Общероссийский математический портал

Л. П. Усольцев, О законе повторного логарифма для классических распределений, порождаемых дробными долями показательной функции с целым основанием, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 61–70

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu179>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:35:13

Теория вероятностей

УДК 511.2+519.2

Л.П. Усольцев

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ ДРОБНЫМИ ДОЛЯМИ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ С ЦЕЛЫМ ОСНОВАНИЕМ

Устанавливаются метрические свойства типа закона повторного логарифма для распределений соответственно нормированных нарастающих сумм значений некоторых функций, задаваемых на последовательностях, порождаемых дробными долями показательной функции с фиксированным целым основанием.

Для целого $q \geq 2$, натурального N и вещественных t, a, b ($0 \leq a < b \leq 1$) будем через $Q_{a,b,q}(t, N)$ обозначать количество целых неотрицательных чисел $n \leq N-1$, для которых $a \leq \{q^n t\} < b$. Положим

$$R(t, N) = Q_{0,1/2,2}(t, N) - \frac{N}{2}.$$

Изучением асимптотического поведения величины $R(t, N)$ при $N \rightarrow \infty$ занимались уже с начала 20 в. Было последовательно показано, что для почти всех (по мере Лебега) вещественных чисел t справедливы оценки (см., например, [1], §8): $R(t, N) = O(N)$ – Э.Борель, $R(t, N) = o(N^{1/2+\varepsilon})$ с любым $\varepsilon > 0$ – Ф.Хаусдорф, $R(t, N) = O(\sqrt{N \ln N})$ и $R(t, N) = \Omega(\sqrt{N})$ – Г.Харди и Дж.Литтлвуд, $R(t, N) = O(\sqrt{N \ln \ln N})$ – А.Я.Хинчин. Наконец, в 1933 г. А.Ф.Хинчин опубликовал [2] доказательство того, что для почти всех вещественных чисел t справедливо равенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} |R(t, N)| / \sqrt{N \ln \ln N} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (1)$$

Попытку снять в (1) ограничение $a=0, b=1/2$ предприняли в 1964 г. С.Гал и Л.Гал [3], доказавшие существование такой постоянной $C > 0$, что для почти всех вещественных чисел t выполняется равенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq a < b \leq 1} |Q_{a,b,2}(t, N) - (b-a)N| / \sqrt{N \ln \ln N} \leq C. \quad (2)$$

В [3] была также выдвинута гипотеза (впоследствии опровергнутая в [4, 5]), что соотношение (2) переходит в равенство при $C=1$.

В работе автора [4] (см. также [5]) результат, аналогичный результату А.Я. Хинчина (1), получен для случая произвольных вещественных a, b ($0 \leq a \leq b \leq 1$) и любого целого $q \geq 2$. Конкретно, в [4] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Каковы бы ни были целое число $q \geq 2$ и вещественные числа a, b ($0 \leq a < b \leq 1$), для почти всех (по мере Лебега) вещественных чисел t справедливо равенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq a < b \leq 1} |Q_{a,b,q}(t, N) - (b-a)N| / \sqrt{N \ln \ln N} \leq \sqrt{2} s_{a,b,q}, \quad (3)$$

где $s_{a,b,q}$ – неотрицательное число, определяемое соотношением

$$s_{a,b,q}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} (c_{[a,b]}(\{q^n t\}) - (b-a)) \right)^2 dt,$$

при этом

$$c_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [a, b), \\ 0, & \text{если } t \in [0, 1) \setminus [a, b). \end{cases}$$

В работе [4] подсчитано также, что

$$s_{0,1/3,2}^2 = \frac{14}{27}, \quad \sup_{0 \leq a < b \leq 1} s_{a,b,2}^2 \leq \frac{3}{4},$$

вследствие чего

$$\sqrt{2}s_{0,1/3,2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{14}{27}} > 1,018, \quad \sup_{0 \leq a < b \leq 1} \sqrt{2}s_{a,b,2} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} < 1,225.$$

А это, в силу теоремы 1, означает, что для почти всех вещественных чисел t выполняются неравенства

$$1,018 < \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq a < b \leq 1} |Q_{a,b,q}(t, N) - (b-a)N| / \sqrt{N \ln \ln N} < 1,225,$$

из которых, в частности, вытекает ошибочность гипотезы С. и Л.Галов о наименьшем значении постоянной C в соотношении (2).

Ясно, что наша теорема 1 содержится как частный случай в следующем утверждении (с $\alpha=1$), анонсированном в [6].

