^m \mathbf{A} \mathbf{u}_x + \mathbf{B} \mathbf{u}_y = 0, \quad m > 0, \quad (1)$$

имеющая вырождение порядка на линии $y = 0$, при определенном выборе матричных коэффициентов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — постоянные числовые $[n \times n]$ -матрицы, а $\mathbf{u}(x, y) = (u_1; u_2; \dots; u_n)^T$ — искомая вектор-функция.

Система уравнений объединяет довольно широкий класс модельных гиперболических при $y > 0$ уравнений с кратными характеристиками, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа $y = 0$, и которая в характеристических координатах редуцируется к системе уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД). Частные случаи системы уравнений (1) изучались в ряде работ и на некоторые из них мы укажем ниже.

Прежде следует отметить, что одним из эффективных методов решения краевых задач для уравнений гиперболического типа является метод Римана (Римана–Адамара). Обобщение этого метода на системы уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными с кратными характеристиками и достаточно гладкими функционально зависимыми матричными коэффициентами при младших производных приведено в работах А.В. Бицадзе [9, 10], при этом показано, что вопрос о существовании матрицы Римана сводится к нахождению решения системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которое всегда единственно. Таким образом, основная трудность в решении краевой задачи обычно заключается в необходимости построения матрицы Римана в явном виде. Класс уравнений, для которых это удастся сделать, довольно узок и, если теперь говорить об уравнениях с сингулярными коэффициентами или о вырождающихся уравнениях, то, пожалуй, наиболее изученными являются те уравнения, которые в характеристических координатах приводятся к уравнению ЭПД.

В работах А.А. Андреева [11, 12] матрица Римана построена для системы уравнений ЭПД с коммутативными матричными параметрами и исследована задача Коши для этой системы. В работе [13] им же приведена матрица Римана–Адамара и решены задачи Коши–Гурса и Дарбу для систем ЭПД с равными матричными параметрами.

Система двух уравнений вида (1) при $m = 0$, $\mathbf{A} = 0$ была предметом исследований в работе [14], а случай $m > 0$, $\mathbf{A} = 0$ подробно рассмотрен в [15]. В этих работах показано, что корректность постановки задачи Коши и структура ее решения существенно зависят от спектра матрицы $\mathbf{B}$.

Очевидно, случай кратных собственных значений матричных коэффициентов любой системы уравнений представляет наибольший интерес. При реализации метода Римана для системы уравнений с использованием известных представлений о функциях с матричными аргументами [16] возникает необходимость обобщения ряда специальных функций (функций Бесселя, гипергеометрических функций и др.) на матричные значения их параметров, что приводит в

указанном выше случае к появлению новых специальных функций, ассоциируемых с данными. В этой связи следует отметить работы А.А. Андреева [17, 18].

При $m=1$, $B=0$ система уравнений (1) представляет собой хорошо известную систему уравнений Бицадзе–Лыкова. В работе [19] для нее решена задача Коши, а в указанной выше работе [6] именно эта система уравнений использовалась как пример, в котором может возникнуть нарушение единственности решения задачи Коши–Гурса.

В последующих работах с участием автора настоящей работы в основном изучались различные нелокальные постановки краевых задач для системы уравнений (1). Например, в работах [20, 21] рассмотрены случаи $B=0$, $A \neq 0$ и $A+B=E$ при $m=1$. При $m>0$ система уравнений (1) была предметом исследований автора в [22] и, помимо названных уже статей [6, 7], — в работе [23], совместно с А.А. Андреевым, рассмотрен случай $B \neq 0$, $A=0$. И наконец, в работах [24, 25] система уравнений (1) рассматривалась при $m>0$, $A=(m-b)P$ и $B=bE$, где P — инволютивная матрица второго порядка, отличная от $\pm E$, E — единичная матрица, а $b \in \mathbf{R}$, причем в последней из указанных работ выяснялся вопрос о восстановлении единственности решения задачи Коши–Гурса для определенным образом нагруженной системы уравнений.

Настоящая работа является обобщением результатов, полученных автором в работе [25].

Задачи Гурса, Коши и Коши–Гурса в некоторых специальных случаях. Множество постоянных над полем действительных чисел $\mathbf{R}$ матриц порядка n принято обозначать M_n . Пусть матрица $G \in M_n$. Спектр матрицы G будем обозначать $\Lambda(G)$, а ее собственные значения — I_i . Таким образом, $\Lambda(G) = \{I_i\}_{i=1}^n$. Известно [16], что для любой матрицы $G \in M_n$ существует невырожденное преобразование с матрицей T , приводящее G в общем случае над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$ к каноническому виду — нормальной Жордановой форме $J(G) = T^{-1}GT$. Канонический вид матрицы G простой структуры будем обозначать G_I , причем $G_I = \text{diag}\{I_1, I_2, \mathbf{K}, I_n\}$, где $I_i \in \Lambda(G)$, $i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$L_m(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad (2)$$

с оператором $L_m(\mathbf{u})$, определенным формулой (1) и вектором заданных функций $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y) = (f_1; f_2; \mathbf{K}; f_n)^T$ в области Ω , ограниченной отрезком $[0, 1]$ линии $y=0$ вырождения порядка оператора $L_m(\mathbf{u})$ и характеристиками $x=0$ и $h=1$, где

$$x = x - \frac{1}{m+1} y^{m+1} \text{ и } h = x + \frac{1}{m+1} y^{m+1}. \quad (3)$$

Представим для удобства вектор $\mathbf{f}$ в виде $\mathbf{f}(x, y) = y^{B+(m+1)E_n} \mathbf{F}(x, y)$, где E_n — единичная матрица в M_n , а матричная степень независимой переменной y определяется известным образом на спектре матрицы $B+(m+1)E_n$ [16]. В характеристических координатах (3) система уравнений (2) приводится к системе ЭПД

$$\mathbf{U}_{xh} + \frac{1}{2} \frac{mE_n + A - B}{(m+1)(h-x)} \mathbf{U}_x - \frac{1}{2} \frac{mE_n - A - B}{(m+1)(h-x)} \mathbf{U}_h = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{m+1}{2} \right) (h-x) \right]^{\frac{B-mE_n}{m+1}} \Phi(x, h), \quad (4)$$

где $\mathbf{U}(x, h) = \mathbf{u}(x(x, h), y(x, h))$, $\Phi(x, h) = \mathbf{F}(x(x, h), y(x, h))$.

Введем две произвольные матрицы Q , $G \in M_n$ такие, что $A = (m+1)Q$, а $B = mE_n - (m+1)G$. В новых обозначениях система уравнений (4) запишется следующим образом:

$$(h-x)\mathbf{U}_{xh} + \frac{1}{2}(G+Q)\mathbf{U}_x - \frac{1}{2}(G-Q)\mathbf{U}_h = \frac{1}{4}K(G)(h-x)^{E-G} \Phi(x, h), \quad (5)$$

где $K(G) = \left(\frac{2}{m+1} \right)^G$. При условии коммутативности матриц G и Q для этой системы уравнений, используя методику работ [12, 14], нетрудно найти решение задачи Коши

$$\mathbf{U}(x, x) = \boldsymbol{\tau}(x) = (t_1; t_2; \dots; t_n)^T, \quad x \in [0, 1], \quad (6)$$

$$\lim_{h \rightarrow x+0} \left[\frac{m+1}{2} (h-x) \right]^G (\mathbf{U}_h - \mathbf{U}_x) = \mathbf{v}(x) = (n_1; n_2; \dots; n_n)^T, \quad x \in (0, 1). \quad (7)$$

Однако с учетом вида матричных коэффициентов при производных U_x и U_h можно сразу привести простой пример, для которого решение задачи Коши–Гурса с данными на любой из двух характеристике $x=0$ или $h=1$ будет существовать при определенных условиях, но не единственным образом.

