Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Кубанова, Моделирование нестационарного течения газа в двухфазной среде,
Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2004, выпуск 26, 39–42

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 11:48:25

Приложения дифференциальных уравнений

УДК 532. 534. 539

А.К. Кубанова

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ

Приведено решение нелинейной задачи об истечении газа из пористой среды за поршень, который движется с постоянной скоростью V_0 , для двухфазной среды, в которой газ и твердые частицы закреплены и образуют скелет.

Рассматривается решение нелинейной задачи об истечении газа из пористой среды за поршень, который движется с постоянной скоростью V_0 . Среда двухфазная – газ и твердые частицы закреплены, образуют скелет.

Выведем уравнение движения газа, считая это движение одномерным; движущийся газ – совершенным, не обладающим теплопроводностью. Исследование будем проводить в координатах Лагранжа. Ось координат направим по движению поршня.

Таким образом, движущийся за поршнем газ будет находиться на отрицательной половине оси x . Введем перемещение сечения газа $U = U(x, t)$. В дальнейшем мы будем использовать также обозначения $\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$; $\frac{\partial U}{\partial t} = U_t$. Физическая картина движения имеет вид, представленный на рис.1.

Р и с. 1. Схема течения газа

Область $x = V_0 t$ – область "чистого" газа, прилегающая к поршню (на рис. 1 обозначена цифрой 1). В этой области уравнение движения газа имеет вид [1]:

$$U_{tt} = \frac{a_0^2}{(1 + U_x)^{g+1}} U_{xx},$$

где a_0 – скорость звука в невозмущенном газе.

Область $x = -a_0 t$ – область распространения возмущения в двухфазной среде (на рис. 1. обозначена цифрой 2).

Получим уравнение движения для области (2):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{1}{r_0} \frac{\partial P}{\partial x} - k U_t, r = r_0 (1 + U_x)^{-1}, P = P_0 (r \cdot r_0^{-1})^g;$$

$$r_0 = f_0 r^0; r = f_0 r^0, \quad (1)$$

где k – коэффициент взаимодействия; ρ_0, ρ – приведенные плотности пористой среды (нижний индекс "0" соответствует невозмущенному состоянию), определяемые через пористость среды f_0 и истинную плотность ρ^0 .

Из (1) получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{a_0^2}{(1+U_x)^{g+1}} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - kU_t,$$

где a_0 - скорость звука в двухфазной среде [2], или сокращенно

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2(U_x) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - kU_t. \quad (2)$$

Начальные условия:

$$U_x = U_t = 0 \text{ на } x = -a_0 t. \quad (3)$$

Граничные условия имеют вид

$$U_t = V_0 \text{ при } x = V_0 t \text{ (на поршне)}, \quad (4)$$

U_x - неизвестна.

Поршень находится на оси $0t$. В области 1 и 2 задача решается численно методом характеристик; на плоскости xt имеются два характеристических направления:

$$\frac{dx}{dt} = \pm a(U_x), \quad (5)$$

которые имеют один и тот же вид для областей 2 и 1.

Условия на характеристиках:

для области 2 –

$$dU_t = \pm a(U_x) dU_x - kU_t dt; \quad (6)$$

для области 1 –

$$dU_t = \pm a(U_x) dU_x. \quad (7)$$

Обозначим границу двух сред 1 и 2 через $l(t)$. Начало координат является особой точкой, а именно, точкой пересечения характеристик и точкой разрыва величин U_x и U_t . Значения последних будут равны нулю, если приближаться к началу координат вдоль оси $0x$, и равны соответственно

$$U_t = \frac{2a_0}{(g-1)} \left[1 - (1+U_x)^{\frac{1-g}{2}} \right], \quad U_t = V_0, \quad U_x = \left[1 - \frac{V_0(g-1)}{2a_0} \right]^{\frac{2}{1-g}} - 1, \quad (8)$$