Теорема 2. Пусть $q \geq 2$ – целое число, а $f(t)$ – вещественная, суммируемая с квадратом на отрезке $[0,1]$ периодическая функция с периодом 1 и коэффициентами Фурье

$$c_m = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i m t} dt \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

причем

$$|c_m| \leq \frac{A}{m^\alpha} \quad (m=1, 2, \dots), \quad (4)$$

где $A > 0$ и $\alpha > 1/2$ – некоторые постоянные. Тогда для почти всех (по мере Лебега) вещественных чисел t справедливо равенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=0}^{N-1} (f(q^n t) - c_0) \right| / \sqrt{N \ln \ln N} = \sqrt{2}\sigma, \quad (5)$$

где σ – неотрицательное число, определяемое соотношением

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} (f(q^n t) - c_0) \right)^2 dt$$

(известно (см., например, [7], § 15), что этот предел существует и конечен).

Доказательство этой теоремы для частного случая $\alpha=1$ дано автором в работе [8]. Еще раньше В.Филиппом [9] доказано аналогичное утверждение для более простого случая, когда функция $f(t)$ кусочно-постоянна и имеет разрывы лишь в рациональных точках. В данной работе мы даем доказательство теоремы 2 в ее полном объеме. Идея доказательства состоит в том,

чтобы суммы вида $\sum_{n=0}^{N-1} f(q^n t)$ трактовать как суммы «слабозависимых» случайных величин в

соответствующем вероятностном пространстве и аппроксимировать их подходящими суммами независимых случайных величин (а делать это можно разными способами, удачными и не очень удачными). В результате мы получаем возможность использовать для таких сумм классический закон повторного логарифма. В нашем случае эта идея оказалась вполне реализуемой. Итак,

Доказательство теоремы 2. Если $\sigma=0$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть поэтому $\sigma \neq 0$. Будем считать, что $\alpha < 1$, поскольку это не умаляет общности рассуждений. Очевидно, нам достаточно показать, что для почти всех вещественных чисел t выполняется равенство

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=0}^{N-1} (f(q^n t) - c_0) \right| / \sqrt{N \ln \ln N} = \sqrt{2}\sigma, \quad (6)$$

поскольку тогда, по соображениям симметрии, будет следовать, что для почти всех вещественных t

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=0}^{N-1} (f(q^n t) - c_0) \right| / \sqrt{N \ln \ln N} = -\sqrt{2}\sigma, \quad (7)$$

а равенства (6) и (7) вместе дают нужное нам равенство (5).

Далее, ясно, что при доказательстве теоремы можно ограничиться случаем $c_0 = \int_0^1 f(t)dt = 0$, так как к нему сводится и случай $c_0 \neq 0$: надо только вместо функции $f(t)$ рассматривать функцию $f(t) - c_0$. Будем поэтому считать, что

$$\int_0^1 f(t)dt = 0, \quad f(t) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{2\pi i m t},$$

где штрих у знака суммы указывает на отсутствие слагаемого, отвечающего значению $m=0$. В этом случае

$$S^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(q^n t) \right)^2 dt,$$

а соотношение (6) принимает вид

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(q^n t) / \sqrt{N \ln \ln N} = \sqrt{2} S. \quad (8)$$

Пусть, далее, $\Phi(x)$ – нормальная функция, распределения с параметрами $(0,1)$. Для $N=3, 4, \dots$ положим $\mathbf{I}(N) = \sqrt{2N \ln \ln N}$,

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(q^n t), \quad 0 \leq t < 1,$$

и $F_N(x) = \text{mes}\{t \in [0;1) : S_N(t) < x S \sqrt{N}\}$, $-\infty < x < \infty$. Согласно [10], при $N \rightarrow \infty$

$$R_N \equiv \sup_{-\infty < x < \infty} |F_N(x) - \Phi(x)| = O\left(\frac{\ln^g N}{N^g}\right), \quad (9)$$

где $\gamma = \frac{1}{2}$, если $a > \frac{2}{3}$, и γ – любое число интервала $\left(0, \frac{2a-1}{2(1-a)}\right)$, если $\frac{1}{2} < a \leq \frac{2}{3}$. Из (9), в частности, вытекает, что при $N \rightarrow \infty$

$$\text{mes}\{t \in [0;1) : S_N(t) \geq a \mathbf{I}(N)\} = 1 - \Phi(a \sqrt{2 \ln \ln N}) + O\left(\frac{\ln^g N}{N^g}\right)$$

с любой постоянной $a > 0$. Но при $x \rightarrow \infty$

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{1}{x \sqrt{2p}} e^{-x^2/2},$$

вследствие чего при $N \rightarrow \infty$ и $a > 0$

$$1 - \Phi(a \sqrt{2 \ln \ln N}) = \frac{1 + o(1)}{2a \sqrt{p \ln \ln N} (\ln N)^{a^2}}. \quad (10)$$

Поэтому при всех достаточно больших N

$$\text{mes}\{t \in [0,1) : S_N(t) \geq a \mathbf{I}(N)\} \leq \frac{1}{(\ln N)^{a^2}} \quad (11)$$

с любой постоянной $a > 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное фиксированное число,

$$m = \frac{(1+e)^2 - 1}{4}, \quad h_k = (1+m)^k \quad (k = k_0, k_0 + 1, \dots),$$

