Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Заусаев, А. А. Заусаев, А. Г. Ольхин, Численное интегрирование уравнений движения больших планет (Меркурий–Плутон) и Луны с учетом радиолокационных наблюдений, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 43–47

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:38:12

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ БОЛЬШИХ ПЛАНЕТ (МЕРКУРИЙ-ПЛУТОН) И ЛУНЫ С УЧЕТОМ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Проведено численное интегрирование уравнений движения больших планет (Меркурий-Плутон) и Луны на интервале времени с 1950 по 2000 гг. В уравнениях движения Луны от несферичности Земли учитывались лишь зональные гармоники. Результаты вычислений для внутренних планет (Меркурий-Марс) сопоставлены с радиолокационными наблюдениями. Получено вполне удовлетворительное согласие численной теории с результатами наблюдений.

В настоящее время имеется ряд высокоточных численных теорий движения больших планет, согласующихся с радиолокационными наблюдениями [1-4]. Наиболее точной из них является теория планетных и Лунных эфемерид DE405. Однако точные положения планет охватывают лишь интервал времени с 1600 по 2200 гг. В численной теории движения планет и Луны DE406 координаты планет вычислены на интервале времени с 3000 г. до н.э. по 3000 г. н.э. Недостатком, на наш взгляд, данной теории является большой объем внешней памяти (около 200 мегабайт), в которых хранится информация об эфемеридах планет в форме полиномов Чебышева на интервале времени 6000 лет. Целью наших исследований является получение в дальнейшем банка данных координат больших планет на интервале времени порядка 20 и более тысяч лет и применение этого банка данных к исследованию эволюции орбит комет и астероидов.

Точность вычисления элементов орбит комет и астероидов значительно ниже, чем элементов орбит больших планет, поэтому нет необходимости в получении координат планет с той же степенью точности, как в DE405 или DE406. Тем не менее, ошибки в координатах и скоростях больших планет на исследуемом интервале времени не должны быть значительными. Вследствие того, что при исследовании эволюции орбит малых тел Солнечной системы учитываются, в основном, гравитационные взаимодействия, а также релятивистские эффекты, следует оценить величину ошибок, которые могут возникнуть в процессе интегрирования больших планет путем сопоставления координат с радиолокационными наблюдениями.

Радиолокационные наблюдения планет, проведенные как в СССР, так и в США [5-7], позволили значительно уточнить величину астрономической единицы, а также построить численные теории движения внутренних планет и Луны, на два-три порядка превосходящие по точности теории, основанные на оптических наблюдениях.

Радиолокационный метод позволяет измерить топоцентрическое расстояние центра видимого диска планеты и радиальную скорость изменения этого расстояния.

Полагаем, что электромагнитное излучение покинуло передающую антенну в момент t_1 , достигло центра видимого диска планеты в момент t_2 и, отразившись, вернулось на Землю к приемной антенне в момент t_3 (рис. 1). Обозначая векторами $r_1(t_1)$, $r_2(t_2)$ и $r_3(t_3)$ положение передающей антенны, центра масс планеты и приемной антенны, центра масс планеты в соответствующие моменты времени в гелиоцентрической системе координат, получим полное время распространения волн ($\Delta t = t_3 - t_1$) по формуле [7]:

$$\Delta t = \frac{1}{c} [|r_2(t_2) - r_1(t_1)| + |r_3(t_3) - r_2(t_2)| - 2R], \quad (1)$$

где c — скорость света в вакууме, R — радиус поверхности планеты.

Полагая

$$\mathcal{R}_2 = \frac{d}{dt} |r_2(t_2) - r_1(t_1)|, \quad \mathcal{R}_3 = \frac{d}{dt} |r_3(t_3) - r_2(t_2)|,$$

Р и с. 1. Путь падающего (AB) и отраженного (BC) лучей при радиолокации. Вследствие малости угла ABC принято

$$AB \cong |r_2(t_2) - r_1(t_1)| - R,$$

$$BC \cong |r_3(t_3) - r_2(t_2)| - R.$$

определим полное доплеровское смещение частоты сигнала как

$$\Delta f = f_3 - f_1 \cong f_1 \left(-\frac{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3}{c} + \frac{\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_3^2}{c^2} \right), \quad (2)$$

где f_1 - частота начального излучения.

