Общероссийский математический портал

Ю. И. Кадашевич, С. П. Помыткин, Эндохронная теория ползучести, учитывающая конечные деформации, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 83–85

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:30:43

Механика деформируемого твердого тела

УДК 539.374

Ю.И.Кадашев, С.П.Помыткин

ЭНДОХРОННАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Анализируется один из важных вопросов построения эндохронной теории неупругости для конечных деформаций – учет временных эффектов.

Еще в работе [1] Шепери предложил рассматривать уравнение связи между напряжениями S и деформациями e в виде

$$S = \int_0^x L(x-x') \frac{de}{dx'} dx', \quad dx = g(e, \dot{e}) dt.$$

В работах [2, 3] были предложены соотношения эндохронного типа в форме

$$s' = \int_0^z L_1(z-z') \frac{dr'}{dz'} dz', \quad e' = \int_0^z L_2(z-z') \frac{dr'}{dz'} dz', \quad \frac{dz}{dr} = y(r, \dot{r}),$$

где $dr = \sqrt{dr' : dr'}$; $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$; t - время; s' , e' , r' - девиаторы тензоров напряжений, деформаций и вспомогательного параметрического тензора, соответственно. В этот класс теорий входят

большинство известных моделей вязкоупругости и вязкопластичности эндохронного типа, включая классический вариант К.С.Валаниса [4], теория Д.Л.Быкова [5], предложения Г.Д.Федоровского [6] и В.С.Клеева [7].

В работе [8] авторы данной публикации показали, как эндохронную теорию пластичности можно распространить на случай конечных деформаций. Поступим аналогичным образом в модели ползучести. Для этого рассмотрим один из простейших вариантов эндохронной теории, учитывающей временные эффекты для малых деформаций. Это будут, по нашему мнению, определяющие уравнения следующего вида:

$$\frac{s'_{ij}}{2G} + \frac{at}{2G} \frac{ds'_{ij}}{dr} = t \frac{dr'_{ij}}{dr} + \frac{r'_{ij}}{g+a}; \quad (1)$$

$$r'_{ij} = e'_{ij} - (1-a) \frac{s'_{ij}}{2G}; \quad dr = \sqrt{dr'_{ij} : dr'_{ij}}; \quad t = t(r, \dot{r}); \quad e_0 = \frac{s_0}{K}.$$

Здесь t - аналог деформационного предела текучести; g - аналог коэффициента упрочнения; G - модуль сдвига; K - объемный модуль; a - параметр эндохронности; $0 < a < 1$, $e_0 = e_{ii}$, $s_0 = s_{ii}$.

В дальнейшем используется безындексная форма записи тензоров.

Введем приведенные деформации и приведенные напряжения по формулам

$$E = Q_e^T e Q_e, \quad T = Q_e^T s Q_e, \quad N = Q_e^T r Q_e; \\ \dot{E} = Q_e^T D Q_e, \quad \dot{T} = Q_e^T \dot{s} Q_e, \quad \dot{N} = Q_e^T \dot{r} Q_e, \quad (2)$$

где Q_e - ортогональный тензор поворота; D - тензор скоростей деформации: $D = (L + L^T)/2$,

$L = \dot{F}_e F_e^{-1}$, причем $Q_e = F_e u^{-1}$ - полярное разложение ортогонального тензора поворота; F_e - градиент деформации; u - правый тензор удлинения. Фактически здесь вводится мера деформации по формуле

$$\mathbf{e} = \mathbf{Q}_e \left(\int \mathbf{Q}_e^T \mathbf{D} \mathbf{Q}_e dt \right) \mathbf{Q}_e^T. \quad (3)$$

В этих обозначениях основные определяющие уравнения (1) примут вид

$$a t \dot{T} + T |\dot{E}| = 2G \left(t \dot{N} + \frac{1}{g+a} N \right). \quad (4)$$

Определение (3) удобно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} D &= \mathbf{e}, \\ \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \Omega_e - \Omega_e \mathbf{e} &= \mathbf{e}^*, \\ \Omega_e &= \dot{\mathbf{Q}}_e \mathbf{Q}_e^T. \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Проведем над уравнением (4) операцию обратной свертки $\mathbf{Q}_e(\bullet)\mathbf{Q}_e$, аналогичную (2). В результате получим

$$a t \dot{s} + s |r| = 2G \left(t r + \frac{1}{g+a} |r| \right), \quad t = t(I, |D|). \quad (6)$$

Для иллюстрации метода построения и решения определяющих уравнений теории ограничимся самым простым вариантом теории, когда $a=1$, $g=\infty$, $2G=1$, $t=k_0|\dot{\mathbf{e}}|$. Тогда предлагаемая теория для малых деформаций имеет вид

$$s + k_0 \dot{s} = k_0 \dot{\mathbf{e}}.$$

Очевидно, что при $s = s_0 = \text{const}$ реализуется линейная ползучесть, а при $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 = \text{const}$ происходит классическая релаксация напряжений.

