Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Овчинников, Доказательство свойства усиленной замены для подмножеств координатной решетки, обладающих свойством замены Штейница, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 55–60

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 18:13:29

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СВОЙСТВА УСИЛЕННОЙ ЗАМЕНЫ ДЛЯ ПОДМНОЖЕСТВ КООРДИНАТНОЙ РЕШЕТКИ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВОМ ЗАМЕНЫ ШТЕЙНИЦА

Усовершенствуется принадлежащее автору решение гипотезы о том, что симметричным является всякое подмножество координатной решетки, на котором локальный и глобальный экстремумы произвольной координатно-выпуклой функции совпадают.

Введение. В настоящей работе продолжены исследования работ [1-4]. В ней доказательство [3] дополняется и уточняется следующим образом. Доказываются две дополнительные леммы: 1 и 2.

Теорема 1 в настоящей статье является частью теоремы 1 [4] без ее предложения 4. И доказываемая теорема 1 только в части восполнения пробела, который образуется в доказательстве [4], если из него исключается ссылка на доказательство [3]. При этом используется лемма 3.

Теорема 2 статьи – это теорема 2 [3], дополняемая в ее условии вторым свойством замены. Для ее доказательства используются леммы 2, 4 и 5.

Лемма 4 статьи – это лемма 1[3], доказываемая с помощью леммы 2.

Лемма 5 статьи заменяет лемму 2[3] и отличается от нее и в условиях, и в заключении.

В доказательстве теоремы 2 использование кванторов ограничивается благодаря введению специальных подмножеств индексов.

Для завершения доказательства из теоремы 2 с помощью теоремы 1 получается следствие.

Определения. В статье будут использоваться обозначения и терминология работ [1-4].

Под координатной решеткой $(G, \mathbf{p})$ понимается множество $\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in G_i, i \in N\}$ с отношением порядка, определяемым условием: $(x_1, \dots, x_n) \mathbf{p} (y_1, \dots, y_n)$ тогда и только тогда, когда $x_i \mathbf{p}_i y_i, i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$, где G_i – цепь с отношением порядка $\mathbf{p}_i$, в которой конечны все интервалы $[a_i, b_i] = \{x_i \in G_i : a_i \mathbf{p}_i x_i \mathbf{p}_i b_i\}$, т.е. $[a_i, b_i] < \aleph$. Следовательно, для всякой точки $x = (x_1, \dots, x_n)$ решетки и любого индекса $j \in N$, если элемент x_j не минимален, существует единственная точка $t_j(x) = (x_1^{t_j}, \dots, x_n^{t_j})$, где $x_i^{t_j} = x_i$ при $i \neq j$ и $x_j^{t_j}$ – элемент, непосредственно предшествующий x_j в цепи G_j , а если x_j не максимален – существует единственная точка $p_j(x) = (x_1^{p_j}, \dots, x_n^{p_j})$, где $x_i^{p_j} = x_i$ при $i \neq j$ и $x_j^{p_j}$ – элемент, непосредственно следующий за x_j в цепи G_j .

Сепарабельной координатно-выпуклой функцией (СКВФ) называем заданную на множестве точек решетки $(G, \mathbf{p})$ функцию $f(x) = \bigwedge_{i=1}^n f_i(x_i)$, для которой всякий ее i – градиент $f(x) - f(t_i(x))$ не убывает при переходе от x к точке $p_i(x)$.

Множество Q точек решетки $(G, \mathbf{p})$, являющееся антицепью, т.е. состоящее из попарно не сравнимых точек, назовем базовой антицепью, если для произвольной СКВФ $f(x)$ и всякой точки $v \in Q$ неравенства $f(v) \leq f(u), u \in Q$, выполняются, если точка $v \in Q$ удовлетворяет условию локального минимума $f(v) \leq f(u), u \in Q \cap O(v)$, где $O(v) = \{w \in G : r(v, w) = 2\}$,

$r(v, w) = \bigwedge_{i=1}^n |D(v_i, w_i)|$, причем если $v_i \mathbf{p}_i w_i$, то $D(v_i, w_i)$ – длина интервала $[v_i, w_i]$, т.е. $D(v_i, w_i) = |[v_i, w_i]| - 1$, а если $w_i \mathbf{p}_i v_i$, то $D(v_i, w_i) = -D(w_i, v_i)$. Иными словами, антицепь называется базовой, если на ней локальный и глобальный минимумы произвольной СКВФ совпадают.