а постоянная $k_0 \geq 3$ выбрана так, чтобы при всех целых $k \geq k_0$ было $h_{k+1} - h_k \geq 1$. Для $k = k_0, k_0 + 1, \dots$ положим

$$\bar{S}_{h_k}(t) = \max_{h_k \leq N \leq h_{k+1}} S_N(t).$$

Очевидно,

$$\text{mes}\{t \in [0,1) : S_N(t) > (1+e) \mathbf{I}(N) \text{ б.ч.}\} \leq \text{mes}\{t \in [0,1) : \bar{S}_{h_k}(t) > (1+e) \mathbf{I}(h_k) \text{ б.ч.}\}. \quad (12)$$

В силу (11), при всех достаточно больших k

$$mes\{t \in [0,1) : \bar{S}_{h_k}(t) > (1+e)\mathbf{I}(h_k)\} \leq 1 / \exp\left\{(1+e)^2 \left(\frac{\mathbf{I}(h_k)}{\mathbf{I}(h_{k+1})}\right)^2 \ln \ln h_k\right\}.$$

А так как при $k \rightarrow \infty$

$$\left(\frac{\mathbf{I}(h_k)}{\mathbf{I}(h_{k+1})}\right)^2 = \frac{h_k \ln \ln h_k}{h_{k+1} \ln \ln h_{k+1}} \sim \frac{1}{1+m},$$

то при всех достаточно больших k

$$\begin{aligned} & mes\{t \in [0,1) : \bar{S}_{h_k}(t) > (1+e)\mathbf{I}(h_k)\} \leq \\ & \leq 1 / \exp\left\{\frac{(1+e)^2}{1+2m} \ln(k \ln(1+m))\right\} = 1 / \exp\left\{\left[1 + \frac{e(2+e)}{(1+e)^2 + 1}\right] \ln(k \ln(1+m))\right\}, \end{aligned}$$

вследствие чего

$$\sum_{k \geq k_0} mes\{t \in [0,1) : \bar{S}_{h_k}(t) > (1+e)\mathbf{I}(h_k)\} < \infty.$$

Но тогда по лемме Бореля-Кантелли (см., например, [11], лемма 4 главы 9) справедливо равенство

$$mes\{t \in [0,1) : \bar{S}_{h_k}(t) > (1+e)\mathbf{I}(h_k) \text{ б.ч.}\} = 0.$$

Объединяя это равенство и неравенство (12), получим равенство

$$mes\{t \in [0,1) : S_N(t) > (1+e)\mathbf{I}(N) \text{ б.ч.}\} = 0.$$

Заменяя $S_N(t)$ на $-S_N(t)$, получим

$$mes\{t \in [0,1) : -S_N(t) > (1+e)\mathbf{I}(N) \text{ б.ч.}\} = 0.$$

Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$mes\{t \in [0,1) : |S_N(t)| > (1+e)\mathbf{I}(N) \text{ б.ч.}\} = 0,$$

а значит, и соотношение

$$mes \prod_{K=3N=K}^{\infty} \bigcup_{N \geq K}^{\infty} \{t \in [0,1) : |S_N(t)| > (1+e)\mathbf{I}(N)\} = 0.$$

Но тогда, в силу аксиомы непрерывности вероятностной меры, при любом $\varepsilon > 0$ будет:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} mes \bigcup_{N \geq K}^{\infty} \{t \in [0,1) : |S_N(t)| > (1+e)\mathbf{I}(N)\} = 0. \quad (13)$$

Чтобы завершить доказательство нашей теоремы, покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$mes\{t \in [0,1) : |S_N(t)| > (1-e)\mathbf{I}(N) \text{ б.ч.}\} = 1,$$

т.е. равенство

$$mes \prod_{K=3N=K}^{\infty} \bigcup_{N \geq K}^{\infty} \{t \in [0,1) : S_N(t) > (1-e)\mathbf{I}(N)\} = 1.$$

А для этого, в силу аксиомы непрерывности вероятностной меры, достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} mes \bigcup_{N \geq K}^{\infty} \{t \in [0,1) : S_N(t) > (1-e)\mathbf{I}(N)\} = 1. \quad (14)$$

Пусть $\tau > 0$ – постоянная, величину которой мы уточним позднее,

$$n_k = \left[(1+\tau)^k \right], \quad r_k = \left\lfloor \frac{3a \ln n_k}{(2a-1) \ln 2} \right\rfloor + 1 \quad (k = k_0, k_0 + 1, \dots),$$

а натуральное число k_0 выбрано так, чтобы при всех целых $k \geq k_0$ было $r_k \geq 3$ и $n_{k+1} - n_k > r_{k+1}$. Положим $n_{k_0-1} = 0$. Пусть, далее, при $k = k_0, k_0 + 1, \dots$

$$U_k(t) = \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-r_k} f(q^n t), \quad V_k(t) = \sum_{n=n_k-r_k+1}^{n_k-1} f(q^n t), \quad 0 \leq t < 1.$$

