Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Павлов, В. С. Бородин, Нутационные автопараметрические колебания вертикального ротора при обкатывании статора, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 48–51

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu176>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 10:06:50

Исследована задача о качении статически несбалансированного двухопорного вертикального ротора в режиме обкатывания внутренней поверхности статора. Найдены границы устойчивости режима и проведен численный анализ уравнений движения ротора. Построены амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики.

Рассматривается качение статически несбалансированного двухопорного вертикального ротора, моделируемого тонким неоднородным диском на жестком валу, подвешенного в опорах системой горизонтальных пружин с жесткостями $C_{1a}, C_{1b}, C_{2a}, C_{2b}$, создающих упругое поле, вращающееся вместе с ротором. Вертикальное смещение ротора стеснено вертикальной пружиной с жесткостью C_z . Влияние внешнего трения учтено введением в опоры диссипативных сил с неполной диссипацией. Считаем, что при равновесии ротора диск касается цилиндра и, вообще говоря, отклоняется от оси цилиндра. Движение ротора происходит вне связи с двигателем, по инерции. Такой характер движения ротора может соответствовать аварийному режиму.

Р и с. 1. Схема качения ротора

Движение ротора отнесено к неподвижной системе координат OXYZ (рис. 1). Вертикальная ось z совмещена с осью e_3 , вращающегося репера e_1, e_2, e_3 , ось e_2 которого лежит в одной вертикальной плоскости с точкой D . Эта точка выбрана за начало полуподвижной системы e'_1, e'_2, e'_3 . Ось e'_2 проходит через геометрический центр диска и точку D , а e'_1 — по касательной к диску в точке D и направлена в сторону возрастания угла собственного вращения j диска. С центром масс диска совмещено начало жестко связанных с диском осей xyz . За обобщенные координаты приняты g, z , следящие за точкой касания, и углы Резаля a, b и j .

Задача в такой постановке приводит к трем динамическим нелинейным уравнениям движения и двум линейным по скоростям уравнениям негोलомонных связей [1]. Важным представляется анализ режима движения ротора, когда траектория точки касания лежит в плоскости параллельной основанию. В этом случае уравнения связей становятся интегрируемыми. Удерживая в уравнениях первые слагаемые разложения функций в ряды Тейлора относительно нулевых значений переменных, положим, для полноты исследования, что зависимость силы нелинейной упругой связи от перемещения в плоскости угла β представлена функцией $f(b) = g_3 b^3 + g_5 b^5$. Тогда система уравнений, описывающих движение ротора в окрестности локального минимума потенциальной энергии, определенной нулевыми значениями обобщенных координат принимает вид

$$\ddot{b} + w^2(j) b = -n_1 z + e f_1(b, \dot{b}, \ddot{b}, j, \dot{j}) + e^2 \dots, \ddot{j} = 0, \dot{z} = 0. \quad (1)$$

Здесь $w(j) = \sqrt{[0.8(\frac{C_{22}}{Mr^2} - \frac{r}{R} \dot{j}^2)]}$; M — масса диска ротора; r — радиус диска; R — радиус цилиндра-статора; $e = \frac{e}{r}$, e — эксцентриситет диска; $n_1 = 0.8 \frac{C_{23}}{Mr^2}$;

$$f_1(b, \dot{b}, \ddot{b}, j, \dot{j}) = 1.6(\ddot{b} \cos j - \dot{j} \dot{b} \sin j - \frac{r}{2R} \dot{j}^2 b \cos j - k_1 \dot{b} - g_3 b^3 - g_5 b^5); \quad k_1 = 0.8 \frac{n}{Mr^2};$$

n - коэффициент внешнего трения; $C_{22} = C_{1b}L_1^2 + C_{2b}L_2^2$, $C_{23} = C_z r, L_1, L_2$ - расстояния от опор до точки крепления диска. Как следует из (1) движение ротора сопровождается смешанными вынужденно автопараметрическими колебаниями, обусловленными статической неуравновешенностью и наличием слагаемого $\frac{r}{2R} \dot{j}^2 b \cos j$, вносящего параметрическое возмущение.

Характерна зависимость собственной частоты системы ротор упруго демпфирующие опоры от частоты вращения ротора, представленная на рис. 2. Первое уравнение (1) можно рассматривать как математическую модель маятника с вибрирующей верхней точкой подвеса, а при $w < 0$, как модель колебания обращенного маятника в поле центробежных сил инерции. Интегралом третьего уравнения является константа. Полагаем ее равной нулю. Наличие ненулевого члена с постоянным значением координаты z не повлияет на характер изменения амплитуды и фазы колебаний. Это приводит лишь к уводу центра колебаний, вследствие несимметричности функции $b(a, Y)$.