Свойства замены. Для множества Q точек решетки $(G, \mathbf{p})$ каждое из следующих свойств замены – это вариант известной аксиомы Штейница о замене (см. 6.10(ii) [5]):

А. Для любой пары $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ различных точек множества Q и всякого индекса $j \in N$ $I(x, y) = \{i \in N : x_i \mathbf{p}_i y_i, x_i \neq y_i\}$ найдется такой индекс $k \in I(y, x)$, что $p_j(t_k(x)) \in Q$.

В. Для любой пары x, y различных точек множества Q и всякого индекса $j \in I(x, y)$ найдется такой индекс $k \in I(y, x)$, что $p_k(t_j(y)) \in Q$.

В случае, когда решетку (G, p) образуют булевы n -векторы, каждым из этих свойств обладает множество Q характеристических векторов баз в матроиде $M(N)$ (ср. с упражнением VI.1.9 на странице 312[5]).

Лемма 1. Если точки v, w решетки (G, p) и индекс j удовлетворяют включению $j \in I(v, w)$, то $p_j(v) \in G, t_j(w) \in G$.

Доказательство. Из включения $j \in I(v, w)$, т.е. условий $v_j \leq p_j w_j, v_j \leq w_j$ следует v_j не максимален в $G_j, p_j(v) \in G$ и w_j не минимален в $G_j, t_j(w) \in G$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если точки v, w решетки (G, p) и индексы j, k удовлетворяют включениям $j \in I(v, w), k \in I(w, v)$, то $j \leq k$ и равенства $x_j = v_j^{p_j}, x_k = v_k^{t_k}, x_s = v_s, s \in N \setminus \{j, k\}$, по координатно задают такую точку x решетки (G, p) , что $x = p_j(t_k(v))$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что при допущении $j = k$ из включений $j \in I(v, w), k \in I(w, v)$ следует $v_j \leq p_j w_j, v_j \leq w_j, w_j \leq p_j v_j$ вопреки антисимметричности порядка p_j . Поэтому $j \leq k$, и, следовательно, $j \in I(v, w) \setminus \{k\}$.

Из включения $k \in I(w, v)$ по лемме 1 получаем $t_k(v) \in G$. Положим $z = t_k(v)$, т.е. $z_k = v_k^{t_k}, z_i = v_i, \forall i \in N \setminus \{k\}$.

Из включения $j \in I(v, w) \setminus \{k\}$, т.е. условий $j \leq k, v_j \leq p_j w_j, v_j \leq w_j$ и определения z_j получаем $z_j = v_j, z_j \leq w_j, z_j \leq p_j w_j$, и, следовательно, $j \in I(z, w)$. Отсюда по лемме 1 получаем $p_j(z) \in G$.

Положим $x = p_j(z)$, т.е. $x_j = z_j^{p_j}, x_k = z_k, x_i = z_i, i \in N \setminus \{j, k\}$. С учетом определений z_j, z_k, z_i имеем $x_j = v_j^{p_j}, x_k = v_k^{t_k}, x_s = v_s, s \in N \setminus \{j, k\}$. С другой стороны из определений x и z имеем $x = p_j(t_k(v))$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если множество Q точек решетки (G, p) обладает свойством замены **A** (или свойством замены **B**), то любая пара v, w различных точек множества Q удовлетворяет условию $I(v, w) \leq A \leq I(w, v)$.

Доказательство. Рассмотрим лишь случай, когда множество Q обладает свойством замены **A** (случай, когда оно обладает свойством замены **B**, рассматривается аналогично).

Если v, w – пара различных точек множества Q , то найдется такой индекс $r \in I(v, w)$, что $v_r \leq w_r$. Отсюда по свойству цепи G_r следует: $v_r \leq p_r w_r$ или $w_r \leq p_r v_r$. Таким образом, $w_r \leq p_r v_r$ или $v_r \leq p_r w_r$ для некоторого $r \in I(v, w)$. Замечая, что в этих соотношениях можно поменять местами w и v , не ограничивая общности, считаем, что $v_r \leq p_r w_r$. С другой стороны, по выбору r имеем: $v_r \leq w_r, r \in I(v, w)$. Таким образом, имеем: $v_r \leq p_r w_r, v_r \leq w_r$, т.е. $r \in I(v, w)$. По свойству замены **A** для различных точек v, w множества Q и индекса $r \in I(v, w)$ найдется индекс $k \in I(w, v)$. Тем самым получено $I(v, w) \leq A \leq I(w, v)$. Лемма доказана.