если приближаться к началу по оси $0t$. Действительно, из условия на характеристике (7) для газовой фазы получим

$$U_t = \int_0^{U_x} a(U_x) dU_x = \frac{2a_0}{(g-1)} \left[1 - (U_x + 1)^{\frac{g-1}{2}} \right].$$

Из последнего выражения определим деформацию U_x . Система характеристик, исходящих из одной точки, называется центрированными волнами Римана. В области 2 имеем центрированные волны для газовой фазы, границу которых определим таким образом, что на граничном луче при подходе к точке 0 со стороны оси $0t$ выполняется условие (8). Тангенс угла наклона граничного луча с осью t определится так:

$$a_{cp} = a_0 \left[1 - \frac{V_0(g-1)}{2a_0} \right]^c, \quad c = \frac{g+1}{g-1}. \quad (9)$$

Задаем равномерный шаг ΔL в виде $\Delta L = \frac{a_0 - a_{cp}}{N}$, где N - число "шагов". Шаг выбираем

так, чтобы ΔL составлял примерно 0,5% от a_0 . Определяем соответствующие этому значению деформации и скорости (при подходе к началу координат по лучам):

$$U_{x_{on}} = \left(1 - \frac{\Delta L n}{a_0} \right)^{\frac{2}{g+1}} - 1, \quad U_{t_{on}} = \frac{2a_0}{(g-1)} \left[1 - (1+U_x)^{\frac{1-g}{2}} \right], \quad (10)$$

где $n = 1, 2, 3 \dots N$.

После определения этих величин в точке 0, решается смешанная задача методом характеристик. Границей области, откуда начинаем решение, является прямая $x = -a_0 t$. Этот результат имеет простой физический смысл, а именно: возникающие на поршне возмущения достигают через время $t = -x/a_0$ частицу с координатой $x(x < 0)$. Иначе говоря, возмущение распространяется со скоростью звука a_0 в двухфазной среде.

Таким образом, начальные условия переносятся на характеристику $x = -a_0 t$; $U_x = U_t = 0$ и

дополняются граничными условиями $U_t = V_0$, U_x - неизвестно при $x = 0$.

Изложим основные расчетные соотношения.

Значение параметров на слоях ($m = 1, 2, 3 \dots$) в точках $n = 0$ известны (начальные значения на $x = -a_0 t$). Задаем шаг Δt на оси времени и проводим прямую, параллельную оси Ox до пересечения с $x = -a_0 t$. Получаем узел $(1,0)$, из которого проводим положительную характеристику с угловым коэффициентом, взятым в узле $(1,0)$, до пересечения с лучом ΔL из начала координат 0. Определяем узел $(1, 1)$ и т.д. до узла $(1, N)$.

Последовательность расчетов представлена на рис. 2 приведенными ниже формулами:

$$\begin{aligned} t_{1n} &= [a(U_{x_{1,n-1}}) \cdot t_{1,n-1} - x_{1,n-1}] \times [a(U_{x_{on}}) + a(U_{x_{1,n-1}})]; \\ x_{1n} &= a(U_{x_{on}}) [x_{1,n-1} - a(U_{x_{1,n-1}}) \cdot t_{1,n-1}] \times [a(U_{x_{on}}) + a(U_{x_{1,n-1}})] \quad (n = 1, 2, 3 \dots); \\ a(U_{x_{on}}) &= a_0 (1 + U_{x_{on}})^{\frac{g+1}{2}}; \quad a(U_{x_{1,n-1}}) = a_0 (1 + U_{x_{1,n-1}})^{\frac{g+1}{2}}; \\ B &= U_{t_{on}} (1 - kt_{1n}) + a(U_{x_{on}}) U_{x_{on}}; \quad A = U_{t_{1,n-1}} [1 - k(t_{1n} - t_{1,n-1})] - a(U_{x_{1,n-1}}) U_{x_{1,n-1}}; \\ U_{x_{1n}} &= \frac{B - A}{a(U_{x_{on}}) + a(U_{x_{1,n-1}})}; \quad U_{t_{1n}} = [a(U_{x_{on}}) A + a(U_{x_{1,n-1}}) B] \times [a(U_{x_{on}}) + a(U_{x_{1,n-1}})]^{-1}; \\ U_{t_{1n}}^* &= 0,5(U_{t_{1n}} + U_{t_{1,n-1}}); \quad U_{c_{1n}}^* = 0,5(U_{c_{1,n-1}} - U_{c_{1n}}); \\ t_{1n}^* &= t_{1,n} - t_{1,n-1}; \quad x_{1n}^* = x_{1,n} - x_{1,n-1}; \\ U_{1,n+1} &= -x_{1,n+1}, \quad U_1 = \sum_{n=1}^N U_{1n}. \end{aligned}$$