Очевидно, при всех целых $k \geq k_0$

$$S_{n_k}(t) = \sum_{j=k_0}^k (U_j(t) + V_j(t)), \quad 0 \leq t < 1$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{r_k} - 2} V(t) \right)^2 dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{r_k} - 2} \sum_{n=n_k-r_k+1}^{n_k-1} f(q^n t) \right)^2 dt = \\
& = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{r_k} - 2} \sum_{l=0}^{r_k-3} f(q^{n_k-r_k+1+l} t) \right)^2 dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{r_k} - 2} \sum_{l=0}^{r_k-3} f(q^l t) \right)^2 dt.
\end{aligned}$$

А так как последний интеграл при $k \rightarrow \infty$ имеет свой предел σ^2 , то, взяв k_0 достаточно большим, мы при всех целых $k \geq k_0$ будем иметь

$$\begin{aligned}
& \text{mes} \left\{ t \in [0,1) : \left| \sum_{j=k_0}^k V_j(t) \right| > d \sqrt{n_k} \right\} \leq \text{mes} \left\{ t \in [0,1) : k \cdot \max_{k_0 \leq j \leq k} |V_j(t)| > d \sqrt{n_k} \right\} \leq \\
& \leq \frac{k^2 r_k}{d^2 n_k} \cdot \max_{k_0 \leq j \leq k} \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{r_j} - 2} V_j(t) \right)^2 dt \leq \frac{2s^2 k^2 r_k}{d^2 n_k} \leq \frac{C_1 k^3 s^2}{d^2 (1+t)^k},
\end{aligned} \quad (15)$$

где $C_1 > 0$ – постоянная, зависящая лишь от α и τ .

Вследствие оценки (15), при всех достаточно больших K , будет:

$$\begin{aligned}
& \text{mes} \mathbf{U}_{N \geq K} \{ t \in [0,1) : S_N(t) > (1-e)\mathbf{I}(N) \} \geq \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \{ t \in [0,1) : S_{n_k}(t) > (1-e)\mathbf{I}(n_k) \} \geq \\
& \geq \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1) : \sum_{j=k_0}^k U_j(t) > (1 - \frac{e}{2})\mathbf{I}(n_k) \right\} - \sum_{k \geq \frac{\ln K}{\ln(1+t)}} \frac{C_1 k^3 s^2}{\left(\frac{se}{2} \sqrt{2 \ln \ln n_k} \right)^2 (1+t)^k} \geq \\
& \geq \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1) : \sum_{j=k_0}^k U_j(t) > (1 - \frac{e}{2})\mathbf{I}(n_k) \right\} - \frac{C_2 \ln^3 K}{K}
\end{aligned} \quad (16)$$

и аналогично

$$\begin{aligned}
& \text{mes} \mathbf{U}_{N \geq K} \{ t \in [0,1) : S_N(t) > (1+e)\mathbf{I}(N) \} \geq \\
& \geq \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1) : \left| \sum_{j=k_0}^k U_j(t) \right| > (1 + \frac{3e}{2})\mathbf{I}(n_k) \right\} - \frac{C_2 \ln^3 K}{K},
\end{aligned} \quad (17)$$

где $C_2 > 0$ – постоянная, зависящая лишь от α , τ и ε . В силу (16) для доказательства справедливости при любом $\varepsilon > 0$ соотношения (14) достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1) : \sum_{j=k_0}^k U_j(t) > (1-e)\mathbf{I}(n_k) \right\} = 1. \quad (18)$$

Вследствие же (17) и справедливости при любом $\varepsilon > 0$ соотношения (13), при любом $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1) : \left| \sum_{j=k_0}^k U_j(t) \right| > (1+e)\mathbf{I}(n_k) \right\} = 0. \quad (19)$$

Для $k = k_0, k_0 + 1, \dots$ положим

$$G_k(x) = \text{mes} \left\{ t \in [0,1) : \sum_{j=k_0}^k U_j(t) < x s \sqrt{n_k} \right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

В силу (15) при любом целом $k \geq k_0$ и любых вещественных $\delta > 0$ и x справедливы неравенства

$$F_{n_k} \left(x - \frac{d}{s} \right) \leq G_k(x) \leq F_{n_k} \left(x + \frac{d}{s} \right) + \frac{C_1 k^3 s^2}{d^2 (1+t)^k}.$$

Полагая здесь $d = \frac{s}{(1+t)^{1/3}}$, получим неравенства

$$F_{n_k} \left(x - \frac{1}{(1+t)^{1/3}} \right) \leq G_k(x) \leq F_{n_k} \left(x + \frac{1}{(1+t)^{1/3}} \right) + \frac{C_1 k^3}{(1+t)^{k/3}}. \quad (20)$$