Пусть G и Q — две диагональные матрицы, такие что $G = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = (a_i d_{ij})_{i,j=1}^n$, а $Q = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_k, -a_{k+1}, \dots, -a_n\} = \text{diag}\{(a_i d_{ij})_{i,j=1}^k, -(a_i d_{ij})_{i,j=k+1}^n\}$, где d_{ij} — символ Кронекера, а $0 < k < n$. В этом случае система уравнений (5) расщепляется на две подсистемы независимых (несвязанных друг с другом) уравнений ЭПД с одним из параметров, равным нулю:

$$\begin{cases} (h-x) \frac{\partial^2 U_i}{\partial x \partial h} + a_i \frac{\partial U_i}{\partial x} = \frac{1}{4} k(a_i) (h-x)^{1-a_i} \Phi_i(x, h), & i = \overline{1, k}, \\ (h-x) \frac{\partial^2 U_i}{\partial x \partial h} - a_i \frac{\partial U_i}{\partial h} = \frac{1}{4} k(a_i) (h-x)^{1-a_i} \Phi_i(x, h), & i = \overline{k+1, n}, \end{cases} \quad (8)$$

где $k(a_i) = \left(\frac{2}{m+1} \right)^{a_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Решение задачи Коши с условиями (6) и (7) для системы уравнений (8) можно найти, не прибегая к методу Римана, если вначале решить задачу Гурса с данными

$$U(0, h) = U_0(h), \quad U(x, 1) = U_1(x), \quad U_0(1) = U_1(0). \quad (9)$$

Умножая уравнения системы (8) на $(h-x)^{a_i-1}$, ее можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial h} \left[(h-x)^{a_i} \frac{\partial U_i}{\partial x} \right] = \frac{1}{4} k(a_i) \Phi_i(x, h), & i = \overline{1, k}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[(h-x)^{a_i} \frac{\partial U_i}{\partial h} \right] = \frac{1}{4} k(a_i) \Phi_i(x, h), & i = \overline{k+1, n}. \end{cases} \quad (10)$$

Уравнения системы (10) легко интегрируются с учетом условий (9) и, если вектор-функции $U_0(h)$, $U_1(x) \in C[0, 1] \cap C^1(0, 1)$, а $\Lambda(G) \subset (0, 1)$, то регулярное в области Ω решение задачи Гурса (9) в классе функций $U(x, h) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ имеет вид

$$\begin{cases} U(x, h) = U_0(h) + \int_0^x \left(\frac{1-t}{h-t} \right)^a U_1'(t) dt - \frac{1}{4} k(a) \int_0^x \frac{dt}{(h-t)^a} \int_h^1 \Phi(t, s) ds, & i = \overline{1, k}, \\ U(x, h) = U_1(x) - \int_h^1 \left(\frac{s}{s-x} \right)^a U_0'(s) ds - \frac{1}{4} k(a) \int_h^1 \frac{ds}{(s-x)^a} \int_0^x \Phi(t, s) dt, & i = \overline{k+1, n}. \end{cases} \quad (11)$$

Индексы в полученных равенствах (11) для компонент векторов $U(x, h)$, $\Phi(x, h)$ и a опущены.

Переподчиняя полученные решения (11) условиям (6) и (7), после некоторых вычислений найдем

$$\begin{cases} U(x, h) = t(h) + \frac{1}{2} k(a) \int_x^h (h-t)^{-a} \left[v(t) - \frac{1}{2} \int_t^h \Phi(t, s) ds \right] dt, & i = \overline{1, k}, \\ U(x, h) = t(x) + \frac{1}{2} k(a) \int_x^h (s-x)^{-a} \left[v(s) - \frac{1}{2} \int_x^s \Phi(t, s) dt \right] ds, & i = \overline{k+1, n}, \end{cases} \quad (12)$$

где t , v , Φ — суть компоненты соответствующих векторов с индексом i , указанным справа в формулах (12), и $a = a_i$.

Возвращаясь к системе уравнений (2) и независимым переменным x и y , можно утверждать, что решение задачи Коши

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [0, 1], \quad (13)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{-B} u_y(x, y) = v(x, y), \quad x \in (0, 1), \quad (14)$$

в указанном выше частном относительно вида матриц A и B случае и $\Lambda(B) \subset (-1, 0)$ может быть записано в виде суммы $u(x, y) = u^{(1)}(x, y) + u^{(2)}(x, y)$ двух векторов

$\mathbf{u}^{(1)} = (u_1^{(1)}; u_2^{(1)}; \dots; u_k^{(1)}; 0; \dots; 0)^T$ и $\mathbf{u}^{(2)} = (0; 0; \dots; 0; u_{k+1}^{(2)}; \dots; u_n^{(2)})^T$, компоненты которых определяются формулами (12), где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{h}$ выражены через x и y по формулам (3).

Если ввести блочные матрицы $E_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{diag}\{E_k, 0\}$, $E_{n-k} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix} = \text{diag}\{0, E_{n-k}\}$ и распространить выражения для $u_i^{(1)}$ и $u_i^{(2)}$ на все значения $i = \overline{1, n}$, то решение задачи Коши (13), (14) можно записать в виде

$$\mathbf{u}(x, y) = E_k \mathbf{u}^{(1)}(x, y) + E_{n-k} \mathbf{u}^{(2)}(x, y), \quad (15)$$

где $\mathbf{u}^{(1)}(x, y) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{h}) + \frac{1}{2} K(G) \int_x^h (h-t)^{-G} \left[\mathbf{v}(t) - \frac{1}{2} \int_t^h \boldsymbol{\Phi}(t, s) ds \right] dt$,

а $\mathbf{u}^{(2)}(x, y) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} K(G) \int_x^h (s-x)^{-G} \left[\mathbf{v}(s) - \frac{1}{2} \int_x^s \boldsymbol{\Phi}(t, s) dt \right] ds$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть в системе уравнений (2) с правой частью вида $\mathbf{f}(x, y) = y^{B+(m+1)E_n} \mathbf{F}(x, y)$, $\mathbf{F}(x, y) \in C(\overline{\Omega})$, матрицы A и B таковы, что $A = (m+1)Q$, $B = mE_n - (m+1)G$, где $G = (a_i d_{ij})_{i,j=1}^n$, $Q = \text{diag}\{(a_i d_{ij})_{i,j=1}^k, -(a_i d_{ij})_{i,j=k+1}^n\}$, $a_i \in (0, 1)$. Тогда единственное в классе функций $\mathbf{u}(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ решение задачи Коши (13), (14) при $\boldsymbol{\tau}(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ и $\mathbf{v}(x) \in C^2(0, 1) \cap L([0, 1], x^G, (1-x)^G)$ представляется формулой (15).

Теперь обратимся к задаче Коши–Гурса. Задание искомой вектор–функций на характеристиках в характеристических координатах в виде $U(\mathbf{x}, \mathbf{h})|_{x=0} = U(0, \mathbf{h})$ и $U(\mathbf{x}, \mathbf{h})|_{h=1} = U(\mathbf{x}, 1)$ равносильно заданию искомого вектора $\mathbf{u}(x, y)$ в точках

$$\Theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}; \left(\frac{m+1}{2} x \right)^{\frac{1}{m+1}} \right) \text{ и } \Theta_1(x) = \left(\frac{1+x}{2}; \left(\frac{m+1}{2} (1-x) \right)^{\frac{1}{m+1}} \right)$$

пересечения характеристик системы уравнений (1), выходящих из произвольной точки $x \in [0, 1]$, с характеристиками $\mathbf{x} = 0$ и $\mathbf{h} = 1$ соответственно.