Для больших (конечных) деформаций система (5), (6) принимает вид

$$s + \frac{t}{|D|} \dot{s} = t \frac{D}{|D|}, \quad (7)$$

$$\mathbf{e}^* = D. \quad (8)$$

Если принять, что $t = k_0 |D|$, (7) переходит в

$$s + k_0 \dot{s} = k_0 D.$$

Сразу отметим, что задачи жесткого нагружения, как и в теории пластичности, решаются достаточно просто (включая задачи релаксации, когда $D=0$). Решение задач мягкого нагружения, включая чистую ползучесть при $\dot{s}=0$, встречает технические трудности. Однако, применяя метод последовательных приближений, можно получить необходимые результаты. В частности, остановимся на плоском случае, когда градиент деформации F_e и тензор скоростей деформации D имеют следующую структуру:

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & -D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad F_e = \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} \frac{\dot{b}}{b} & \frac{\dot{a} b - b \dot{a}}{2} & 0 \\ \frac{\dot{a} b - b \dot{a}}{2} & -\frac{\dot{b}}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_e = \begin{pmatrix} \cos b & \sin b & 0 \\ -\sin b & \cos b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{tg } b = \frac{a \cdot b}{1+b^2}; \quad \Omega_e = \dot{\mathbf{Q}}_e \quad \mathbf{Q}_e^T = \dot{\mathbf{b}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этих условиях определяющие соотношения теории можно представить следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_{11} - 2\dot{b}e_{12} = D_{11}, \\ \dot{e}_{12} + 2\dot{b}e_{11} = D_{12}, \\ s_{11} + k_0(\dot{s}_{11} - 2\dot{b}s_{12}) = k_0D_{11}, \\ s_{12} + k_0(\dot{s}_{12} + 2\dot{b}s_{11}) = k_0D_{12}. \end{array} \right.$$

Отметим, что параметры a и b могут быть выражены через $D_{11}(t)$ и $D_{12}(t)$ по следующим формулам:

$$a = 2 \sqrt{M_1} \cdot M_2, \quad b = \sqrt{M_1}.$$

Кроме того, $tg b = \frac{2M_1M_2}{1+M_1}$ и $\dot{b} = 2 \frac{(1+M_1)D_{12} + 2M_1M_2D_{11}}{(1+M_1)^2 + (2M_1M_2)^2}$. Здесь $M_1 = \exp\left(2 \int_0^t D_{11}(t) dt\right)$ и $M_2 = \int_0^t D_{12}(t) \cdot \exp\left(-2 \int_0^t D_{11}(t) dt\right) dt$.

При $D_{11} = const = D_{11}^0$ и $D_{12} = const = D_{12}^0$ формулы существенно упрощаются:

$$tg b = \frac{D_{12}^0}{D_{11}^0} \cdot th(D_{11}^0 \cdot t) \quad \text{и} \quad \dot{b} = \frac{D_{12}^0}{ch^2(D_{11}^0 \cdot t) + \left(\frac{D_{12}^0}{D_{11}^0} \cdot sh(D_{11}^0 \cdot t)\right)^2}.$$

Еще раз подчеркнем, что при решении задач мягкого нагружения целесообразно в качестве первого приближения принять $\dot{b} = 0$, а затем в процессе решения уточнять значение b . Интересно, что при чистой ползучести, когда $\dot{s}_{12} = 0$, кроме деформации e_{12} возникает и развивается деформация e_{11} , а при чистой релаксации в условиях сдвига, когда $D_{12} = 0$, релаксирует не только напряжение s_{12} , но и напряжение s_{11} .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Schapery R.A. On a thermodynamic constitutive theory and its application to various nonlinear materials // *Thermoinelasticity: Proceedings of the IUTAM Symposium*. East Kilbride, 1968. Wien-New York: Springer Verlag, 1970. P.259-285.
2. Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б. Эндохронные теории пластичности: основные положения, перспективы развития // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. 1989. N1. С. 161–168.
3. Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б. Эндохронная теории пластичности, учитывающая угол вида неупругой деформации // *ДАН СССР*. 1991. Т.317. N1. С. 53–57.
4. Valanis K.C.. A theory of viscoplasticity without a yield surface. Pt.I-II. // *Archiwum Mechaniki Stosowanej*. 1971. Vol.23. N4. P. 517–551.
5. Быков Д.Л., Коновалов Д.Н. Особенности сопротивления вязкоупругих материалов при потере устойчивости тонкостенных конструкций // *Физика процессов деформации и разрушения и прогнозирование механического поведения материалов. Актуальные проблемы прочности. Труды XXXVI международного семинара*. Ч.2. Витебск, 2000. С. 428–433.
6. Федоровский Г.Д. Эндохронные критерии прочности, текучести и фазовой устойчивости // *Проблемы механики деформируемого твердого тела*. Санкт-Петербург: СПбГУ, 2002. С.291-298.
7. Кадашевич Ю.И., Клеев В.С. Учет изменения скорости деформирования при построении определяющих уравнений неупругих материалов // *Прикладные проблемы прочности и пластичности*. Горький: Горьковский гос. университет, 1981. N 18. С. 20–23.
8. Кадашевич Ю.И., Помяткин С.П. Новые принципы составления определяющих уравнений эндохронной теории пластичности при конечных деформациях // *Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства*. Санкт-Петербург: СПбГУРП, 1996. С.124-127.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования Российской Федерации (грант КЦФЕ Е-02-4.0-158).

Поступила 14.12.2003 г.