Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Трубников, В. В. Юргелас, обобщенное неравенство Берлинга–Ханнера,
Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2004, выпуск 26, 52–54

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu177>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:22:45

Математический анализ

УДК 517.982

Ю.В. Трубников, В.В. Юргелас

ОБОБЩЕННОЕ НЕРАВЕНСТВО БЕРЛИНГА – ХАННЕРА

Получено обобщение классического неравенства Берлинга – Ханнера на случай произвольного (конечного) числа слагаемых пространства l_p .

Неравенство Берлинга – Ханнера – (ВН) – неравенство, впервые обоснованное в работе О. Ханнера [1] в форме

$$\|x + y\|^p \leq (\|x\| + \|y\|)^p + \|\|x\| - \|y\|\|^p \quad (1)$$

для произвольной пары элементов $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $y = (y_1, y_2, \dots)$ лебегова пространства последовательностей l_p ($p \geq 2$) стало впоследствии одним из важных инструментов нелинейного анализа. В частности, оно играет принципиальную роль при изучении природы некоторых итерационных процессов построения решений уравнений с монотонными и аккретивными операторами [2,3], исследования задачи о наилучшем приближении [4] и ряде других вопросов.

1. (ВН) – неравенство для комплексных чисел. Обозначим через K_r совокупность всех r - местных наборов $e = (e_1, e_2, \dots, e_r)$, в которых каждая из «координат» e_j ($2 \leq j \leq r$) может принимать лишь одно из двух значений: 1 или -1, а $e_1 = 1$. Через $\langle e, z \rangle$ обозначим «произведение» элемента $e \in K_r$ на вектор $z = (z_1, \dots, z_r) \in \mathbb{C}^r$, $z_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq r$ ($\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел):

$$\langle e, z \rangle = \sum_{1 \leq j \leq r} e_j z_j.$$

Введем кроме того обозначения: $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_r)$, $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_r)$, $|z| = (|z_1|, \dots, |z_r|)$.

Теорема 1. Для произвольного $z \in \mathbb{C}^r$ и $p \geq 2$ справедливо неравенство

$$\sum_{e \in K_r} |\langle e, z \rangle|^p = \sum_{e \in K_r} |\langle e, |z| \rangle|^p. \quad (2)$$

Доказательство. Преобразуем выражение $|\langle e, z \rangle|^p$:

$$\begin{aligned} |\langle e, z \rangle|^p &= \left(|\langle e, z \rangle|^2 \right)^{\frac{p}{2}} = \left(\langle e, \operatorname{Re} z \rangle^2 + \langle e, \operatorname{Im} z \rangle^2 \right)^{\frac{p}{2}} = \left(\sum_{1 \leq j \leq r} |z_j|^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq r} e_j e_k (\operatorname{Re} z_j \operatorname{Re} z_k + \operatorname{Im} z_j \operatorname{Im} z_k) \right)^{\frac{p}{2}} = \\ &= \left(\sum_{1 \leq j \leq r} |z_j|^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq r} e_j e_k |z_j| |z_k| \cos j_{jk} \right)^{\frac{p}{2}}. \end{aligned}$$

Здесь

$$j_{jk} = \arccos \frac{\operatorname{Re} z_j \operatorname{Re} z_k + \operatorname{Im} z_j \operatorname{Im} z_k}{|z_j| |z_k|}, \quad 1 \leq j < k \leq r.$$

Таким образом, для произвольного $z \in \mathbb{C}^r$ имеем

$$\sum_{e \in K_r} |\langle e, z \rangle|^p = \sum_{e \in K_r} \left(\sum_{1 \leq j < k \leq r} |z_j|^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq r} e_j e_k |z_j| |z_k| \cos j_{jk} \right)^{\frac{p}{2}}. \quad (3)$$

Покажем, что правая часть в (3) принимает наибольшее значение при выполнении условий

$$\cos j_{jk} = 1, 1 \leq j < k \leq r. \quad (4)$$

С этой целью рассмотрим одну из частных производных правой части в (3) по переменным $\cos j_{jk}$. Пусть, например, $\cos j_{12} \equiv t$, тогда правая часть в (3) может быть записана в виде

$$\sum_{e \in K_r} (F(e) + 2|z_1||z_2|e_1e_2t)^{\frac{p}{2}}. \quad (5)$$

Поскольку в половине наборов из K_r $e_1e_2 = 1$, а в другой половине $e_1e_2 = -1$, то выражение в (5) будет состоять из слагаемых вида

$$(F(e) + 2|z_1||z_2|t)^{\frac{p}{2}} \text{ и } (F(e) - 2|z_1||z_2|t)^{\frac{p}{2}}, \quad (6)$$

а, значит,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left((F(e) + 2|z_1||z_2|t)^{\frac{p}{2}} + (F(e) - 2|z_1||z_2|t)^{\frac{p}{2}} \right) = \\ & = p|z_1||z_2| \left((F(e) + 2|z_1||z_2|t)^{\frac{p}{2}-1} - (F(e) - 2|z_1||z_2|t)^{\frac{p}{2}-1} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

при $t \in [0, 1]$ (в силу симметрии слагаемых вида (6) без ограничения общности можно считать, что $0 \leq t \leq 1$). Таким образом, все частные производные по косинусам неотрицательны. И так как при выполнении условий (4) выражение (5) совпадает с правой частью неравенства (2), то требуемое доказано.

2. Полискалярное произведение и (ВН) – неравенство в l_p . Для доказательства основного результата нам понадобится одно вспомогательное неравенство из [5] (см. также [6]).