Пусть

$$\mathbf{u}[\Theta_0(x)] = \boldsymbol{\varphi}(x), \quad x \in [0, 1], \quad (16)$$

$$\mathbf{u}[\Theta_1(x)] = \boldsymbol{\psi}(x), \quad x \in [0, 1], \quad (17)$$

где $\boldsymbol{\varphi}(x)$, $\boldsymbol{\psi}(x)$ — n -мерные векторы заданных функций.

Легко увидеть, что если решение задачи Коши–Гурса с данными (14) и (16) существует, то оно не единственно.

Действительно, имея цель найти это решение в форме решения задачи Коши, вычислим значение вектора $\mathbf{u}(x, y)$ по формуле (15) в точке $\Theta_0(x)$ ($\mathbf{u}[\Theta_0(x)] = E_k \mathbf{u}^{(1)}[\Theta_0(x)] + E_{n-k} \mathbf{u}^{(2)}[\Theta_0(x)]$) и подчиним его условию (16):

$$\begin{aligned} & E_k \left\{ \boldsymbol{\tau}(x) + \frac{1}{2} K(G) \int_0^x (x-t)^{-G} \left[\mathbf{v}(t) - \frac{1}{2} \int_t^x \boldsymbol{\Phi}(t, s) ds \right] dt \right\} + \\ & + E_{n-k} \left\{ \boldsymbol{\tau}(0) + \frac{1}{2} K(G) \int_0^x s^{-G} \left[\mathbf{v}(s) - \frac{1}{2} \int_0^s \boldsymbol{\Phi}(t, s) dt \right] ds \right\} = \boldsymbol{\varphi}(x). \end{aligned} \quad (18)$$

Равенство (18) равносильно двум системам равенств в покомпонентной записи

$$t(x) + \frac{1}{2} k(a) \int_0^x (x-t)^{-a} \left[n(t) - \frac{1}{2} \int_t^x \Phi(t, s) ds \right] dt = j(x), \quad i = \overline{1, k}, \quad (19)$$

$$t(0) + \frac{1}{2} k(a) \int_0^x s^{-a} \left[n(t) - \frac{1}{2} \int_0^s \Phi(t, s) dt \right] ds = j(x), \quad i = \overline{k+1, n}, \quad (20)$$

где, как и в (12), t, n, Φ — компоненты одноименных векторов с индексом i , указанным справа от формулы и $a = a_i$.

Из формул (19) и (20) хорошо видно, что, во-первых, данные Гурса (16) накладывают ограничения лишь на k первых компонент подлежащего исключению из уравнения (18) вектора $\tau(x)$:

$$t(x) = j(x) - \frac{1}{2}k(a) \int_0^x (x-t)^{-a} \left[n(t) - \frac{1}{2} \int_t^x \Phi(t,s) ds \right] dt, \quad i = \overline{1, k}; \quad (21)$$

во-вторых, для разрешимости задачи (14), (16) необходимо соблюдения равенства

$$\frac{1}{2}k(a) \int_0^x s^{-a} \left[n(s) - \frac{1}{2} \int_0^s \Phi(t,s) dt \right] ds = j(x) - j(0), \quad i = \overline{k+1, n}, \quad (22)$$

и при этом решение задачи с условиями (14) и (16) не единственно, так как соответствующая однородная задача имеет бесчисленное множество нетривиальных решений вида

$$u(x, y) = w \left(x - \frac{1}{m+1} y^{m+1} \right) - w(0), \quad i = \overline{k+1, n}, \quad (23)$$

где $w(x)$ — произвольные функции из класса $C[0,1] \cap C^2(0,1)$.

Дифференцируя равенство (22) по x , получим $n-k$ равенств, связывающих компоненты вектора $v(x)$ с номерами $i = \overline{k+1, n}$ с производными соответствующих компонент вектора $\phi(x)$:

$$n(x) = 2k^{-1}(a)x^a j'(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \Phi(t, x) dt, \quad i = \overline{k+1, n}. \quad (24)$$

Введем вектор-функцию $\mu(x)$, компоненты которой с номерами $k+1, \dots, n$ совпадают с $n(x)$, вычисленной по формуле (24):

$$\mu(x) = 2K^{-1}(G)x^G \phi'(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \Phi(t, x) dt. \quad (25)$$

Заменим $v(s)$ на $\mu(s)$ в выражении для $u^{(2)}(x, y)$ в формуле (15) и выпишем структуру многообразия решений задачи Коши–Гурса с условиями (14), (16). Оно может быть найдено по формуле (15), где на этот раз вектор

$$u^{(1)}(x, y) = \phi(h) - \frac{1}{2}K(G) \int_0^x (h-t)^{-G} \left[v(t) - \frac{1}{2} \int_t^h \Phi(t, s) ds \right] dt \quad (26)$$

вычислен с учетом формулы (21), а вектор

$$u^{(2)}(x, y) = \omega(x) - w(0) + \int_x^h (s-x)^{-G} \left[s^G \phi'(s) + \frac{1}{4}K(G) \int_0^x \Phi(t, s) dt \right] ds \quad (27)$$

— с учетом (23) и (25). Выражения x и h через x и y находятся по формуле (3).

Полученный результат можно сформулировать в следующей теореме.

Теорема 2 (О многообразии решений задачи Коши–Гурса). Пусть выполнены условия теоремы 1 относительно вида матриц A, B, Q, G , спектра $\Lambda(G)$ и вектора $f(x, y)$. Пусть векторы $v(x) \in C^2(0,1) \cap L([0,1], x^G)$ и $\phi(x) \in C[0,1] \cap C^3(0,1)$, причем их произвол ограничен условиями (24). Тогда множество регулярных в Ω решений задачи с условиями (14) и (16) для системы уравнений (2) в классе функций $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ определяется формулами (15), (26) и (27) с произвольной вектор-функцией $\omega(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$.

Аналогичным образом можно рассмотреть задачу с условиями (14) и (17). Нетрудно выпписать многообразие ее решений, которое тоже будет зависеть от произвольной вектор-функции из класса гладкости искомого решения.

В случае произвольных матриц простой структуры могут быть использованы все вышеуказанные построения и конструкции. Однако требование коммутативности матриц является существенным.

Действительно, пусть $A = (m+1)Q$, $B = mE_n - (m+1)G$, причем $G_l = (a_i d_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_i \in \Lambda(G)$, $Q_l = \text{diag}\{(a_i d_{ij})_{i,j=1}^k, -(a_i d_{ij})_{i,j=k+1}^n\}$ и существует такое невырожденное преобразование с $[n \times n]$ -матрицей T , что $T^{-1}GT = G_l$, а $T^{-1}QT = Q_l$. Тогда все сказанное выше относительно системы уравнений (5), решения задачи Коши для нее и неединственности решения задачи Коши–Гурса остается в силе применительно к определенным линейным комбинациям компонент вектора $\mathbf{u}$, а именно, $\mathbf{v}(x, y) = T^{-1}\mathbf{u}(x, y)$. Решение задачи Коши для искомого вектора $\mathbf{u}(x, y)$ должно иметь вид $\mathbf{u}(x, y) = T\mathbf{v}(x, y) = T(E_k \mathbf{v}^{(1)}(x, y) + E_{n-k} \mathbf{v}^{(2)}(x, y)) = TE_k T^{-1}[T\mathbf{v}^{(1)}(x, y)] + TE_{n-k} T^{-1}[T\mathbf{v}^{(2)}(x, y)] = TE_k T^{-1}\mathbf{u}^{(1)}(x, y) + TE_{n-k} T^{-1}\mathbf{u}^{(2)}(x, y)$. Если ввести матрицу $I_k = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_{n-k} \end{pmatrix} = \text{diag}\{E_k, -E_{n-k}\}$, то нетрудно заметить, что $E_k = \frac{1}{2}(E_n + I_k)$, а $E_{n-k} = \frac{1}{2}(E_n - I_k)$. Матрица I_k , очевидно, инволютивна. Но, тогда существует инволютивная матрица $P \in M_n$, связанная с выбранным преобразованием T , такая, что $PI_k T^{-1} = P$, а $T^{-1}PT = I_k$ — ее канонический вид. Значит, $TE_k T^{-1} = \frac{1}{2}(E_n + P)$, $TE_{n-k} T^{-1} = \frac{1}{2}(E_n - P)$ и решение задачи Коши определяется равенством

$$\mathbf{u}(x, y) = \frac{1}{2}(E_n + P)\mathbf{u}^{(1)}(x, y) + \frac{1}{2}(E_n - P)\mathbf{u}^{(2)}(x, y), \quad (28)$$