Р и с. 2. Зависимость собственной частоты системы от частоты вращения

Такое заключение нельзя считать очевидным, если $\dot{j} = W \neq const$. Предполагая, что частота j медленно изменяется в течение периода и что расстройка частот $w-p$ охватывает как резонансную зону, так и зоны подходов к резонансу, будем искать решение системы (1) в виде

$$b = a \cos \Psi, \dot{b} = -ap \sin \Psi, \dot{j} = \Omega, (\Psi = pt + x). \quad (2)$$

Здесь W - порождающее решение второго уравнения соответствующего системе (1). Неизвестная частота p в выражении полной фазы Y определяется, исходя из анализа фаз комбинационных частот функции $f_1(b, \dot{b}, \ddot{b}, j, \dot{j})$, стоящей под знаком интегралов [2]:

$$\int_0^{2p} \left[\frac{r}{R} \Omega^2 \cos \Psi \cos \frac{\Omega}{p} (\Psi - x) - 2w\Omega \sin \Psi \sin \frac{\Omega}{p} (\Psi - x) \right] \sin \Psi d\Psi;$$

$$\int_0^{2p} \left[\frac{r}{R} \Omega^2 \cos \Psi \cos \frac{\Omega}{p} (\Psi - x) - 2w\Omega \sin \Psi \sin \frac{\Omega}{p} (\Psi - x) \right] \cos \Psi d\Psi.$$

После преобразования произведения косинусов и синусов получаем подынтегральные выражения, содержащие тригонометрические функции с фазами $(2m \frac{W}{p} Y \pm \frac{W}{p} x)$. Отсюда

следует, что при отношении $\frac{W}{p}$ равному целому числу, для обнаружения синхронного резонанса в первом приближении, необходимо выполнение равенства $W = 2p$. Следуя методу возмущений, амплитуду a , фазы x и угловую скорость W определим из системы уравнений

$$\frac{da}{dt} = eA_1(a, x, W), \quad \frac{dx}{dt} = w - p + eB_1(a, x, W), \quad \frac{dW}{dt} = eC_1(a, W),$$

где функции A_1, B_1 находятся как частные, периодические по x решения уравнений

$$(w - p)a \frac{\partial B_1}{\partial x} + 2wA_1 = -\frac{1}{p} \int_0^{2p} [F_1(a \cos \Psi, -ap \sin \Psi, \Omega) + F_2(a \cos \Psi, \frac{\Omega}{p} (\Psi - x))] \sin \Psi d\Psi;$$

$$(w - p)a \frac{\partial A_1}{\partial x} - 2awB_1 = \frac{1}{p} \int_0^{2p} [F_1(a \cos \Psi, -ap \sin \Psi, \Omega) + F_2(a \cos \Psi, \frac{\Omega}{p} (\Psi - x))] \cos \Psi d\Psi;$$

$$C_1 = \frac{W^2}{2p} \int_0^{2p} \sin \frac{W}{p} (Y - x) dY. \text{ Здесь } F_1(a \cos \Psi, -ap \sin \Psi, \Omega) = -k_1 \dot{b} - g_3 b^3 - g_5 b^5;$$

$$F_2(a \cos \Psi, \frac{\Omega}{p} (\Psi - x)) = \ddot{b} \cos j - \dot{j} \dot{b} \sin j - \frac{r}{2R} \dot{j}^2 b \cos j.$$

Проводя усреднение при $g_5 = 0$ по быстрой фазе y , запишем амплитудно-фазовые уравнения в явном виде:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{n\Omega a}{5Mr^2w} - \frac{\Omega a}{10} \left(1 - \frac{2r}{R}\right) \sin 2x; \quad \frac{dx}{dt} = w - \frac{\Omega}{2} + \frac{3ga^2}{10w} - \frac{\Omega}{10} \left(1 - \frac{2r}{R}\right) \cos 2x; \quad \frac{d\Omega}{dt} = 0. \quad (3)$$

Слагаемое с гармонической составляющей вызывает субгармонические колебания, источником которых является, кроме нестационарной силы $\frac{r}{R} \dot{j}^2 b \cos j$, диссипативная сила $2\dot{j} \dot{b} \sin j$ и нестационарная сила инерции $\ddot{b} \cos j$.