А так как при $k \rightarrow \infty$ равномерно по x , $-\infty < x < \infty$,

$$\Phi\left(x \pm \frac{1}{(1+t)^{k/3}}\right) = \Phi(x) + O\left(\frac{1}{(1+t)^{k/3}}\right), \quad (21)$$

то из (20) и (9) вытекает, что при $k \rightarrow \infty$

$$R'_k \equiv \sup_{-\infty < x < \infty} |G_k(x) - \Phi(x)| = O\left(\frac{k^3}{(1+t)^{g_1 k}}\right), \quad (22)$$

где $g_1 = \frac{1}{3}$, если $a > \frac{5}{8}$, и γ_1 – любое число интервала $\left(0, \frac{2a-1}{2(1-a)}\right)$, если $\frac{1}{2} < a \leq \frac{5}{8}$.

Положим для $M=1, 2, \dots$

$$f_M(t) = \sum_{m=-M}^M c_m e^{2\pi i m t}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Очевидно, при любом натуральном M функция $f_M(t)$ является вещественнозначной, периодической с периодом 1, причем $\int_0^1 f_M(t) dt = 0$. Покажем, что при всех натуральных N и M выполняется неравенство

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} (f(q^n t) - f_M(q^n t)) \right)^2 dt \leq \frac{C_3}{M^{2a-1}}, \quad (23)$$

где $C_3 = \frac{12A^2}{2a-1}$.

Действительно, пусть $\tilde{f}_M(t) = f(t) - f_M(t)$, $-\infty < t < \infty$; тогда

$$\tilde{f}_M(t) \sim \sum_{|m| > M} c_m e^{2\pi i m t}$$

и, следовательно, по тождеству Парсеваля, при любом целом $n \geq 0$ будет:

$$\int_0^1 \tilde{f}_M(t) \tilde{f}_M(q^n t) dt = \sum_{|m| > M} c_m q^n \bar{c}_m.$$

Но тогда, в силу оценки (4), при каждом целом $n \geq 0$ будет:

$$\left| \int_0^1 \tilde{f}_M(t) \tilde{f}_M(q^n t) dt \right| \leq 2 \sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{A^2}{m^{2a} q^{na}} \leq \frac{2A^2}{2^{n/2}} \int_M^{\infty} \frac{dx}{x^{2a}} = \frac{2A^2}{(2a-1)M^{2a-1} 2^{n/2}}. \quad (24)$$

А поскольку функция $\tilde{f}_M(t)$ является периодической с периодом 1 и, следовательно, при всех целых неотрицательных n_1 и n_2

$$\int_0^1 \tilde{f}_M(q^{n_1} t) \tilde{f}_M(q^{n_2} t) dt = \int_0^1 \tilde{f}_M(t) \tilde{f}_M(q^{|n_1-n_2|} t) dt,$$

то, учитывая оценку (24), мы и получаем неравенство (23):

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} (f(q^n t) - f_M(q^n t)) \right)^2 dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_M(q^n t) \right)^2 dt = \\ & = \frac{1}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \int_0^1 \tilde{f}_M(q^{n_1} t) \tilde{f}_M(q^{n_2} t) dt \leq \frac{1}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \frac{2A^2}{(2a-1)M^{2a-1} 2^{|n_1-n_2|/2}} \leq \\ & \leq \frac{2A^2}{(2a-1)M^{2a-1}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}} \right) \leq \frac{12A^2}{(2a-1)M^{2a-1}}. \end{aligned}$$

Для $k=k_0, k_0+1, k_0+2, \dots$ положим

$$s_k = \lfloor n_k^{1/(2a-1)} \rfloor + 1, \quad U_k^*(t) = \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k - r_k} f_{s_k}(q^n t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

и

$$G_k^*(x) = \text{mes} \left\{ t \in [0,1) : \sum_{j=k_0}^k U_j^*(t) < x s \sqrt{n_k} \right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

В силу неравенства (23) при любом целом $k \geq k_0$ имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{n_k - n_{k-1} - r_k + 1}} (U_k(t) - U_k^*(t)) \right)^2 dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{n_k - n_{k-1} - r_k + 1}} \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k - r_k} (f(q^n t) - f_{s_k}(q^n t)) \right)^2 dt = \\ & = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{n_k - n_{k-1} - r_k + 1}} \sum_{n=0}^{n_k - n_{k-1} - r_k + 1} (f(q^n t) - f_{s_k}(q^n t)) \right)^2 dt \leq \frac{C_3}{s_k^{2a-1}} \leq \frac{C_3}{n_k}. \end{aligned}$$