На основе радиолокационных наблюдений как в нашей стране, так и в США сотрудники ИТА РАН г. Санкт-Петербурга составили банк данных радионаблюдений Меркурия, Венеры и Марса [4]. Основные сведения, содержащие результаты измерения времени излучения, времени запаздывания, доплеровского смещения; координаты передающей и приемной антенны были любезно предоставлены нам Г.А.Красинским. На основании имеющихся радиолокационных данных для каждой из планет (Меркурий, Венера, Марс) был создан банк радиолокационных наблюдений.

Геоцентрические координаты приемной и передающей антенны вычисляются по формулам [8]:

$$x_1 = r_0 \cos j' \cos s, \quad y_1 = r_0 \cos j' \sin s, \quad z_1 = r_0 \sin s,$$

где

$$r_0 \sin j' = (s + 0.1568 \cdot 10^{-6} h) \sin j, \quad r_0 \cos j' = (c + 0.1568 \cdot 10^{-6} h) \cos j,$$

$$tg j' = (0.993307 + 0.0011 \cdot 10^{-6} h) tg j, \quad s_m = s_0 + m + m(m+1),$$

$$s_0 = 6^h 40^m 18^s.130 + 8640184^s.635 T' + 0^s.0929 T'^2.$$

Здесь $T' = d'/36525$, $d' = JD(T_0) - JD 2433282.5$, T_0 - всемирное время, I - долгота пункта наблюдения в часовой мере, m - местное среднее время: $m = T_0 + I$, $m = 0.00274379093$.

Для удобства сопоставления данных наблюдений с теоретическими данными время излучения из всемирного переведено в эфемеридное и представлено в юлианских днях. В качестве единицы измерения временной задержки использовалась 1 мкс, при этом имеет место следующее соответствие: $6 \text{ мкс} \approx 1 \text{ км}$.

Построение численной теории движения больших планет можно разбить на ряд самостоятельных этапов: а) определение начальных орбит или начальных данных координат и скоростей планет; б) численное интегрирование уравнений движения; в) сопоставление координат и скоростей планет, полученных из вычислений, с наблюдениями. Начальные данные координат планет были согласованы с данными координат, полученными на основе теории движения больших планет (Меркурий-Нептун), разработанной французским бюро долгот [9], где координаты и скорости вычислялись с помощью полиномов Чебышева. Выбор начального момента интегрирования был обусловлен тем, что вблизи этой даты имеются высокоточные радиолокационные наблюдения Меркурия, Венеры и Марса.

В таблице приведены начальные данные экваториальных координат и скоростей больших планет (Меркурий-Плутон) и Луны на начальный момент интегрирования, приведенные к эпохе 1950.0. Данным значениям координат и скоростей планет соответствуют следующие значения их обратных масс:

Меркурий - 6023600.0;	Сатурн - 3498.5
Венера - 408523.5;	Уран - 22869.0
Земля - 332945.662;	Нептун - 19314.0
Марс - 3098710.0;	Плутон - 135200000.0
Юпитер - 1047.355;	Луна - 27069007.13

В дифференциальных уравнениях движения внутренних планет наряду с ньютоновскими членами учитывались релятивистские эффекты. Гелиоцентрические релятивистские уравнения в матричной форме имеют следующий вид [10]:

$$\ddot{\mathcal{X}} = -k^2(1+m) \frac{X}{r^3} + \sum_{i=1}^n k^2 m_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta^3} - \frac{X_i}{r_i^3} \right) + \frac{k^2}{c^2} \left(2 \frac{k^2}{r^4} X - 2 \frac{\mathcal{X}^2}{r^3} X + 3 \frac{X \mathcal{X}}{r^5} X + 2 \frac{X \mathcal{X}}{r^3} \mathcal{X} \right), \quad (3)$$