где $\mathbf{u}^{(1)}(x, y)$, $\mathbf{u}^{(2)}(x, y)$ фактически определены формулами (15).

Корректность задачи Коши–Гурса для системы нагруженных уравнений с оператором $L_m(\mathbf{u})$. Рассмотрим теперь вместо системы уравнений (2) в той же характеристической области Ω систему уравнений следующего вида:

$$L_m(\mathbf{u}) + e y^{B+E} \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u}(x, 0) = 0, \quad (29)$$

где оператор $L_m(\mathbf{u})$ определен в формуле (1), $e > 0$ — произвольное действительное число, а $\mathbf{u}(x, 0)$ — значения искомого вектора, вычисленные при любых x , $y \in \Omega$ в точках $\left(x - \frac{1}{m+1}y^{m+1}; 0\right)$ отрезка $[0, 1]$ линии $y = 0$.

Вновь введем для удобства две (пока произвольные) матрицы Q , $G \in M_n$, связанные с матрицами A и B соотношениями: $A = (m+1)Q$, $B = mE_n - (m+1)G$. Так как вектору $\mathbf{u}(x, 0)$ в характеристических координатах соответствует вектор $\mathbf{U}(x, x)$, $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial y} =$

$= y^m \left(\frac{\partial}{\partial h} - \frac{\partial}{\partial x} \right)$, то $\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u}(x, 0) = -y^m \mathbf{U}_x(x, x) = -\left[\frac{m+1}{2}(h-x) \right]^{m+1} \mathbf{U}(x, x)$, а система уравнений (29) запишется следующим образом:

$$(h-x)\mathbf{U}_{xh} + \frac{1}{2}(G+Q)\mathbf{U}_x - \frac{1}{2}(G-Q)\mathbf{U}_h = \frac{e}{4}K(G)(h-x)^{E_n-G} \mathbf{U}_x(x, x), \quad (30)$$

где $K(G) = \left(\frac{2}{m+1} \right)^G$ в прежних обозначениях.

Пусть далее матрицы $Q = PG$, где P — произвольная инволютивная матрица из M_n , отличная от тривиальных случаев $\pm E_n$. Система уравнений (30) будет иметь вид

$$(h-x)\mathbf{U}_{xh} + \frac{1}{2}(E_n + P)G\mathbf{U}_x - \frac{1}{2}(E_n - P)G\mathbf{U}_h = \frac{e}{4}K(G)(h-x)^{E_n-G} \mathbf{U}_x(x, x), \quad (31)$$

и характер ее дальнейшего изучения существенно зависит от коммутативности или некоммутативности матриц P и G . В качестве еще одного примера потребуем несколько большего, чем просто коммутативность матриц P и G .

Пусть матрица G — есть значение некоторой аналитической функции $w(z)$, определенной на $\Lambda(P)$: $G = w(P)$. Известно [16], что тогда матрицы P и G будут заведомо коммутативны, матрица G будет матрицей простой структуры со спектром $\Lambda(G) = \{a\}_{i=1}^k \cup \{b\}_{i=k+1}^n$, где $a = w(1)$, а $b = w(-1)$. Более того, как нетрудно показать, в этом случае $G = \frac{a-b}{2}P + \frac{a+b}{2}E_n$.

При указанных предположениях о природе матрицы G система уравнений (31) приобретает следующий вид:

$$(h-x)U_{xh} + \frac{a}{2}(E_n + P)U_x - \frac{b}{2}(E_n - P)U_h = \frac{e}{4}K(G)(h-x)^{E_n-G}U_x(x, x). \quad (32)$$

Для нее нетрудно найти решение задачи Коши с условиями (6) и (7), если $a, b \in (0, 1)$. Отметим лишь, что для задачи Коши правая часть системы уравнений (32) — известный в силу (6) вектор. Тем самым для исходной системы уравнений решение задачи Коши с условиями (13) и (14) будет представлено вновь формулой (28), где

$$u^{(1)}(x, y) = \tau(h) + \frac{1}{4}k(a) \left[e\tau(x)(h-x)^{1-a} + \int_x^h \frac{2v(t) - e(1-a)\tau(t)}{(h-t)^a} dt \right], \quad (33)$$

$$u^{(2)}(x, y) = \tau(x) \left[1 + \frac{e}{4}k(b) \frac{(h-x)^{(1-b)}}{1-b} \right] + \frac{1}{4}k(b) \int_x^h \frac{2v(s) - e\tau(s)}{(s-x)^b} ds, \quad (34)$$

$k(s) = \left(\frac{2}{m+1} \right)^s$, а x и h определены в (3).

Покажем, что решение задачи Коши–Гурса для системы уравнений (32) с начальными данными (14) и условием (16) на характеристике $x = 0$ существует и единственно.

Воспользуемся решением задачи Коши (28), где векторы $u^{(1)}(x, y)$ и $u^{(2)}(x, y)$, представленные формулами (33) и (34), содержат неизвестную вектор–функцию $\tau(x) = u(x, 0)$. Вычислим значение вектора $u(x, y)$ в точке $\Theta_0(x)$:

$$u[\Theta_0(x)] = \frac{1}{2}(E_n + P)u^{(1)}[\Theta_0(x)] + \frac{1}{2}(E_n - P)u^{(2)}[\Theta_0(x)], \quad (35)$$

где

$$u^{(1)}[\Theta_0(x)] = \tau(x) + \frac{e}{4}k(a)\tau(0)x^{1-a} + \frac{1}{2}k(a)\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}v(x) - \frac{e}{4}k(a)\Gamma(2-a)D_{0x}^{-(1-a)}\tau(x), \quad (36)$$

$$u^{(2)}[\Theta_0(x)] = \tau(0) \left[1 + \frac{e}{4}k(b) \frac{x^{1-b}}{1-b} \right] + \frac{1}{2}k(b)D_{0x}^{-1}x^{-b}v(x) - \frac{e}{4}k(b)D_{0x}^{-1}x^{-b}\tau(x), \quad (37)$$

D_{0x}^{-s} ($s > 0$) — интеграл дробного порядка Римана–Лиувилля [26], $\Gamma(z)$ — гамма–функция Эйлера [27].

Подчиним выражение (35) для вектора $u[\Theta_0(x)]$ условию (16) и, исключая из полученного равенства вектор $\tau(x)$, найдем решение поставленной задачи в явном виде. Для этого воспользуемся оператором с матрицей $E_n + I_k P$ и некоторыми свойствами инволютивных и идемпотентных матриц.