Теорема 1. Для множества Q точек решетки (G, p) следующие предложения равносильны:

- 1) множество Q является базовой антицепью;
- 2) множество Q обладает свойством замены **A**;
- 3) множество Q обладает свойством замены **B**;
- 4) множество Q при всякой СКВФ $f(x)$ удовлетворяет условию: для всякой пары v, w различных точек множества Q найдутся такие индексы $j, g \in I(v, w)$ и $k \in I(w, v)$, что $p_j(t_k(v)) \in Q, p_k(t_g(w)) \in Q, f(p_j(v)) \leq f(p_k(w))$;
- 5) множество Q при всякой СКВФ $f(x)$ удовлетворяет условию: для всякой пары v, w различных точек множества Q найдутся такие индексы $j, g \in I(v, w)$ и $k \in I(w, v)$, что $p_j(t_k(v)) \in Q, p_k(t_g(w)) \in Q, f(t_j(v)) \leq f(t_k(w))$.

Замечание 1. Доказательство этой теоремы, являющейся частью теоремы 1 [4] получается из [4] с помощью схемы представленной на рисунке.

При этом для импликаций этой схемы, отличных от $2 \Rightarrow 4$, доказательства [4] являются непосредственными, т.е. не имеющими ссылок на результаты других работ. Получить из [4] непосредственное доказательство $2 \Rightarrow 4$ не удастся, поскольку эта импликация не рассматривалась в [4], и вытекает из двух (не представленных здесь) импликаций, одна из которых получается в [4] с помощью простой ссылки на доказательство [3].

В связи с этим непосредственно проводится следующее

Доказательство 2 Р 4. Если множество Q обладает свойством замены **A**, то при всякой функции $f(x)$ для любой пары v, w различных точек множества Q , опираясь на лемму 3, выберем из множества $I(v, w)$ индекс j таким, чтобы выполнялись неравенства

$$f(p_j(v)) \not\leq f(p_k(v)), \quad \text{" } i \hat{I} I(v, w).$$

Используя свойство замены **A** по индексу $j \hat{I} I(v, w)$ найдем такой индекс $k \hat{I} I(w, v)$, что $p_j(t_k(v)) \hat{I} Q$, а по индексу $k \hat{I} I(w, v)$ найдем такой индекс $g \hat{I} I(v, w)$, что $p_k(t_g(w)) \hat{I} Q$. Тогда из включения $g \hat{I} I(v, w)$ и из предыдущих неравенств, выполнение которых обеспечено выбором j , имеем $f(p_j(v)) \not\leq f(p_g(v))$. Импликация доказана.

Теорема 2. Если множество Q точек решетки (G, p) обладает каждым из свойств замены **A** и **B**, то множество Q обладает свойством усиленной замены: для любой пары x, y различных точек множества Q и всякого индекса $j \hat{I} I(x, y)$ найдется такой индекс $k \hat{I} I(y, x)$, что $p_j(t_k(x)) \hat{I} Q$ и $p_k(t_j(y)) \hat{I} Q$.

Замечание 2. Для доказательства этой теоремы используем следующие две леммы.

Лемма 4. Если точки v, w решетки (G, p) и индексы j, k удовлетворяют включениям $j \hat{I} I(v, w), k \hat{I} I(w, v)$, то $r(p_j(t_k(v)), w) = r(v, w) - 2$, $I(v, w) \setminus \{j\} \hat{I} I(p_j(t_k(v)), w)$, $I(w, p_j(t_k(v))) \hat{I} I(w, v)$.