Пусть имеется набор из r комплексных лебеговых протранств последовательностей $l_{p_1}, l_{p_2}, \dots, l_{p_r}$ ($p_k \geq 1, 1 \leq k \leq r$) и произвольный набор их представителей $I_1, I_2, \dots, I_r$, так что $I_k = (I_1^{(k)}, I_2^{(k)}, \dots) \in l_{p_k}$ и

$$\|I_k\|_{p_k} \equiv \left(\sum_{j \geq 1} |I_j^{(k)}|^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} < +\infty, 1 \leq k \leq r. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение величину

$$\sum_{j \geq 1} I_j^{(1)} I_j^{(2)} \dots I_j^{(r)}$$

- полискалярное произведение векторов $I_k \in l_{p_k}, 1 \leq k \leq r$.

Лемма 1[5]. Если числа $p_1, p_2, \dots, p_r$ таковы, что $p_k > 1, 1 \leq k \leq r$ и

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_r} = 1,$$

то полискалярное произведение векторов $|I_k| = (|I_1^{(k)}|, |I_2^{(k)}|, \dots)$ допускает оценку

$$\sum_{j \geq 1} |I_j^{(1)} I_j^{(2)} \dots I_j^{(r)}| \leq \|I_1\|_{p_1} \|I_2\|_{p_2} \dots \|I_r\|_{p_r}. \quad (8)$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Для произвольного набора векторов $z = (z_1, \dots, z_r)$ пространства l_p с четным $p \geq 2$ ($z_j \in l_p, 1 \leq j \leq r$) справедливо неравенство

$$\sum_{e \in K_r} |\langle e, z \rangle|^p \leq \sum_{e \in K_r} |\langle e, \|z\| \rangle|^p, \quad (9)$$

где $\langle e, z \rangle = e_1 z_1 + \dots + e_r z_r$, $\|z\| \equiv (\|z_1\|_p, \dots, \|z_r\|_p)$, а норма $\|\cdot\|_p$ определяется формулой (7).

Доказательство. Если для каждого $j \geq 1$ положить $z_j \equiv (z_j^{(1)}, \dots, z_j^{(r)})$, то согласно теореме 1

$$\sum_{e \in K_r} |\langle e, z_j \rangle|^p \leq \sum_{e \in K_r} |\langle e, |z_j| \rangle|^p,$$

где $|z_j| = (|z_j^{(1)}|, \dots, |z_j^{(r)}|)$, а потому

$$\begin{aligned} \sum_{e \in K_r} \|\langle e, z \rangle\|_p^p &\leq \sum_{j \geq 1} \sum_{e \in K_r} |\langle e, |z_j| \rangle|^p = 2^{r-1} \left(\sum_{j \geq 1} |z_j^{(1)}|^p + \sum_{j \geq 1} \frac{p!}{(p-2)!2!} |z_j^{(1)}|^{p-2} |z_j^{(2)}|^2 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \geq 1} \frac{p!}{m_1! m_2! \dots m_r!} |z_j^{(1)}|^{m_1} |z_j^{(2)}|^{m_2} \dots |z_j^{(r)}|^{m_r} + \dots + \sum_{j \geq 1} |z_j^{(r)}|^p \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что каждое слагаемое в правой части полученного неравенства вида

$$\sum_{j \geq 1} \frac{p!}{m_1! m_2! \dots m_r!} |z_j^{(1)}|^{m_1} |z_j^{(2)}|^{m_2} \dots |z_j^{(r)}|^{m_r}$$

содержит только четные натуральные $m_1, m_2, \dots, m_r$ такие, что $m_1 + m_2 + \dots + m_r = p$. Полагая здесь $p_k = p m_k^{-1}, 1 \leq k \leq r$ и применяя неравенство (8) леммы 1, можно продолжить (10):

$$\begin{aligned} \sum_{e \in K_r} \|\langle e, z \rangle\|_p^p &\leq 2^{r-1} \left(\|z_1\|_p^p + \frac{p!}{(p-2)!2!} \left(\sum_{j \geq 1} (|z_j^{(1)}|^{p-2})^{\frac{p}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\sum_{j \geq 1} (|z_j^{(2)}|^2)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{2}{p}} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{p!}{m_1! m_2! \dots m_r!} \|z_1\|_p^{m_1} \|z_2\|_p^{m_2} \dots \|z_r\|_p^{m_r} + \dots + \|z_r\|_p^p \right) = \sum_{e \in K_r} |\langle e, \|z\| \rangle|^p. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Утверждение теоремы 2 без труда переносится на лебеговы функциональные пространства L_p и пространства Соболева W_p^m с четным $p \geq 2$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Hanner O.* On the uniform confexity of L_p and l_p // Arkiv for Matematik. 1955. V.3. №19. P. 239 – 244.
2. *Трубников Ю.В.* Метод Абрамова – Гаиповой в банаховых пространствах // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29. №4. С. 172 – 179.
3. *Трубников Ю.В.* Неравенство Ханнера и сходимость итерационных процессов // Изв. вузов. Математика, 1987. №7. С. 57 – 64.
4. *Юргелас В.В.* Коаппроксимации в пространстве со свойством Берлинга – Ханнера // Веснік Віцебск. дзярж. ун-та, 2000. №4(18). С. 77 – 82.
5. *Трубников Ю.В., Юргелас В.В.* Об одном тождестве // Новосибирск, 1984. 20 с. Деп. в Редколл. Сиб. матем. журн., № 2808 – 84 Деп.
6. *Трубников Ю.В., Петров А.И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Минск: Наука и техника, 1986. 199 с.

Поступила 23.04.2003 г.