Выше мы определили матрицу $I_k = \text{diag}\{E_k, -E_{n-k}\}$ как канонический вид произвольной, отличной от $\pm E_n$, инволютивной матрицы P . Действительно, ее спектр $\Lambda(P)$ характеризуется двумя собственными значениями: $I_i = 1$ ($i = \overline{1, k}$) кратности k ($0 < k < n$) и $I_i = -1$ ($i = \overline{k+1, n}$) кратности $n - k$, причем их алгебраические и геометрические кратности совпадают. Соответственно, упорядочивая собственные векторы r_i ($i = \overline{1, n}$) матрицы P , всегда можно построить невырожденное преобразование T так, что $T^{-1}PT = I_k$. Хорошо известно [16], что минимальный многочлен инволютивной матрицы $y(I) = I^2 - 1$. Это сразу следует из ее определения: $P^2 - E_n = 0$. Кроме того, из равенства $E_n - P^2 = (E_n - P)(E_n + P) = 0$ следует, что матрица $E_n + P$ является присоединенной матрицей для $IE - P$ при $I = 1$ и любой ее ненулевой стол-

бец определяет соответствующий собственный вектор матрицы P . Так как $\dim(\ker(E_n + P)) = n - k$, то $\text{rank}(E_n + P) = n - \dim(\ker(E_n + P)) = k$, и можно считать, что первые k столбцов матрицы $E_n + P$ определяют собственные векторы $\mathbf{r}_i$ для $i = \overline{1, k}$, отвечающие собственным значениям $I_i = 1$, а первые k строк — собственные векторы $\mathbf{e}_i$ ($i = \overline{1, k}$) транспонированной матрицы P^T .

Аналогично, из равенства $(E_n + P)(E_n - P) = ((-1)E_n - P)(E_n - P) = 0$ следует, что матрица $E_n - P$ является присоединенной матрицей для $I E_n - P$ при $I = -1$. Так как $\dim(\ker(E_n - P)) = k$, то $\text{rank}(E_n - P) = n - \dim(\ker(E_n - P)) = n - k$, и можно считать, что последние $n - k$ столбцов матрицы $E_n - P$ определяют собственные векторы $\mathbf{r}_i$ для $i = \overline{k+1, n}$, отвечающие собственным значениям $I_i = -1$, а последние $n - k$ строк — собственные векторы $\mathbf{e}_i$, $i = \overline{k+1, n}$ транспонированной матрицы P^T , отвечающие тем же собственным значениям.

Заметим, что матрицы $\frac{1}{2}(E_n + P)$ и $\frac{1}{2}(E_n - P)$, фигурирующие выше в формулах (31), (28) и (35), идемпотентны, а именно, $\left[\frac{1}{2}(E_n + P)\right]^2 = \frac{1}{2}(E_n + P)$, $\left[\frac{1}{2}(E_n - P)\right]^2 = \frac{1}{2}(E_n - P)$. Другой особенностью инволютивных матриц является возможность предъявить преобразующую матрицу T или T^{-1} в терминах самой матрицы P и ее канонического вида I_k . Например, матрица T^{-1} может быть найдена из равенства $T^{-1}P = I_k T^{-1}$. В качестве T^{-1} можно взять, например, матрицу $E_n + I_k P$. Действительно, с одной стороны, $T^{-1}P = (E_n + I_k P)P = P + I_k P^2 = P + I_k$. Но и $I_k T^{-1} = I_k (E_n + I_k P) = I_k + I_k^2 P = I_k + P$. Также можно показать, что в качестве матрицы T может выступать матрица $E_n + P I_k$, однако $E_n + P I_k \neq (E_n + I_k P)^{-1}$. Это связано с тем, что матрица преобразования T определяется неоднозначно. Легко проверить, что, если матрица T обеспечивает преобразование $T^{-1}PT = I_k$, то в этом же качестве могут выступить матрицы $Q = PT$, $Q = P^{-1}T$, $Q = T I_k$, $Q = T I_k^{-1}$.

Нам понадобится лишь одно свойство оператора $E_n + I_k P$, которое сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{f} = (f_1; f_2; \dots; f_n)^T$ — произвольный вектор, матрица $P \in M_n$ и $P^2 = E$ ($P \neq \pm E$). Пусть $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ — базис собственных векторов матрицы P^T . Тогда

$$(E_n + I_k P)\mathbf{f} = (f_1^e; f_2^e; \dots; f_n^e), \quad (38)$$

где $f_i^e = \mathbf{f} \mathbf{e}_i$ ($i = \overline{1, n}$) — скалярное произведение указанных векторов.

Доказательство. Справедливость равенства следует из возможности представления $\mathbf{f} = \frac{1}{2}(E_n + P)\mathbf{f} + \frac{1}{2}(E_n - P)\mathbf{f}$, очевидного, вообще говоря, для любой матрицы $P \in M_n$ и любого вектора $\mathbf{f}$. Однако в условиях леммы мы получим

$$\begin{aligned} (E_n + I_k P)\mathbf{f} &= \frac{1}{2}(E_n + I_k P)(E_n + P)\mathbf{f} + \frac{1}{2}(E_n + I_k P)(E_n - P)\mathbf{f} = \frac{1}{2}(E_n^2 + I_k P E_n + E_n P + I_k P^2)\mathbf{f} + \\ &+ \frac{1}{2}(E_n^2 + I_k P E_n - E_n P - I_k P^2)\mathbf{f} = \frac{1}{2}[(E_n + I_k) + (I_k P + P)]\mathbf{f} + \frac{1}{2}[(E_n - I_k) + (I_k P - P)]\mathbf{f} = \\ &= \frac{1}{2}(E_n + I_k)(E_n + P)\mathbf{f} + \frac{1}{2}(E_n - I_k)(E_n - P)\mathbf{f} = E_k(E_n + P)\mathbf{f} + E_{n-k}(E_n - P)\mathbf{f} = \\ &= (f_1^e; f_2^e; \dots; f_k^e; 0; \dots; 0)^T + (0; \dots; 0; f_{k+1}^e; \dots; f_n^e)^T = (f_1^e; f_2^e; \dots; f_n^e)^T, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Пусть произвольный вектор $\mathbf{u}$ представлен в виде суммы $\frac{1}{2}(E_n + P)\mathbf{v} + \frac{1}{2}(E_n - P)\mathbf{w}$, где $\mathbf{v} = (v_1; v_2; \dots; v_n)^T$; $\mathbf{w} = (w_1; w_2; \dots; w_n)^T$ — некоторые заданные или подлежащие определению векторы. Тогда

$$(E_n + I_k P) \left[\frac{1}{2}(E_n + P)\mathbf{v} + \frac{1}{2}(E_n - P)\mathbf{w} \right] = (\mathbf{v}_1^e; \mathbf{v}_2^e; \dots; \mathbf{v}_k^e; \mathbf{w}_{k+1}^e; \dots; \mathbf{w}_n^e)^T. \quad (39)$$

Вернемся к равенству (35) и применим к левой и правой его частям оператор $E_n + I_k P$. С учетом леммы 1 и следствия из нее приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} t^e(x) - \frac{ek(a)}{4} \Gamma(2-a) D_{0x}^{-(1-a)} t^e(x) = j^e(x) - \frac{ek(a)}{4} t^e(0) x^{1-a} - \frac{k(a)}{2} \Gamma(1-a) D_{0x}^{-(1-a)} n^e(x), & i = \overline{1, k}, \\ \frac{1}{2} k(b) D_{0x}^{-1} x^{-b} n^e(x) - \frac{ek(b)}{4} D_{0x}^{-1} x^{-b} t^e(x) = j^e(x) - t^e(0) \left[1 + \frac{ek(b)}{4} \frac{x^{1-b}}{1-b} \right], & i = \overline{k+1, n}. \end{cases} \quad (40)$$