Доказательство. Используя условия леммы 4, с помощью леммы 2 получаем

$$j \hat{I} k, \quad (1)$$

и зададим такую точку $x \hat{I} \Gamma$, что

$$x = p_j(t_k(v)), \quad x_j = v_j^{p_j}, \quad x_k = v_k^{t_k}, \quad x_i = v_i, \quad \forall i \in N \setminus \{j, k\}. \quad (2)$$

Используя (1) и (2), получаем

$$r(v, w) - r(x, w) = |D(v_j, w_j)| + |D(v_k, w_k)| - |D(v_j^{p_j}, w_j)| - |D(v_k^{t_k}, w_k)|. \quad (3)$$

Из включения $j \hat{I} I(v, w)$, т.е. условий $v_j \mathbf{p}_j w_j, v_j \hat{I} w_j$ следует

$$v_j^{p_j} \mathbf{p}_j w_j, \quad (4)$$

$[v_j, w_j] = \{v_j\} \mathbf{U} [v_j^{p_j}, w_j]$. Поэтому $D(v_j, w_j) = 1 + D(v_j^{p_j}, w_j)$, причем $D(v_j^{p_j}, w_j) \geq 0$. Аналогично $D(w_k, v_k) = 1 + D(w_k, v_k^{t_k})$, причем $D(w_k, v_k^{t_k}) \geq 0$. Поэтому из (3) следует $r(v, w) - r(x, w) = 2$. Отсюда с помощью (2) получаем первое заключение леммы: $r(p_j(t_k(v)), w) = r(v, w) - 2$.

Выберем по произволу $i \hat{I} I(v, w) \setminus \{j\}$. Из включения $k \hat{I} I(w, v)$ аналогично (1) получаем $i \hat{I} k$. Поэтому из включения $i \hat{I} I(v, w) \setminus \{j\}$, т.е. условий $v_i \mathbf{p}_i w_i, v_i \hat{I} w_i, i \hat{I} j$, с помощью (2) следует $x_i \mathbf{p}_i w_i, x_i \hat{I} w_i, i \hat{I} I(x, w) = I(p_j(t_k(v)), w)$. Этим по произвольности выбора i установлено второе заключение леммы: $I(v, w) \setminus \{j\} \hat{I} I(p_j(t_k(v)), w)$.

Выберем по произволу $i \hat{I} I(w, x)$. С учетом (2) для получения последнего заключения леммы достаточно доказать $i \hat{I} I(w, v)$. Поскольку включение $k \hat{I} I(w, v)$ дано в условии, рассмотрим лишь случай $i \hat{I} k$. Из (2) и (4) имеем

$$x_j \mathbf{p}_j w_j. \quad (5)$$

По выбору i получаем

$$w_i \mathbf{p}_i x_i, \quad (6)$$

$$w_i \hat{I} x_i. \quad (7)$$

Поскольку соотношения (5)-(7) при допущении $i=j$ входят в противоречие с антисимметричностью порядка $\mathbf{p}_i$, то $i \neq j$ и в рассматриваемом случае ($i \neq k$) из (2), (6), (7) следует $w_i \mathbf{p}_i v_i$, $w_i \neq v_i$, т.е. $i \hat{I} I(w, v)$. Лемма доказана.

Лемма 5. Если условия:

1) $i \hat{I} I(v, w)$, $k \hat{I} I(w, v)$, $x = p_i(t_k(v))$; 2) $j \hat{I} I(x, w)$, $l \hat{I} I(w, x)$, $y = p_j(t_l(x))$; 3) $k \neq j \neq i \neq l$, выполняются одновременно для точек x, y, v, w решетки $(\Gamma, \mathbf{p})$ и индексов i, j, k, l , то $I(v, y) = \{i\} \mathbf{U} \{j\}$, $I(y, v) = \{k\} \mathbf{U} \{l\}$.

Доказательство. Заметим, что заключение леммы получается из следующих соотношений:

$$v_s \mathbf{p}_s y_s, v_s \neq y_s, \quad s \hat{I} \{i\} \mathbf{U} \{j\}; \quad (8)$$

$$v_s = y_s, \quad s \hat{I} N \setminus (\{i\} \mathbf{U} \{j\} \mathbf{U} \{k\} \mathbf{U} \{l\}); \quad (9)$$

$$y_s \mathbf{p}_s v_s, v_s \neq y_s, \quad s \hat{I} \{k\} \mathbf{U} \{l\}. \quad (10)$$