Но тогда, применяя классическое неравенство П.Л.Чебышева, при всех целых $k \geq k_0$ и любом вещественном $\delta > 0$ получаем:

$$\begin{aligned} & \text{mes} \left\{ t \in [0,1) : \left| \sum_{j=k_0}^k U_j(t) - \sum_{j=k_0}^k U_j^*(t) \right| > d \sqrt{n_k} \right\} \leq \text{mes} \left\{ t \in [0,1) : k \cdot \max_{k_0 \leq j \leq k} |U_j(t) - U_j^*(t)| > d \sqrt{n_k} \right\} \leq \\ & \frac{k^2}{d^2 n_k} \cdot \max_{k_0 \leq j \leq k} (n_j - n_{j-1} - r_j + 1) \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{n_j - n_{j-1} - r_j + 1}} (U_j(t) - U_j^*(t)) \right)^2 dt \leq \\ & \leq \frac{k^2}{d^2 n_k} \cdot \max_{k_0 \leq j \leq k} (n_j - n_{j-1} - r_j + 1) \frac{C_3}{n_j} \leq \frac{2C_3 k^2}{d^2 (1+t)^k}. \end{aligned} \quad (25)$$

В силу оценки (25) при всех достаточно больших K будет:

$$\begin{aligned} & \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1) : \sum_{j=k_0}^k U_j(t) > (1-e) \mathbf{I}(n_k) \right\} \geq \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1) : \sum_{j=k_0}^k U_j^*(t) > (1-\frac{e}{2}) \mathbf{I}(n_k) \right\} - \\ & - \sum_{k \geq \frac{\ln K}{\ln(1+t)}} \frac{2C_3 k^2}{\left(\frac{Se}{2} \sqrt{2 \ln \ln n_k} \right)^2 (1+t)k} \geq \\ & \geq \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1) : \sum_{j=k_0}^k U_j^*(t) > (1-\frac{e}{2}) \mathbf{I}(n_k) \right\} - \frac{C_4 \ln^2 K}{K} \end{aligned} \quad (26)$$

и аналогично

$$\begin{aligned} & \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1) : \left| \sum_{j=k_0}^k U_j(t) \right| > (1+e) \mathbf{I}(n_k) \right\} \geq \\ & \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1) : \left| \sum_{j=k_0}^k U_j^*(t) \right| > (1+\frac{3e}{2}) \mathbf{I}(n_k) \right\} - \frac{C_4 \ln^2 K}{K}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $C_4 > 0$ – постоянная, зависящая лишь от A , α , τ и ε .

Вследствие неравенства (26), для доказательства справедливости при любом $\varepsilon > 0$ соотношения (18), а значит, для завершения доказательства нашей теоремы достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1) : \sum_{j=k_0}^k U_j^*(t) > (1-e) \mathbf{I}(n_k) \right\} = 1. \quad (28)$$

В силу же неравенства (27) и справедливости при любом $\varepsilon > 0$ соотношения (19), при любом $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1) : \left| \sum_{j=k_0}^k U_j(t) \right| > (1+e) \mathbf{I}(n_k) \right\} = 0. \quad (29)$$

Вследствие неравенства (25) при всех целых $k \geq k_0$ и любых вещественных $\delta > 0$ и x выполняются неравенства

$$G_k(x - \frac{d}{S}) \leq G_k^*(x) \leq G_k(x + \frac{d}{S}) + \frac{2C_3 k^2}{d^2 (1+t)^k}.$$

Полагая здесь $d = \frac{S}{(1+t)^{k/3}}$, получим неравенства

$$G_k(x - \frac{d}{(1+t)^{k/3}}) \leq G_k^*(x) \leq G_k(x + \frac{d}{(1+t)^{k/3}}) + \frac{2C_3 k^2}{s^2(1+t)^{k/3}}. \quad (30)$$

А так как при $k \rightarrow \infty$ равномерно по x , $-\infty < x < \infty$, выполняется соотношение (21), то из соотношений (30) и (22) вытекает, что при $k \rightarrow \infty$

$$R_k^* \equiv \sup_{-\infty < x < \infty} |G_k^*(x) - \Phi(x)| = O\left(\frac{k^3}{(1+t)^{g_1 k}}\right), \quad (31)$$

где $\gamma_1 > 0$ – постоянная, имеющая тот же смысл, что и в (22).

Каждое $t \in [0,1)$ будем представлять в q – ичной системе счисления:

$$t = \frac{n_1(t)}{q} + \frac{n_2(t)}{q^2} + \dots + \frac{n_k(t)}{q^k} + \dots,$$

где $n_k(t)$ – целые, $0 \leq n_k(t) \leq q-1$ ($k=1, 2, \dots$). Легко видеть, что функции $n_1(t)$, $n_2(t)$, ... в промежутке $[0,1)$ статистически независимы.