Так как $\tau(0) = \phi(0)$ по непрерывности, то обозначая $\mathbf{f}(x) = \phi(x) - \frac{e}{4} k(a) \phi(0) x^{1-a} - \frac{1}{2} k(a) \Gamma(1-a) D_{0x}^{-(1-a)} \mathbf{v}(x)$ и дифференцируя по x второе уравнение в (40), получим

$$\begin{cases} t^e(x) - I D_{0x}^{-(1-a)} t^e(x) = f^e(x), & I = \frac{e}{4} k(a) \Gamma(2-a), & i = \overline{1, k}, \\ \frac{1}{2} k(b) x^{-b} n^e(x) - \frac{e}{4} k(b) x^{-b} t^e(x) = (j^e(x))' - \frac{e}{4} k(b) j^e(0) x^{-b}, & i = \overline{k+1, n}. \end{cases} \quad (41)$$

Первая группа уравнений в (41) является уравнениями Абеля второго рода. Их решения имеют вид [28]:

$$t^e(x) = f^e(x) + I \int_0^x (x-t)^{-a} e_{1-a}^{1-a} [I(x-t)^{1-a}] f^e(t) dt, \quad i = \overline{1, k}, \quad (42)$$

где для функция типа Миттаг–Леффлера $E_{a,b}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+b)}$ ($a, b > 0$) [29] принято обозначение $e_a^b(z)$, хорошо согласующиеся с обозначением новых функций $e_{a,m}^{b,d} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(ak+b)\Gamma(d-mk)}$ типа Райта, введенных А.В. Псху в работе [30]. Обычную функцию Миттаг–Леффлера $E_a(z) = E_{a,1}(z) = e_a^1(z)$ будем обозначать $e_a(z)$.

Используем обозначения интегрального оператора с функцией типа Миттаг–Леффлера в ядре [7]

$$E_{ax;l}^{-b,a} f = \int_a^x (x-t)^{b-1} e_a^b [I(x-t)^a] f(t) dt, \quad x \geq a, \quad (43)$$

где $I, a, b \in \mathbf{C}$; $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b > 0$. Определенный на множестве функций $f(x) \in L(a, b)$, $b \in (a; +\infty)$, этот оператор является одним из обобщений оператора дробного интегрирования Римана–Лиувилля в силу очевидного при любом a равенства

$$E_{ax;0}^{-b,a} f = D_{0x}^{-b} f. \quad (44)$$

Вопрос обратимости операторов типа (43) с обобщенной функцией Миттаг–Леффлера в ядре рассматривается в работе Т.Р. Prabhakar [31].

Выражая из второй группы уравнений в (41) $t^e(x)$ для $i = \overline{k+1, n}$ и учитывая (42) для $i = \overline{1, k}$, получим

$$\begin{cases} t^e(x) = f^e(x) + I E_{0x;l}^{-(1-a), 1-a} f^e(x), & i = \overline{1, k}, \\ t^e(x) = j^e(0) - \frac{4x^b}{ek(b)} (j^e(x))' + \frac{2}{e} n^e(x), & i = \overline{k+1, n}, \end{cases}$$

что эквивалентно следующему уравнению относительно $\tau(x)$:

$$(E_n + I_k P) \tau(x) = \left(\dots; [\mathbf{f}(x) + I E_{0x;l}^{-(1-a), 1-a} \mathbf{f}(x)] \cdot \mathbf{e}_i; \dots; \left[\phi(0) - \frac{4x^b}{ek(b)} (\phi^e(x))' + \frac{2}{e} \mathbf{v}(x) \right] \cdot \mathbf{e}_j; \dots \right),$$

$j = \overline{k+1, n}; i = \overline{1, k}$, откуда по лемме 1

$$\tau(x) = \frac{1}{2}(E_n + P) \left[\mathbf{f}(x) + I E_{0x;l}^{-(1-a), 1-a} \mathbf{f}(x) \right] + \frac{1}{2}(E_n - P) \left[\boldsymbol{\varphi}(0) - \frac{4x^b}{ek(b)} (\boldsymbol{\varphi}(x))' + \frac{2}{e} \mathbf{v}(x) \right]. \quad (45)$$

Окончательный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. Пусть $m, e > 0$, $0 < a, b < 1$ — произвольные действительные числа, $P \in M_n$ — инволютивная, отличная от $\pm E_n$ матрица. Пусть в системе уравнений (29) матрицы $A = aE_n + bP$ и $B = (m-b)E_n - aP$, где $a = \frac{1}{2}(m+1)(a-b)$, $b = \frac{1}{2}(m+1)(a+b)$. Тогда единственное в области Ω решение этой системы с начальными данными (14) при $\mathbf{v}(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ и условиями на характеристике (16) с $\boldsymbol{\varphi}(x) \in C^1[0,1] \cap C^3(0,1)$ существует в классе функций $C(\bar{\Omega}) \cap C(\Omega \cup (0,1)) \cap C^2(\Omega)$ и определяется формулой решения задачи Коши (28), (33), (34), где вектор $\tau(x) = \mathbf{u}(x, 0)$ задан формулой (45).

Для доказательства теоремы, следует заметить, что решение задачи Коши (28), (33), (34) удовлетворяет системе (29) и задача поставлена корректно [14]. Следовательно, осталось показать, что значение вектор-функции $\mathbf{u}(x, y)$ на характеристике $x = 0$ действительно совпадает с заданным вектором $\boldsymbol{\varphi}(x)$, если в решении задачи Коши использован вектор $\tau(x)$, вычисленный по формуле (45). Это делается непосредственной подстановкой выражения (45) для $\tau(x)$ в формулы (36), (37), а результатов вычислений — в (35). В процессе вычислений возникают композиции оператора (43) с оператором дробного интегрирования Римана–Лиувилля. Некоторые необходимые для вычислений тождества приведены в следующих леммах.

Лемма 2 (Полугрупповое свойство). Пусть $f(x) \in L(a, b)$; $s > 0$; $k, a, b \in \mathbf{C}$: $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b > 0$. Тогда

$$D_{ax}^{-a} E_{ax;l}^{-b,s} f = E_{ax;l}^{-b,s} D_{ax}^{-a} f = E_{ax;l}^{-(a+b),s} f, \quad (46)$$

Доказательство. С учетом определения дробного интеграла Римана–Лиувилля [26] и определения (43) запишем композицию

$$D_{ax}^{-a} E_{ax;l}^{-b,s} f = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_a^x (x-t)^{a-1} dt \int_a^t (t-s)^{b-1} e_s^b [I(t-s)^s] f(s) ds.$$

Меняя порядок интегрирования и выполняя замену переменных $t = s + (x-s)z$ во внутреннем интеграле, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(a)} \int_a^x f(s) ds \int_s^x (x-t)^{a-1} (t-s)^{b-1} e_s^b [I(t-s)^s] dt = \\ & = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_a^x (x-s)^{a+b-1} f(s) ds \int_0^1 (1-z)^{a-1} z^{b-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[I(x-s)^s z^s]^k}{\Gamma(sk+b)} dz = \\ & = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_a^x (x-s)^{a+b-1} f(s) ds \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[I(x-s)^s z^s]^k}{\Gamma(sk+b)} \int_0^1 (1-z)^{a-1} z^{sk+b-1} dz, \end{aligned}$$

где была использована возможность почленного интегрирования ряда.