Начиная со слоев $m = 2, 3$, имеем:

$$\begin{aligned} x_{m,n} - x_{m,n-1} &= -a(U_{x_{m,n-1}})(t_{m,n} - t_{m,n-1}); \\ x_{m,n} - x_{m-1,n} &= -a(U_{x_{m-1,n}})(t_{m,n} - t_{m-1,n}); \\ U_{t_{mn}} - U_{t_{m,n-1}} &= a(U_{x_{m,n-1}}) [U_{x_{mn}} - U_{x_{m,n-1}}] - \\ &- k U_{t_{m,n-1}} (t_{mn} - t_{m,n-1}); \\ f_0 U_{t_{1,n+1}}^{(1)} - V_0 &= a(U_{x_{1,n+2}})(U_{x_{1,n+1}} - U_{x_{1,n+2}}). \end{aligned}$$

Смещение частицы в лагранжевых координатах определяем по формулам:

$$\begin{aligned} dU_t &= a(U_x) dU_x; \quad x_{mn}^* = x_{mn} - x_{m,n-1}; \quad U_{t_{mn}}^* = 0,5(U_{t_{mn}} - U_{t_{m,n-1}}); \quad U_{x_{mn}}^* = 0,5(U_{x_{mn}} - U_{x_{m,n-1}}); \\ U_{mn} &= U_{t_{mn}}^* t_{mn}^* + U_{x_{mn}}^* x_{mn}^*; \quad U_m = \sum_{n=1}^N U_{mn}. \end{aligned}$$

Из приведенных соотношений определяем параметры U_x , U_t , x , t узла (mn) , затем плотность и давление в этом узле по формулам:

$$r_{mn}^0 = r_0^0 (1 + U_{x_{mn}})^{-1}; \quad P_{mn} = P_0 \left(\frac{r_{mn}^0}{r_0^0} \right)^g.$$

На границе раздела пористой среды и "чистого" газа ($x = l(t)$) имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 1) \quad r_1^0 V_1 &= r_2^0 f_0 V_2; \\ 2) \quad r_1^0 V_1 (V_1 - V_2) &= f_0 P_2 - P_1 + P', \quad P' = (1 - f_0)(P_2 - P_1); \\ 3) \quad r_1^0 V_1 \left[\frac{V_1^2}{2} - \frac{V_2^2}{2} + \frac{1}{g-1} \left(\frac{P_1}{r_1^0} - \frac{P_2}{r_2^0} \right) \right] &= f r_2 V_2 - P_1 V_1, \end{aligned} \quad (11)$$

которые дополняются уравнением состояния газов в пористой области, интегралом Римана вдоль центрированной волны и условием для скорости частиц газа на поршне:

$$4) \quad P_2 = P_1 \left(\frac{r_2^0}{r_1^0} \right)^g; \quad 5) \quad V_2 = \frac{2a_0}{g-1} \left[1 - \left(\frac{r_2^0}{r_1^0} \right)^{\frac{g-1}{2}} \right]. \quad (12)$$