Действительно, из (8) непосредственно (с помощью определения $I(v, y)$) следует $I(v, y) \hat{E} \{i\} \mathbf{U} \{j\}$. Из допущения $r \hat{I} I(v, y) \setminus (\{i\} \mathbf{U} \{j\})$, т.е. условий $r \neq i, r \neq j$, $v_r \mathbf{p}_r y_r$, $v_r \neq y_r$, с помощью (8) - (10) получается $y_r \mathbf{p}_r v_r$, что вместе с условиями допущения $v_r \mathbf{p}_r y_r$, $v_r \neq y_r$ противоречит антисимметричности порядка $\mathbf{p}_r$. Поэтому $I(v, y) = \{i\} \mathbf{U} \{j\}$. Аналогично $I(y, v) = \{k\} \mathbf{U} \{l\}$.

Таким образом, для доказательства леммы достаточно получить (8) - (10).

Из условий 1) леммы 5 по лемме 2 получаем $i \neq k$ и равенства, задающие по координатно точку x решетки $(\Gamma, \mathbf{p})$:

$$i \neq k, \quad x_i = v_i^{p_i}, x_k = v_k^{t_k}, x_p = v_p, \quad p \hat{I} N \setminus \{i, k\}. \quad (11)$$

Аналогично из условий 2) леммы 5 получаем

$$j \neq l, \quad y_j = x_j^{p_j}, y_l = x_l^{t_l}, y_p = x_p, \quad p \hat{I} N \setminus \{j, l\}. \quad (12)$$

Выберем по произволу $s \hat{I} \{i\} \mathbf{U} \{j\}$. Из равенства $s=i$ с помощью равенства $x_i = v_i^{p_i}$, имеющегося в (11), и равенства $y_i = x_i$, имеющегося в (12), по условию 3) леммы 5, следует $y_s = y_i = x_i = v_i^{p_i} = v_s^{p_s}$. Поэтому $s=i \hat{P} y_s = v_s^{p_s}$. Из равенства $s=j$ с помощью равенства $y_j = x_j^{p_j}$, имеющегося в (12), равенства $x_j = v_j$, имеющегося в (11) по условию 3) леммы 5, следует $y_s = y_j = x_j^{p_j} = v_j^{p_j} = v_s^{p_s}$. Поэтому $s=j \hat{P} y_s = v_s^{p_s}$. Таким образом, получаем $y_s = v_s^{p_s}$. Отсюда по определению $v_s^{p_s}$ имеем $v_s \mathbf{p}_s y_s$, $v_s \neq y_s$. Этим по произвольности выбора s получены (8).

Выберем по произволу $s \hat{I} N \setminus (\{i\} \mathbf{U} \{j\} \mathbf{U} \{k\} \mathbf{U} \{l\})$. Из этого включения, т.е. условий $s \hat{I} N$, $s \neq i, j, k, l$, с помощью равенства $x_s = v_s$, имеющегося в (11), и равенства $y_s = x_s$, имеющегося в (12), следует $y_s = v_s$. Этим по произвольности выбора s получены (9).

Выберем по произволу $s \hat{I} \{k\} \mathbf{U} \{l\}$. Здесь возможны случаи:

Случай $k \neq l$. В этом случае из равенства $s=k$ с помощью равенства $x_k = v_k^{t_k}$, имеющегося в (11), и равенства $y_k = x_k$, имеющегося в (12), по условию 3) леммы 5, следует $y_s = y_k = x_k = v_k^{t_k} = v_s^{t_s}$. Поэтому $s=k \hat{P} y_s = v_s^{t_s}$. В рассматриваемом случае из равенства $s=l$ с помощью равенства $x_l = v_l$, имеющегося в (11) по условию 3) леммы 5, и равенства $y_l = x_l^{t_l}$, имеющегося в (12), следует $y_s = y_l = x_l^{t_l} = v_l^{t_l} = v_s^{t_s}$. Поэтому $s=l \hat{P} y_s = v_s^{t_s}$. Таким образом, получаем $y_s = v_s^{t_s}$. Отсюда по определению $v_s^{t_s}$ имеем $y_s \mathbf{p}_s v_s$, $v_s \neq y_s$.