Учитывая интегральное представление бета-функции, а также равенство $B(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ [27], находим, что

$$\begin{aligned} D_{ax}^{-a} E_{ax;l}^{-b,s} f &= \int_a^x (x-s)^{a+b-1} f(s) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[I(x-s)^s]^k}{\Gamma(sk+a+b)} ds = \\ &= \int_a^x (x-s)^{a+b-1} e_s^{a+b} [I(x-s)^s] f(s) ds = E_{ax;l}^{-(a+b),s} f. \end{aligned}$$

К такому же результату придем, вычисляя композицию операторов $E_{ax;l}^{-b,s} D_{ax}^{-a} f$, что и доказывает лемму.

Следствие. Имеет место тождество

$$D_{ax}^{-a} E_{ax;l}^{-b,s} D_{ax}^{-g} f = E_{ax;l}^{-(a+b+g),s} f \quad (47)$$

при $s > 0$; $l, a, b, g \in \mathbf{C}$: $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b, \operatorname{Re} g > 0$, для любой функции $f(x) \in L(a, b)$.

Доказательство, с учетом коммутативности операторов D_{ax}^{-a} и $E_{ax;l}^{-b,s}$ и полугруппового свойства интегралов дробного порядка D_{ax}^{-a} и D_{ax}^{-g} [26], очевидно.

Лемма 3. Пусть $f(x) \in L(a, b)$; $s > 0$, l , $a \in \mathbf{C}$: $\operatorname{Re} a > 0$. Тогда

$$D_{ax}^\alpha E_{ax;l}^{-\alpha,s} f = \frac{d}{dx} \int_a^x e_s [\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt. \quad (48)$$

Доказательство. Воспользуемся определением дробной производной Римана–Лиувилля [26]: $D_{ax}^a j = \left(\frac{d}{dx} \right)^n D_{ax}^{-(n-a)} j$ при $a \in (n-1, n)$, $n \in \mathbf{N}$. Согласно лемме 2 имеем $D_{ax}^a E_{ax}^{-a,s} f = \left(\frac{d}{dx} \right)^n D_{ax}^{-(n-a)} E_{ax}^{-a,s} f = \left(\frac{d}{dx} \right)^n E_{ax;l}^{-n,s} f = \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-1} e_s^n [I(x-t)^s] f(t) dt$.

Далее используем возможность дифференцирования под знаком интеграла и применим свойство [28]:

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^m [z^{m-1} e_s^m(z^s)] = z^{m-m-1} e_s^{m-m}(z^s) \quad (1 \leq m < \infty) \quad (49)$$

при $m = n$ и $m = n-1$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x (x-t)^{n-1} e_s^n [I(x-t)^s] f(t) dt &= \frac{d}{dx} \int_a^x \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-1} \{ (x-t)^{n-1} e_s^n [I(x-t)^s] \} f(t) dt = \\ &= \frac{d}{dx} \int_a^x e_s [I(x-t)^s] f(t) dt = \frac{d}{dx} E_{ax;l}^{-1,a} f. \end{aligned}$$

Замечание. Хорошо известна другая, отличная от использованной выше, форма представления решения уравнения Абеля второго рода [26]:

$$j(x) - I D_{ax}^{-a} j(x) = f(x), \quad x > a, \quad a > 0, \quad (50)$$

полученная (при $a = 0$) в работе E. Hille, J.D. Tamarkin [32]:

$$j(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x e_a [I(x-t)^a] f(t) dt.$$

В монографии М.М. Джбрыяна [28] решение интегрального уравнения (50) для $f(x) \in L(a, b)$, $a > 0$ и I — произвольного комплексного параметра указано в виде

$$j(x) = f(x) + I \int_a^x (x-t)^{a-1} e_a^a [I(x-t)^a] f(t) dt. \quad (51)$$

Тогда, если $j(x)$ — решение уравнения (50), то, обозначая интегральный оператор в (51) по формуле (43) и сравнивая (51) с (49), получим тождество

$$D_{ax}^{-a} j = E_{ax;l}^{-a,a} f. \quad (52)$$

Применим к левой и правой части (52) оператор D_{ax}^a и воспользуемся свойством $D_{ax}^a D_{ax}^{-a} j = j(x)$, справедливым для любой функции $j(x) \in L(a, b)$. Тогда по лемме 3

$$j(x) = D_{ax}^a E_{ax;l}^{-a,a} f = \frac{d}{dx} \int_a^x e_a [I(x-t)^a] f(t) dt = \frac{d}{dx} E_{ax}^{-1,a} f. \quad (53)$$

Возвращаясь к теореме 3, заметим, что корректность рассмотренной задачи Коши–Гурса для системы нагруженных дифференциальных уравнений (29) в конечном итоге становится естественным следствием корректности задачи Коши, а так как ее решение найдено в явном виде, то принадлежность искомого вектора $\mathbf{u}(x, y)$ указанному в теореме классу функций проверяется непосредственно.

Рассмотрим вновь равенство (45) с учетом замечания к лемме 3. Для вектора $\mathbf{r}(x)$ получено представление

$$\mathbf{r}(x) = \frac{1}{2} (E_n + P) \frac{d}{dx} E_{0;x;l}^{-1,1-a} \mathbf{f} + \frac{1}{2} (E_n - P) \left[\boldsymbol{\varphi}(0) - \frac{4x^b}{ek(b)} \frac{d}{dx} \boldsymbol{\varphi}(x) + \frac{2}{e} \mathbf{v}(x) \right], \quad (54)$$

где $\mathbf{f}(x) = \boldsymbol{\varphi}(x) - \frac{e}{4} k(a) \boldsymbol{\varphi}(0) x^{1-a} - p D_{0;x}^{-(1-a)} \mathbf{v}(x)$, $p = \frac{1}{2} k(a) \Gamma(1-a)$.

Подставим вектор $\mathbf{f}(x)$ в первое слагаемое (54) и вычислим

$$\frac{d}{dx} E_{0x}^{-1,1-a} x^{1-a} = \frac{d}{dx} \int_0^x t^{1-a} e_{1-a} [I(x-t)^{1-a}] dt.$$

Обозначим временно $1-a=s$, выполним замену переменной интегрирования $x-t=t_1$ и воспользуемся тождеством [28]

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^z (z-t)^{a-1} e_s^m (I t^s) t^{m-1} dt = z^{m+a-1} e_s^{m+a} (I z^s) \quad (m, a > 0). \quad (55)$$

Тогда

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (x-t_1)^s e_s^1 (I t_1^s) dt_1 = \Gamma(1+s) \frac{d}{dx} [x^{1+s} e_s^{2+s} (I x^s)] = \Gamma(2-a) \frac{d}{dx} [x^{2-a} e_{1-a}^{3-a} (I x^{1-a})].$$

Применяя теперь для вычисления производной тождество (49), окончательно найдем

$$\frac{d}{dx} E_{0x}^{-1,1-a} x^{1-a} = \Gamma(2-a) x^{1-a} e_{1-a}^{2-a} (I x^{1-a}). \quad (56)$$

Упростим выражение, применяя лемму 2.

$$\frac{d}{dx} E_{0x;l}^{-1,1-a} D_{0x}^{-(1-a)} \mathbf{v}(x) = \frac{d}{dx} E_{0x;l}^{-2+a,1-a} \mathbf{v}(x) = \frac{d}{dx} D_{0x;l}^{-1} D_{0x;l}^{-1+a,1-a} \mathbf{v}(x) = E_{0x}^{-(1-a),1-a} \mathbf{v}(x). \quad (57)$$

С учетом (56) и (57) явная зависимость вектора $\mathbf{r}(x)$ от заданных условиями задачи вектор-функций $\mathbf{\Phi}(x)$ и $\mathbf{v}(x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x) = & \frac{1}{2} (E_n + P) \left[\frac{d}{dx} E_{0x;l}^{-1,1-a} \mathbf{\Phi}(x) - I \mathbf{\Phi}(0) x^{1-a} e_{1-a}^{2-a} (I x^{1-a}) - p E_{0x}^{-(1-a),1-a} \mathbf{v}(x) \right] + \\ & + \frac{1}{2} (E_n - P) \left[\mathbf{\Phi}(0) - \frac{4x^b}{ek(b)} \frac{d}{dx} \mathbf{\Phi}(x) + \frac{2}{e} \mathbf{v}(x) \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

