Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Гревцев, Нахождение оптимального решения многокритериальных задач,
Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 1998, выпуск 6, 135–136

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu18>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 11:14:22

Математическая теория управления и оптимизации

УДК 519.81

О.И. Гревцев

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Предлагается метод иерархий для решения задач определения приоритетов и распределения ресурсов. Он применяется в случае, когда признаки сравниваемых объектов аналитически не связаны между собой. Получено оптимальное решение практической задачи.

Успешное решение многих практических задач часто зависит от рационального использования имеющихся ресурсов. Решению этой проблемы в немалой степени способствует разработка математических моделей распределения и перераспределения ресурсов с помощью методов линейного программирования.

Однако в случае, когда целевая функция зависит от нескольких переменных, функционально не связанных между собой, применение методов линейного программирования становится невозможным.

В данной работе предлагается рассмотреть иерархический метод оптимизации решения подобных задач. Множество элементов, отражающих сложную ситуацию, можно объединить в группы в соответствии с основными свойствами элементов. Такая модель позволяет повторять данный процесс так, что группы, или их общие свойства, рассматриваются в качестве элементов следующего уровня системы. Эти элементы в свою очередь, могут быть сгруппированы в соответствии с другими выделенными свойствами, создавая элементы ещё более высокого уровня, и так до тех пор, пока не будет достигнута цель процесса принятия решения. Эта система наслаивания уровней, каждый из которых характеризуется множеством признаков, называется иерархией.

Неравномерность влияния признаков на достижение конечной цели приводит к необходимости определения интенсивности влияния признаков. Определение приоритетов признаков относительно цели сводится к последовательности задач определения приоритетов признаков для каждого уровня, а каждая такая задача – к последовательности попарных сравнений.

Пусть имеется некоторый набор $\{W_i\}$, $i=1, \dots, n$ истинных значений важности каждого из признаков. Составленная матрица сравнения признаков $A=(a_{ij})_{n \times n}$ будет согласованной, если $a_{ij}=W_i/W_j$.

Отметим ее основные свойства:

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}, \quad a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}. \quad (1)$$

Для согласованной матрицы справедливо следующее свойство: собственное значение матрицы $A(a_{ij})_{n \times n}$ равно порядку матрицы. Для матричного уравнения

$$AW = \lambda W \quad (2)$$

имеем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} W_j = \lambda W_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Разделив обе части на W_i , получим

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} W_j / W_i = \lambda. \quad (4)$$

Но $a_{ij} W_j / W_i = 1$, следовательно, $\lambda = n$.

Исходя из того, что $\text{rang } A = 1$, можно сделать вывод, что наибольшее собственное значение матрицы A равняется n , а остальные собственные значения равны 0.

В случае согласованной матрицы вектор - столбец W определит приоритеты рассматриваемых объектов. Однако матрица, составленная экспертом, может оказаться несогласованной. Тогда в общем случае будем считать, что указанные оценки объектов $(W_1, \dots, W_n)$ должны удовлетворять условию

$$AW = \lambda_{\max} W, \quad (5)$$

где $\lambda_{\max}$ – наибольшее из собственных значений A .

Учитывая, что собственные значения матрицы являются непрерывными функциями ее элементов [3], имеем при малых изменениях элементов матрицы наибольшее из собственных значений $\lambda_{\max}$, близких к n , а остальные λ_i будут близки к 0. Отклонение $\lambda_{\max}$ от n определяет меру согласованности матрицы A .

Рассмотрим применение этого метода для решения практической задачи.

Одной из актуальных задач в практической деятельности различных служб, требующей выбора оптимального решения из множества альтернатив, является, например, задача определения оптимального плана доставки личного состава на пункт сбора по сигналу тревоги из районов проживания.

Учитывая недостаток автотранспорта, постановка задачи уточняется: требуется за минимальное время доставить на пункт сбора как можно больше людей.

Для решения поставленной задачи необходимо построить оптимальный план следования автотранспорта, учитывая при этом следующие условия:

- 1) удаленность от места сбора;
- 2) количество личного состава, проживающего в микрорайоне (квадрате);
- 3) компактность проживания;
- 4) состояние дороги.

При данной постановке задачи признаки, по-разному влияющие на конечную цель, не связаны между собой единой зависимостью, поэтому используется метод иерархии.

Решение задачи представляется в виде следующих этапов.

1. Эксперту предлагается попарно сравнить признаки, характеризующие квадраты по шкале оценок, т.е. составляется матрица взаимных суждений $A = (a_{ij})$, определяются приоритеты каждого n -го признака по формуле [2]

$$PR_k = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{kj}}}{\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{kj}}} . \quad (6)$$

Предлагаемый метод позволяет не только определить приоритеты (важности) признаков относительно конечной цели, но и оценить правильность оценки этих признаков. Чтобы оценить согласованность (правильность) суждений, данных экспертом в произвольной матрице, определяется собственное значение матрицы

$$\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{kj} \right) PR_j , \quad (7)$$

относительная величина отклонения, называемая индексом согласованности

$$ИС = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} \quad (8)$$

и величина отношения согласованности ОС.

Если величина ОС больше 20%, эксперту предлагается пересмотреть свои оценки так, чтобы они были близки к значениям согласованной матрицы.

2. Попарно сравниваются квадраты относительно каждого признака и определяется ценность (приоритет) квадрата относительно каждого признака, а также проверяется согласованность экспертных оценок.

3. С помощью найденных приоритетов определяется глобальный приоритет (вес) каждого квадрата относительно поставленной цели.

На основании найденных глобальных приоритетов определяется очередность маршрутов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жамбю М. Иерархический кластер-анализ и соответствия. М.: Финансы и статистика, 1988.
2. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. М.: Радио и связь, 1991.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.