где X - матрица-столбец с элементами x, y, z ; X_i - матрица-столбец с элементами x_i, y_i, z_i ; m, x, y, z - масса и гелиоцентрические координаты возмущающей планеты; m_i, x_i, y_i, z_i - массы и гелиоцентрические координаты возмущающих планет; r, Δ_i, r_i - расстояния, вычисляемые по формулам: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\Delta_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$, $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$; c -

скорость света в пустоте; $X^2 = x^2 + y^2 + z^2$; $XX = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ - проекции скорости; время, входящее в уравнение (3), координатное.

В уравнениях движения Луны следует учитывать возмущение от несферичности Земли. Потенциал для Земли вычисляется по следующей формуле [8]:

$$u = \frac{k^2 m}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^a J_n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin j) + \sum_{n=2}^a \sum_{k=1}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n^{(k)}(\sin j) [c_{nk} \cos kl + s_{nk} \sin kl] \right\}, \quad (4)$$

где m - масса Земли; r_0 - средний экваториальный радиус, j, l - широта и долгота соответственно. P_n и $P_n^{(k)}$ - полином и присоединенная функция Лежандра, причем

$$P_n(z) = \frac{1}{2n!} \frac{d^n (z^2 - 1)^n}{dz^n}, \quad P_n^{(k)}(z) = (1 - z^2)^{k/2} \frac{d^k P_n(z)}{dz^k}. \quad (5)$$

Коэффициенты J_n, c_{nk}, s_{nk} зональных и тессеральных гармоник зависят от формы и распределения масс. Численные значения этих коэффициентов до шестнадцатого порядка включительно приведены в работе [11]. Система дифференциальных уравнений (3) с учетом (4), (5) являлась основной при изучении движения больших планет и Луны. Численное интегрирование уравнений движения проведено методом Эверхарта 23 порядка с шагом интегрирования 3 дня [12].

Основной целью при решении данной задачи являлось: получить точные координаты планет и Луны с помощью единого алгоритма, а также согласовать численную теорию движения планет как с радиолокационными наблюдениями, так и с данными BDL, которые, как известно, периодически корректировались на различные моменты времени.

Результаты представления разностей вычисленных и наблюдаемых запаздываний отраженного сигнала показаны на рис. 2-4, где ось абсцисс - время, а ось ординат - расстояние в километрах. Поверхности планет: Меркурия, Венеры и Марса - аппроксимированы сферами с радиусами 2439, 6050 и 3394 км соответственно. Величина астрономической единицы принималась равной 149597875 км, скорость света в вакууме $c=299792,456$ км/с. Ошибки в координатах планет в процессе эволюции могут складываться из погрешностей начальных смещений, неучтенных сил взаимодействия, погрешности метода.

Как видно из рис. 2-4, у Меркурия и Венеры отклонения вычисленных значений запаздывания отраженного сигнала от наблюдаемого на интервале времени 1964-1984 гг. находится в основном в пределах от -40 до +40 км, а для Марса - от -80 до +80 км. Если это расхождение с 1964 по 1970 гг. можно объяснить погрешностями, связанными с точностью радиолокационных наблюдений, то после 1970-го года точность наблюдений значительно возросла. По-видимому, полученные расхождения вычисленных и наблюдаемых запаздываний отраженного сигнала связаны либо с погрешностями начальных смещений в координатах и скоростях, либо с неточностью теории движения Луны, поскольку в процессе численного интегрирования от несферичности Земли учитывались лишь зональные гармоники. В заключение следует отметить, что полученные результаты являются предварительными и будут уточняться с устранением отмеченных недостатков.

Р и с. 3. Венера, время запаздывания, 1964-1986 гг

Р и с. 4. Марс, время запаздывания, 1964-1988 гг.