Если теперь подставить в формулу (58) вместо $\mathbf{\Phi}(x)$ вектор-функцию $\mathbf{u}[\Theta(x)]$, то полученное таким образом равенство

$$\frac{1}{2} (E_n + P) \left(\frac{d}{dx} E_{0x;l}^{-1,1-a} \mathbf{u}[\Theta(x)] \right) - \frac{1}{2} (E_n - P) \left(\frac{4x^b}{ek(b)} \frac{d}{dx} \mathbf{u}[\Theta(x)] \right) = \mathbf{h}(x),$$

где $\mathbf{h}(x) = \frac{1}{2} (E_n + P) [I \mathbf{u}_0 x^{1-a} e_{1-a}^{2-a} (I x^{1-a}) + p E_{0x}^{-(1-a),1-a} \mathbf{v}(x)] - \frac{1}{2} (E_n - P) \left[\mathbf{u}_0 + \frac{2}{e} \mathbf{v}(x) \right] + \mathbf{u}(x, 0)$,

$\mathbf{u}_0 = \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{u}(0, 0)$, можно рассматривать, как некоторое нелокальное условие типа Бицадзе-Самарского, которое вместе с начальными данными (14) формирует нелокальную краевую задачу для системы нагруженных уравнений (29), эквивалентную в смысле разрешимости рассмотренной выше локальной задаче Коши-Гурса, причем ее решение заведомо существует, единственно и определяется формулой решения задачи Коши (28), (33), (34).

В этой связи отметим работу А.М. Нахушева [33], в которой впервые рассмотрен вопрос об эквивалентности локальных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений нелокальным краевым задачам для классических уравнений.

Аналогичным образом можно показать, что для системы уравнений (29) задача Коши-Гурса в области Ω поставлена корректно и в том случае, когда носителем данных является другая характеристика.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бицадзе А.В. К теории одного класса уравнений смешанного типа // Некоторые проблемы математики и механики. М.-Л.: Наука, 1970. С. 112-119.
2. Бицадзе А.В. К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, 1972. С. 47-52.
3. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для гиперболических уравнений // ДАН СССР. 1970. Т. 195, № 4. С. 776-779.
4. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 1. С. 103-108.
5. Нахушев А.М. Критерий единственности решения задачи Дарбу для одного вырождающегося гиперболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16, № 9. С. 1643-1649.
6. Андреев А.А., Огородников Е.Н. О корректности задач Дарбу и Коши-Гурса для одной вырождающейся гиперболической системы // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды восьмой межвуз. конференции. Часть 3. Самара: СамГТУ, 1998. С. 3-7.

7. *Огородников Е.Н.* О некоторых краевых задачах для системы уравнений типа Бицадзе–Лыкова с инволютивной матрицей // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды десятой межвуз. конференции. Часть 3. Самара: СамГТУ, 2000. С. 119–126.
8. *Андреев А.А., Огородников Е.Н.* Некоторые локальные и нелокальные аналоги задачи Коши–Гурса для системы уравнений типа Бицадзе–Лыкова с инволютивной матрицей // Вестник СамГТУ. Серия: физ.-мат. науки. 2002. Вып. 16. С. 19–35.
9. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа // Итоги науки 2. М.: АН СССР. 1959.
10. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных М.: Наука, 1981. 448 с.
11. *Андреев А.А.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений гиперболического типа // Дифференц. уравнения. Сб. трудов матем. кафедр пединст-ов РСФСР. Вып. 16. Рязань: РГПИ, 1980. С. 3–5.
12. *Андреев А.А.* О методе Римана для одной системы уравнений гиперболического типа с кратными характеристиками // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1981. С. 13–16.
13. *Андреев А.А.* Задачи Коши–Гурса и Дарбу для систем уравнений Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД) // Дифференц. уравнения с частными производными. Межвуз. сб. научн. трудов. Куйбышев: КГПИ, 1983. С. 53–57.
14. *Андреев А.А.* Построение элементарных решений и решение задачи Коши для уравнений и систем уравнений гиперболического типа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Куйбышев, 1981. 100 с.
15. *Андреев А.А.* Задача Коши для некоторых вырождающихся гиперболических систем второго и четвертого порядка // Дифференц. и интегральные уравнения. Межвуз. сб. научн. трудов. Куйбышев: КГПИ, 1987. С. 46–57.
16. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 567 с.
17. *Андреев А.А., Килбас А.А.* О некоторых ассоциированных гиперболических функциях // Изв. высш. учеб. заведений. Матем. 1984, № 12. С. 3–12.
18. *Андреев А.А.* О некоторых приложениях ассоциированных гипергеометрических функций // Дифференц. уравнения (матем. физика): Тезисы докл. участников Куйбышевского област. межвуз. научн. совещания-семинара. Куйбышев: КГПИ, 1984. С. 8–9.
19. *Андреев А.А., Сеницкий А.Ю.* О задаче Коши для системы вырождающихся уравнений типа Лыкова // Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. С. 105–107.
20. *Огородников Е.Н.* О корректности некоторых нелокальных краевых задач для системы уравнений Бицадзе–Лыкова с инволютивной матрицей // Матем. моделирование и краевые задачи. Труды девятой межвуз. конференции. Самара: СамГТУ, 1999. С. 97–102.
21. *Андреев А.А., Огородников Е.Н.* Некоторые краевые задачи с условием типа Бицадзе–Самарского для системы уравнений с оператором Бицадзе–Лыкова // Матем. моделирование и краевые задачи. Труды девятой межвуз. конференции. Самара: СамГТУ, 1999. С. 3–11.
22. *Огородников Е.Н.* Нелокальные краевые задачи для одной вырождающейся системы гиперболического типа второго порядка с кратными характеристиками: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Самара, 2000. 148 с.
23. *Андреев А.А., Огородников Е.Н.* Краевая задача со смещением для системы уравнений с вырождением порядка в некоторых специальных случаях // Матем. моделирование и краевые задачи. Труды одиннадцатой межвуз. конференции. Часть 3. Самара: СамГТУ, 2001. С. 3–10.
24. *Андреев А.А., Огородников Е.Н.* О корректности нелокальных аналогов задачи Коши–Гурса для системы уравнений с вырождением порядка в одном специальном случае // Труды математ. центра им. Лобачевского. Т. 11. Проблемы современной математики: Материалы научн. конференции. Казан. матем. общество. Казань: Унипрес, 2001. С. 10–14.
25. *Огородников Е.Н.* Корректность задач Коши–Гурса и их связь с нелокальными краевыми задачами для одной модельной системы вырождающихся нагруженных гиперболических уравнений с инволютивной матрицей // Матем. моделирование и краевые задачи. Труды двенадцатой межвуз. конференции. Часть 3. Самара: СамГТУ, 2002. С. 132–139.
26. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
27. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
28. *Джбриян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
29. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 299 с.
30. *Псху А.В.* Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Докл. Адыгейской (Черкесской) Международной академии наук. 2000. Т. 5, № 1. С. 45–53.
31. *Prabhakar T.R.* A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J. 1971. Vol. 19. P. 7–15.
32. *Hille E., Tamarkin I.D.* On the theory of linear integral equations // Ann. Math. 1930. Vol. 31. P. 479–528.
33. *Нахушев А.М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 92–101.

Поступила 22.03.2004 г.