Для всех натуральных r и $t \in [0,1)$ положим

$$j_r(t) = \frac{n_1(t)}{q} + \frac{n_2(t)}{q^2} + \dots + \frac{n_r(t)}{q^r}.$$

Очевидно, для всех $t \in [0,1)$ $0 \leq t - j_r(t) \leq \frac{1}{q^r}$ и, как следствие этого,

$$|e^{2pimt} - e^{2pimj_r(t)}| = |e^{2pim(t-j_r(t))} - 1| \leq 2p|m|(t-j_r(t)) \leq \frac{2p|m|}{q^r}, \quad (32)$$

каковы бы ни были целое m и натуральное r . Положим при $k = k_0, k_0+1, k_0+2, \dots$

$$\tilde{f}_k(t) = f_{s_k}(j_{r_k}(\{t\})), \quad -\infty < t < \infty; \quad \tilde{U}_k(t) = \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-r_k} \tilde{f}_k(q^n t), \quad 0 \leq t < 1,$$

и

$$\tilde{G}_k(x) = \text{mes} \left\{ t \in [0,1): \sum_{j=k_0}^k \tilde{U}_j(t) < x s \sqrt{n_k} \right\}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Так как функции $n_1(t)$, $n_2(t)$, ... в промежутке $[0,1)$ статистически независимы, то в этом промежутке статистически независимы и функции $\tilde{U}_k$ ($k = k_0, k_0+1, k_0+2, \dots$).

В силу неравенств (32) и (4), при всех целых $k \geq k_0$ и любом $t \in [0,1)$, будет:

$$\begin{aligned} |f_{s_k}(t) - \tilde{f}_k(t)| &= \left| \sum_{m=-s_k}^{s_k} c_m e^{2pimt} - \sum_{m=-s_k}^{s_k} c_m e^{2pimj_{r_k}(t)} \right| \leq \\ &\leq \sum_{m=-s_k}^{s_k} |c_m| \cdot |e^{2pimt} - e^{2pimj_{r_k}(t)}| \leq 2 \sum_{m=1}^{s_k} \frac{A}{m^a} \cdot \frac{2pm}{q^{r_k}} \leq \frac{4pAs_k^{2-a}}{2^{r_k}} \leq \frac{4pA(2n_k^{1/(2a-1)})^{2-a}}{n_k^{3a/(2a-1)}} \leq \frac{16pA}{n_k^2}, \end{aligned}$$

а, значит,

$$\begin{aligned} |U_k^*(t) - \tilde{U}_k(t)| &= \left| \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-r_k} f_{s_k}(q^n t) - \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-r_k} \tilde{f}_k(q^n t) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=n_{k-1}}^{n_k-r_k} |f_{s_k}(q^n t) - \tilde{f}_k(q^n t)| \leq (n_k - n_{k-1} - r_k + 1) \frac{16pA}{n_k^2} \leq \frac{16pA}{n_k}. \end{aligned} \quad (33)$$

Но тогда при всех достаточно больших K будет:

$$\text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1): \sum_{j=k_0}^k U_j^*(t) > (1-e)\mathbf{I}(n_k) \right\} \geq \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1): \sum_{j=k_0}^k \tilde{U}_j(t) > (1-\frac{e}{2})\mathbf{I}(n_k) \right\} \quad (34)$$

и аналогично

$$\text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1): \left| \sum_{j=k_0}^k U_j^*(t) \right| > (1+e)\mathbf{I}(n_k) \right\} \geq \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1): \left| \sum_{j=k_0}^k \tilde{U}_j(t) \right| > (1+\frac{3e}{2})\mathbf{I}(n_k) \right\}. \quad (35)$$

Вследствие неравенства (34) для доказательства справедливости при любом $\varepsilon > 0$ соотношения (28), а значит, для завершения доказательства нашей теоремы достаточно показать, что при любом $e \in (0,1)$ выполняется равенство

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1) : \sum_{j=k_0}^k \tilde{U}_j(t) > (1-e)\mathbf{I}(n_k) \right\} = 1,$$

а, значит, равенство

$$\text{mes} \mathbf{I}_{K=k_0}^{\infty} \mathbf{U}_{k=K}^{\infty} \left\{ t \in [0,1) : \sum_{j=k_0}^k \tilde{U}_j(t) > (1-e)\mathbf{I}(n_k) \right\} = 1$$

или, что равносильно, при всех целых $k \geq 0$ равенство

$$\text{mes} \left\{ t \in [0,1) : \sum_{j=k_0}^k \tilde{U}_j(t) > (1-e)\mathbf{I}(n_k) \text{ б.ч.} \right\} = 1 \quad (36)$$

В силу же неравенства (35) и справедливости при любом $\varepsilon > 0$ соотношения (29), при любом $\varepsilon > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \text{mes} \mathbf{U}_{n_k \geq K} \left\{ t \in [0,1) : \left| \sum_{j=k_0}^k \tilde{U}_j(t) \right| > (1+e)\mathbf{I}(n_k) \right\} = 0,$$