Случай $k=l$. В этом случае $s=k=l$, и с помощью (11), (12) получаем $x_s = x_k = v_k^{t_k} = v_s^{t_s}$, $y_s = y_l = x_l^{t_l} = x_s^{t_s}$. Отсюда по определениям $v_s^{t_s}$, $x_s^{t_s}$ имеем

$$y_s \mathbf{p}_s x_s, y_s \neq x_s, \quad x_s \mathbf{p}_s v_s, x_s \neq v_s. \quad (13)$$

Поскольку допущение $y_s = v_s$ вводит (13) в противоречие с антисимметричностью порядка $\mathbf{p}_s$, то $y_s \neq v_s$. По транзитивности порядка $\mathbf{p}_s$ из (13) следует $y_s \mathbf{p}_s v_s$.

Таким образом, во всех случаях имеем $y_s \mathbf{p}_s v_s, v_s^{-1} y_s$. Этим по произвольности выбора s получены (10). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Допуская, что теорема не верна, выберем такую пару v, w различных точек и такой индекс j , чтобы выполнялись условия

$$v, w \hat{I} Q, j \hat{I} I(v, w), v^{-1} w, \\ I_j^p(w) \mathbf{I} I(w, v) \mathbf{I} I_j^t(v) = \emptyset, \quad (14)$$

где

$$I_j^p(w) = \{p \hat{I} N : p_p(t_j(w)) \hat{I} Q\}, I_j^t(v) = \{p \hat{I} N : p_j(t_p(v)) \hat{I} Q\}, \quad (15)$$

и при этих условиях натуральное $r(v, w)$ было наименьшим.

Используя свойство замены **A**, из условий (14) по индексу j находим такой индекс, $p \hat{I} I(w, v) \mathbf{I} I_j^t(v)$, а по индексу p находим такой индекс $i \hat{I} I(v, w)$, что $p \hat{I} I_i^p(w)$. Таким образом, имеем

$$i \hat{I} I(v, w), \quad (16)$$

$I_i^p(w) \mathbf{I} I(w, v) \mathbf{I} I_j^t(v) \neq \emptyset$. Отсюда и из (15) получаем

$$i^{-1} j \quad (17)$$

Аналогично $I(w, v) \mathbf{I} I_i^t(v) \neq \emptyset$. В непустом множестве $I(w, v) \mathbf{I} I_i^t(v)$ выберем по произволу индекс k . Таким образом, имеем

$$k \hat{I} I(w, v) \mathbf{I} I_i^t(v). \quad (18)$$

Положим

$$x = p_i(t_k(v)). \quad (19)$$

Из (14), (16), (17), (18) имеем $v, w \hat{I} Q, i \hat{I} I(v, w), k \hat{I} I(w, v), j \hat{I} I(v, w) \setminus \{i\}$. Отсюда по леммам 2 и 4 с учетом (19) получаем

$$i^{-1} k, x_i = v_i^{p_i}, x_k = v_k^{t_k}, x_s = v_s, " s \hat{I} N \setminus \{i, k\}, \quad (20)$$

$$r(x, w) < r(v, w), j \hat{I} I(x, w), I(w, x) \hat{I} I(w, v). \quad (21)$$

Используя (20), определения $v_i^{p_i}, v_k^{t_k}$ и рассуждая как при доказательстве леммы 5, получаем $I(v, x) = \{i\}$. С другой стороны, из (14), (16) и (17) имеем $I(v, w) \hat{E} \{i\} \mathbf{U} \{j\}, i^{-1} j$. Отсюда следует

$$x^{-1} w \quad (22)$$

Отметим, что выбором пары v, w точек и индекса j обеспечивается выполнение следующего условия: для любой пары x, y различных точек множества Q и всякого индекса $g \hat{I} I(x, y)$ при выполнении неравенства $r(x, y) < r(v, w)$ подмножество индексов $I_g^p(y) \mathbf{I} I(y, x) \mathbf{I} I_g^t(x)$ является непустым. Используя это условие, из (21) и (22) получаем, что подмножество индексов $I_j^p(w) \mathbf{I} I(w, x) \mathbf{I} I_j^t(x)$ является непустым. Выбрав в нем индекс l , имеем

$$l \hat{I} I_j^p(w) \mathbf{I} I(w, x) \mathbf{I} I_j^t(x). \quad (23)$$

Полагая $y = p_i(t_k(x))$, из (14), (16)-(19), (21), (23) имеем $v, w \hat{I} Q, i \hat{I} I(v, w), k \hat{I} I(w, v), x = p_i(t_k(v)) \hat{I} Q, j \hat{I} I(x, w), l \hat{I} I(w, x), y = p_j(t_l(x)) \hat{I} Q, k^{-1} j^{-1} i^{-1} l$.