Прямоугольные координаты и скорости планет и Луны (JD=2438985.20524)

Планеты	Координаты, а.е.		
	x	y	z
Меркурий	0.276782484324	-0.266310923043	-0.171054299101
Венера	-0.556233837151	-0.433477751614	-0.160197180274
Земля	0.770853666014	-0.603168291797	-0.261560397747
Луна	0.773020767753	-0.604552503210	-0.262407129501
Марс	-0.705414981930	-1.228088178385	-0.544766502473
Юпитер	1.315251047781	4.515557687907	1.905038796205
Сатурн	9.245711130382	-2.499274047073	-1.433026177260
Уран	-17.635147608060	4.333491971666	2.147945785814
Нептун	-19.889669767840	-21.351321821290	-8.245616118940
Плутон	-26.231756160300	20.561529778100	14.443690294800

Планеты	Скорости, а.е./сутки * 100		
	$\frac{dx}{dt}$	$\frac{dy}{dt}$	$\frac{dz}{dt}$
Меркурий	1.548861897091	1.832079085761	0.821989341228
Венера	1.277015710772	-1.398792934761	-0.710976610121
Земля	1.087920376471	1.194908746617	0.518183941944
Луна	1.120669335550	1.237479538506	0.535092025352
Марс	1.293747728378	-0.470640434995	-0.250769890492
Юпитер	-0.737746303257	0.206046599656	0.106426463933
Сатурн	0.133676565283	0.494197114637	0.198555281780
Уран	-0.107650915515	-0.364505590120	-0.158192143258
Нептун	0.234294794744	-0.186442474920	-0.082268481545
Плутон	0.131572184319	-0.261983661854	-0.042705125436

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Standish E.M.* The observational basis for JPL'S DE200 the planetary ephemerides of the Astronomical Almanac // *Astronom Astrophys.* 1990. 233. P. 252-271.
2. *Standish E.M., Newhall X.X., Williams J.G. and Folkner W.E.* JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE403/LE403 // *JPL IOM.* 314. 1995. P. 10-127.
3. *Standish E.M.* JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE403/LE403 // *JPL IOM.* 312. 1998. P. 1-18.
4. *Красинский Г.А., Питьева Е.В., Свеишиков М.Л., Свеишикова Е.С.* Уточнение эфемерид внутренних планет и Луны по радиолокационным, лазерным и меридианным измерениям 1961-1980 гг. // *Бюлл. ИТА.* XV. №3(166). 1989. С. 145-164.
5. *Александров Ю.Н., Кузнецов Б.Н., Петров Г.М., Ржигза О.Н.* Методика радиолокационных астрономических наблюдений. // *Астрон. Журнал.* Т.49, 1972, с. 175-185.
6. *Кислик М.Д., Комока Ю.В., акад. Котельников В.А., Петров В.Ф.* Определение орбит Земли и Венеры, астрономической единицы и радиуса Венеры на основе радиолокационных наблюдений Венеры в 1962-1977 гг. // *ДАН.* 241. №5. 1978. С. 1046-1049.
7. *Котельников В.А. и др.* Результаты измерений времени запаздывания и доплеровской поправки, полученные в радиолокационных наблюдениях Венеры в 1962, 1964, 1969, 1970 и 1972 гг. // *Астрон. Журнал.* Т. 50. Вып. 5. 1973. С.836-848.
8. *Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребенников Е.А., Рябов Ю.А.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука. 1979. 584 с.
9. *Dretagnon P.* Theorie du mouvement de l'ensemble des planets solution VSOP82 // *Astronom Astrophys.* 1990. 114. P. 278-288.
10. *Брумберг В.А.* Релятивистская небесная механика. М.: Наука. 1972. 383 с.
11. *Грушинский Н.П.* Основы гравиметрии. М.: Наука. 1983. 351 с.
12. *Everhart E.* Implist single methods for integrating orbits // *Central Mechanics.* 1974. 10. P. 35-55.

Поступила 25.11.2003 г.