а значит, при всех целых $k \geq k_0$ равенство

$$\text{mes} \left\{ t \in [0,1) : \left| \sum_{j=k_0}^k \tilde{U}_j(t) \right| > (1+e)\mathbf{I}(n_k) \text{ б.ч.} \right\} = 0.$$

Поэтому справедливо соотношение

$$\text{mes} \left\{ t \in [0,1) : \left| \sum_{j=k_0}^k \tilde{U}_j(t) \right| > 2\mathbf{I}(n_k) \text{ для всех } k \geq K(t) \right\} = 1. \quad (37)$$

Вследствие неравенства (33), при всех целых $k \geq k_0$ и любом вещественном x , выполняются неравенства

$$G_k^* \left(x - \frac{16pAk}{Sn_k^{3/2}} \right) \leq \tilde{G}_k(x) \leq G_k^* \left(x + \frac{16pAk}{Sn_k^{3/2}} \right).$$

Из этих неравенств, соотношения (31) и того, что при $k \rightarrow \infty$ равномерно по x , $-\infty < x < \infty$,

$$\Phi \left(x \pm \frac{16pAk}{Sn_k^{3/2}} \right) = \Phi(x) + O \left(\frac{k}{n_k^{3/2}} \right) = \Phi(x) + O \left(\frac{k}{(1+t)^{3k/2}} \right)$$

вытекает, что при $k \rightarrow \infty$

$$\tilde{R}_k \equiv \sup_{-\infty < x < \infty} |\tilde{G}_k(x) - \Phi(x)| = O \left(\frac{k^3}{(1+t)^{g_1 k}} \right), \quad (38)$$

где $\gamma_1 > 0$ – постоянная, имеющая тот же смысл, что и в (22). Из соотношения (38), в частности, вытекает, что при $k \rightarrow \infty$

$$\text{mes} \left\{ t \in [0,1) : \sum_{j=k_0}^k \tilde{U}_j(t) > a\mathbf{I}(n_k) \right\} = 1 - \Phi(a\sqrt{2\ln \ln n_k}) + O \left(\frac{k^3}{(1+t)^{g_1 k}} \right)$$

с любой постоянной $a > 0$. Но тогда, с учетом соотношения (10), при всех достаточно больших k будет

$$\frac{1}{k^{(1+c)a^2}} \leq \text{mes} \left\{ t \in [0,1) : \sum_{j=k_0}^k \tilde{U}_j(t) > a\mathbf{I}(n_k) \right\} \leq \frac{1}{k^{a^2}}, \quad (39)$$

каковы бы ни были положительные постоянные a и c .

Теперь, опираясь на то, что функции $\tilde{U}_k(t)$ ($k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$) в промежутке $[0,1)$ статистически независимы, мы стандартным образом (см., например, [11], теорема 1 главы 10) выводим соотношение (36) из соотношений (39) и (37). А это нам и оставалось показать. Теорема 2 доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Koksma J.F.* The theory of asymptotic distribution modulo one// *Composito math.* 1963. Vol.16. № 1-2. P.1-22.
2. *Chintschin A.J.* Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung//*Erg.Math.*1933. Band 2. № 4. Русский перевод: Хинчин А.Я. Асимптотические законы теории вероятностей. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 242 с.
3. *Gál S., Gál L.* The discrepancy of the sequence $\{(2^n x)\}$ // *Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.* 1964. Vol.26. № 2. P.129-143.
4. *Усольцев Л.П.* К закону повторного логарифма в задаче о распределении дробных долей показательной функции // Труды Куйбыш. авиац. ин-та. Математика. 1975. Вып.1. С.24-28.
5. *Усольцев Л.П.* О гипотезе Галов в задаче о распределении дробных долей показательной функции // Проблемы аналитической теории чисел и ее применений. Тезисы докл. Всесоюзн. конф. Вильнюс: ВГУ, 1974. С.269-270.
6. *Усольцев Л.П.* К закону повторного логарифма для распределения, порождаемого дробными долями показательной функции // Конструктивные методы и алгоритмы теории чисел. Тезисы докл. Всесоюзн. шк. Минск: МГУ, 1989. С.150.
7. *Постников А.Г.* Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений // Труды Матем. ин-та им.В.А.Стеклова. Т.82. М.:Наука, 1966.
8. *Усольцев Л.П.* Одна метрическая теорема о распределении дробных долей // Труды Куйбыш. авиац. ин-та. Математика. 1975. Вып.1. С.9-24.
9. *Philipp W.* Das Gesetz vom iterierten Logarithmus für stark mischende stationare Prozesse // *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*1967. Band 8. № 3. S.204-209.
10. *Ибрагимов И.А.* Центральная предельная теорема для сумм функций от независимых величин и сумм вида $\sum f(t2^k)$ // Теория вероят. и ее примен. 1967. Т.12. Вып.4. С.655-665.
11. *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. М.:Наука, 1972. 220 с.

Поступила 24.01.2004 г.