Отсюда по лемме 5 получаем $I(v, y) = \{i\} \mathbf{U} \{j\}, I(y, v) = \{k\} \mathbf{U} \{l\}$. Из первого равенства непосредственно (с помощью определения $I(v, y)$ получаем $v^{-1} y$. Используя эти равенства, по индексу j и свойству замены **A** находим такой индекс m , что

$$p_j(t_m(v)) \hat{I} Q, m \hat{I} \{k\} \mathbf{U} \{l\}, \quad (24)$$

а по индексу l и свойству замены **B** находим такой индекс h , что

$$p_h(t_l(v)) \hat{I} Q, h \hat{I} \{i\} \mathbf{U} \{j\}. \quad (25)$$

При $m=l$ из (24) получаем $l \hat{I} I_j^t(v)$, и далее с помощью (23) и имеющегося в (21) включения $I(w, x) \hat{I} I(w, v)$ получаем $l \in I_j^p(w) \mathbf{I} I(w, v) \mathbf{I} I_j^t(v)$ вопреки (15). Следовательно, $m \neq l$ в (24). Поэтому $k \in I_j^t(v)$, и поскольку индекс k выбирался из множества $I(w, v) \mathbf{I} I_i^t(v)$, т.е. при условиях (18), произвольно, то этим получено включение

$$I(w, v) \mathbf{I} I_i^t(v) \subseteq I(w, v) \mathbf{I} I_j^t(v). \quad (26)$$

При $h=j$ из (25) вновь имеем включение $l \in I_j^t(v)$, которое, как мы видели в выше, влечет противоречие с (15). Следовательно, $h \neq j$ в (25). Поэтому $l \in I_i^t(v)$. Отсюда с помощью с (23) и имеющегося в (21) включения $I(w,x) \hat{I} I(w,v)$ получаем $l \in I_j^p(w) \cap I(w,v) \cap I_i^t(v)$ для индекса l , выбранного нами из непустого множества при условии (23). Этим получено

$$I_j^p(w) \cap I(w,v) \cap I_i^t(v) \neq \emptyset. \quad (27)$$

Из (26) и (27) непосредственно следует $I_j^p(w) \cap I(w,v) \cap I_j^t(v) \neq \emptyset$ вопреки (15). Теорема доказана.

Из теоремы 2 с помощью теоремы 1 получаем утверждение.

Следствие. Для множества Q точек решетки $(\Gamma, \mathbf{p})$ следующие предложения равносильны:

- 1) множество Q обладает свойством замены **A**;
- 2) множество Q обладает свойством замены **B**;
- 3) множество Q обладает свойством усиленной замены;
- 4) множество Q является симметричным, т.е. удовлетворяет условию: для любой пары x, y различных точек множества Q найдутся такие индексы $j \hat{I} I(x, y)$ и $k \hat{I} I(y, x)$, что $p_j(t_k(x)) \hat{I} Q$, $p_k(t_j(y)) \hat{I} Q$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Емеличев В.А., Овчинников В.Г. Симметричные суперматроиды // Докл. АН БССР, 1983. Т. 27. № 5. С. 389-391.
2. Емеличев В.А., Овчинников В.Г. К теории экстремума на координатных решетках // Докл. АН БССР. 1983. Т.27. № 7. С. 581-583.
3. Овчинников В.Г. Об одном свойстве подмножеств координатной решетки, на которых локальный и глобальный экстремумы координатно-выпуклой функции совпадают // Изв. АН БССР. Сер. Физ.-мат. науки. 1984. № 5. с.113/ Ред. ж. «Изв. АН БССР. Сер. Физ.-мат. науки» Минск.1983. бс.: библи. 4 назв. Рукопись деп. в ВИНТИ 09.01.84 № 245-84Деп.
4. Емеличев В.А., Овчинников В.Г. К теории оптимизации на антицепях, обладающих свойством замены Штейница // Кибернетика, 1985. № 2. С. 55-58.
5. Айгнер М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982. 556 с.

Поступила 11.01.2004 г.