Из уравнений (11) и (12) получим следующее выражение:

Р и с. 2. Расчетная схема

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + \frac{g}{g-1} \left[\frac{P_2}{r_1^0(2-f_0)} - \frac{P_2}{r_2^0} - \frac{V_1(V_1 - V_2)}{(2-f_0)} \right] = 0$$

или

$$\frac{V_0^2}{2} - \frac{V_0^2 g}{(2-f_0)(g-1)} + \frac{V_0 g V_2}{(2-f_0)(g-1)} - \frac{V_2^2}{2} + \frac{g V_0 P_0}{f_0(2-f_0)(g-1) r_0^0 V_2} \left(\frac{r_2^0}{r_0^0} \right)^{g-1} - \frac{g P_0}{(g-1) r_0^0} \left(\frac{r_2^0}{r_0^0} \right)^{g-1} = 0. \quad (13)$$

Заменяем отношение плотностей $(r_2^0 / r_0^0)^{g-1}$ через скорость V_2 , которая задается выражением

$$\left[1 - \frac{V_2(g-1)}{2a_0} \right]^2 = \left(\frac{r_2^0}{r_0^0} \right)^{g-1}.$$

Тогда для скорости V_2 имеем кубическое уравнение

$$aV_2^3 + bV_2^2 + cV_2 + d = 0, \quad (14)$$

где a, b, c, d - коэффициенты, зависящие от постоянных $P_0, f_0, \gamma, V_0, \rho_0^0, a_0$:

$$a = - \left(0,5 + \frac{l_4(g-1)^2}{4a_0^2} \right), \quad l_1 = 0,5V_0^2 - \frac{V_0^2 g}{(2-f_0)(g-1)}, \quad b = l_1 + \frac{l_3(g-1)^2}{4a_0^2} + \frac{l_4(g-1)}{a_0},$$

$$l_2 = \frac{V_0 g}{(2-f_0)(g-1)}, \quad c = l_1 - l_4 - \frac{l_3(g-1)}{a_0}, \quad l_3 = \frac{gV_0 P_0(g-1)^{-1}}{f_0 r_0^0(2-f_0)}, \quad d = l_3, \quad l_4 = \frac{gP_0}{(g-1)r_0^0}.$$

Из решения кубического уравнения установим связь между скоростями V_1 и V_2 , затем между плотностями и давлениями на границе раздела двухфазной пористой среды и "чистого" газа.

Для расчета параметров на границе имеем формулы (см. рис. 2):

$$U_{1,n+1} = -x_{1,n+1}; \quad x_{1,n+1} - x_{1,n+2} = -a(U_{x1,n+2})[t_{1,n+1} - t_{1,n+2}]; \quad x_{1,n+1} - x_{1,N} = -a(U_{x1,N})[t_{1,n+1} - t_{1,N}];$$

$$U_{t_{1,n+1}}^{(2)} - U_{t_{1,N}} = a(U_{x_{1,N}}) \times (U_{x_{1,n+1}} - U_{x_{1,N}}) - kU_{t_{1,N}}(t_{1,n+1} - t_{1,N});$$

$$f_0 U_{t_{1,n+1}}^{(1)} - V_0 = a(U_{x_{1,n+2}})(U_{x_{1,n+1}} - U_{x_{1,n+2}}).$$

Для области (1) условия на характеристиках не содержат члена $kU_t dt$ и имеют вид: $dU_t = a(U_x) dU_x$. Из этих формул определяем искомые величины деформации U_x и скоростей U_t . На рис. 3 приведен расчет положения границы $x = l(t)$.

Р и с. 3. Расчетная величина границы $x = l(t)$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рахматулин Х.А. Газовая и волновая динамика. М.: МГУ, 1983. 280 с.
2. Кубанова А.К. О распространении одномерной плоской волны в двухфазной среде. // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван, ЕРГУ. 1987.

Поступила 10.05.2003 г.