Первые слагаемые в правых частях (3) моделируют автоколебательный процесс. Анализ этой системы проведен при следующих численных данных, заимствованных из [3]

$$C_{1a} = C_{1b} = C_{2a} = C_{2b} = 3260 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^{-1}, \quad L_1 = 21 \text{ см}, L_2 = 18.9 \text{ см}, \quad C_z = 10000 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^{-1}, \\ R = 9.99 \text{ см}, R = 10 \text{ см}, M = 7.55 \cdot 10^{-3} \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^{-1}, n = 0.5 \text{ кгс} \cdot \text{см} \cdot \text{с}, g_3 = 0.2 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-3}.$$

В соответствии с (3) найдем уравнения стационарных амплитуд и фаз субгармонических колебаний центра масс ротора:

$$a^4 + \frac{20}{3} \frac{w}{g} \left(w - \frac{\Omega}{2}\right) a^2 + \frac{4}{9} \frac{n^2 \Omega^2}{M^2 r^4 g^2} + \frac{100}{9} \frac{w^2}{g^2} \left(w - \frac{\Omega}{2}\right)^2 - \frac{w^2 \Omega^2}{10g^2} \left(1 - \frac{2r}{R}\right)^2 = 0; \\ \text{tg } 2x = -\frac{n\Omega}{5Mr^2w \left(w - \frac{\Omega}{2} + \frac{3}{10} \frac{g}{w} a^2\right)}; \quad \sin 2x = -\frac{2nR}{Mr^2w(R - 2r)}. \quad (4)$$

С точностью до $e \gg w - \frac{\Omega}{2}$ имеем

$$a^2 = \frac{10}{3g} \left[\frac{\Omega^2}{4} - w^2 \pm \frac{0.2}{Mr^2} \sqrt{M^2 r^4 w^4 \left(1 - \frac{2r}{R}\right)^2 - 4n^2 w^2} \right], \quad \text{tg } 2x = -\frac{2n\Omega}{3Mr^2 g a^2}.$$

Граница зоны синхронизации находится в интервале

$$w^2 - \frac{0.2}{Mr^2} \sqrt{M^2 r^4 w^4 \left(1 - \frac{2r}{R}\right)^2 - 4n^2 w^2} < \left(\frac{\Omega}{2}\right) < w^2 + \frac{0.2}{Mr^2} \sqrt{M^2 r^4 w^4 \left(1 - \frac{2r}{R}\right)^2 - 4n^2 w^2}.$$

Ширина резонансной зоны, в которой положение равновесия $b = 0$ оказывается неустойчивым и в системе самовозбуждаются колебания, равна

$$\Delta = \frac{0.4}{Mr^2} \sqrt{M^2 r^4 w^4 \left(1 - \frac{2r}{R}\right)^2 - 4n^2 w^2}.$$

На рис. 4 приведены результаты численного анализа переходного режима колебаний как в непосредственной близости к резонансной зоне, когда расстройка частот $2w - W \neq 0$, так и в самой зоне резонанса. Нутационные колебания носят симметричный характер, происходящие с постоянной фазой. Амплитуда ограничена и стремится к фиксированному значению, т.е. существует устойчивый предельный цикл. Для анализа устойчивостью стационарного режима, т.е. постоянных решений при x_0 образуем уравнения в вариациях, которые приводят к двум

условиям устойчивости: $-\frac{2n}{Mr^2 w^2} < 0$, $M^2 r^4 w^2 \left(1 - \frac{2r}{R}\right)^2 > 4n^2$. Эти условия будут выполнены,

если $w^2 = \frac{C_{22}}{Mr^2} - \frac{r}{R} \Omega^2 > 0$. По соотношениям (4) построены амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики (рис. 3).

Из рис. 3 следует, что существует пороговое значение угловой скорости вращения ротора, при которых наступает резонанс.

Р и с. 3. Амплитудно-частотные (а) и фазово-частотные характеристики (б)

Р и с. 4. Численный анализ переходного режима:
а – угол нутации; б – угол g ; в – угол прецессии;
г – фазовая плоскость по амплитуде колебаний ротора

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. А.А. Алифов, К.В. Фролов. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. М.: Наука, 1985. 327с.
2. Кельзон А.С., Журавлев Ю.Н., Январев Н.В. Расчет и конструирование роторных машин. Ленинград: Машиностроение, 1977, 287с.
3. Павлов Г.В., Бородин В.С., Вронская Е.С. Динамика вертикального несбалансированного ротора, имеющего точку касания со статором // Труды международного форума по проблемам науки, техники и образования. М., 2001. С 14-16.

Поступила 10.03.2003 г.