Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Э. Сеницкий, И. Е. Козьма, Собственные колебания неоднородной цилиндрической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 86–93

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 11:52:32

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КОНЕЧНОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Сформулирована новая начально-краевая задача для нерассматриваемой ранее непрерывно-неоднородной цилиндрической оболочки при произвольных законах изменения упругих и инерционных характеристик материала. Построено оригинальным методом конечных интегральных преобразований новое, точное в рамках сформулированной модели решение задачи о свободных колебаниях и упругих условиях закрепления по торцам. Разработано программное обеспечение, проведен численный анализ результатов в части свободных колебаний неоднородных и однородных оболочек.

В современных условиях эксплуатации ряд специальных ответственных сооружений, к которым относятся защитные оболочки атомных электростанций, энергетических и химических реакторов, конструкции резервуаров, дымовых труб, технологических печей, наряду с силовыми (статическими, динамическими) нагрузками испытывают также воздействия различных физико-механических и химических полей. В результате происходят взаимодействия оболочки с агрессивными средами, ионизирующим излучением, высокими температурными полями. Это приводит к деградации механических и прочностных характеристик материала конструкций, для которых подобные воздействия являются факторами наведенной неоднородности. Последняя, в свою очередь, учитывается путем введения в математическую модель двух безразмерных функций неоднородности упругих $f_1(r)$ и инерционных $f_2(r)$ характеристик материала конструкции. Таким образом, исследование свободных колебаний и динамической реакции элементов конструкций с учетом изменения их упругих и инерционных характеристик, представляет сложную малоизученную проблему строительной механики.

Р и с. 1. Схема оболочки

В настоящей работе, эффективным методом обобщенных конечных интегральных преобразований (КИП) приводится точное новое решение осесимметричной задачи о свободных колебаниях для упруго закрепленной по торцам нетонкой круговой цилиндрической оболочки при произвольных законах изменения модуля упругости $E(r)$ и плотности $\gamma(r)$ по толщине конструкции: $-h_1 \leq r \leq h_2$ (h_1 и h_2 – расстояния от нейтральной до лицевых поверхностей оболочки). Исследование проводится на основе уточненной линейной технической теории оболочек, осложненной учетом деформаций поперечного сдвига и инерцией вращения поперечных сечений.

Постановка задачи. Будем рассматривать круговую в плане цилиндрическую оболочку радиуса R , толщиной $h=h_1+h_2$ и длиной H в соответствующей системе координат r, Θ, z (рис.1).

Так как учитывается неоднородность оболочки, то для произвольных функций $E(r)$ и $\gamma(r)$ справедливо представление:

$$E(r) = E_0 f_1(r), \quad \gamma(r) = \gamma_0 f_2(r), \quad \nu = \text{const}. \quad (1)$$

Здесь E_0, γ_0, ν – модуль упругости, плотность материала и коэффициент Пуассона соответствующей однородной оболочки.

Если определить теперь положение нейтральной поверхности из условия

$$\int_{-h_1}^{h_2} f_1(r) r dr = 0, \quad (2)$$

то формулы для внутренних усилий записываются также, как и для однородной оболочки.

Дифференциальные уравнения осесимметричного движения цилиндрической оболочки и соответствующие краевые (граничные и начальные) условия в случае упругого закрепления ее торцов формулируются следующим образом [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + (1+n+k^2) \frac{\partial W}{\partial z} + k^2(\Psi - U) - m^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= 0; \\ k^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - (1+n+k^2) \frac{\partial U}{\partial z} - 2(1+n)W - m^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{k^2}{\Omega^2} g_{12} \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \Psi - U \right) - S^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\text{при } z=0, H: \quad \frac{\partial U}{\partial z} + (1+n)W = \mathbf{m}r_{11}U; \quad k^2 \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \Psi - U \right) = \mathbf{m}r_{33}W; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \mathbf{m}r_{44}\Psi; \quad (4)$$

$$\text{при } t=0: \quad U = U_0(z), \quad W = W_0(z), \quad \Psi = \Psi_0(z), \quad \frac{\partial U}{\partial t} = \dot{U}_0(z), \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \dot{W}_0(z), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \dot{\Psi}_0(z). \quad (5)$$

Здесь U, W – безразмерные (отнесенные к радиусу нейтральной поверхности оболочки R) тангенциальная и нормальная компоненты вектора перемещений; Ψ – углы поворота поперечных сечений; z, t – безразмерные координата и время, причем

$$U = \frac{U^*}{R}; \quad W = \frac{W^*}{R}; \quad z = \frac{z^*}{R}; \quad H = \frac{H^*}{R}; \quad t = t^* \frac{1}{R} \sqrt{\frac{E_0}{r_0(1-n^2)}}; \quad (6)$$

$$k^2 = \frac{k_1(1-n)}{2}; \quad m^2 = (1+\Omega^2)g_1; \quad S^2 = (1+1.8\Omega^2)g_2; \quad \Omega = h(\sqrt{12}R)^{-1}; \quad (7)$$

$$g_1 = m_1 n_1^{-1}; \quad g_2 = m_2 n_2^{-1}; \quad g_{12} = n_1 n_2^{-1}, \quad (8)$$

k_1 – коэффициент поперечного сдвига, определяемый в соответствии с предложением Миндлина [2]; r_{11}, r_{33}, r_{44} – безразмерные коэффициенты жесткости упругого закрепления торцов, для которых

$$r_{11} = \frac{r_{11}^* R}{C}, \quad r_{33} = \frac{r_{33}^* R}{C}, \quad r_{44} = \frac{r_{44}^* R}{D}, \quad C = \frac{E_0 h}{1-n^2} n_1, \quad D = \frac{E_0 h^3}{12(1-n^2)} n_2. \quad (9)$$

Звездочкой обозначены соответствующие размерные величины.

Безразмерные коэффициенты неоднородности упругих и инерционных характеристик оболочки выражаются через функции $f_1(r), f_2(r)$ по таким зависимостям [1]:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{h} \int_{-h_1}^{h-h_1} f_1(r) dr, \quad n_2 = \frac{12}{h^3} \int_{-h_1}^{h-h_1} f_1(r) r^2 dr, \\ m_1 &= \frac{1}{h \left(1 + \frac{h^2}{12R^2} \right)} \int_{-h_1}^{h-h_1} f_2(r) \left(1 + 2 \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} \right) dr, \quad m_2 = \frac{12}{h^3 \left(1 + \frac{3h^2}{20R^2} \right)} \int_{-h_1}^{h-h_1} f_2(r) r^2 \left(1 + 2 \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} \right) dr, \end{aligned} \quad (10)$$

$U_0(z), W_0(z), \Psi_0(z), \dot{U}_0(z), \dot{W}_0(z), \dot{\Psi}_0(z)$ – известные функции, определяющие положение оболочки в начальный момент времени $t=0$.

Если положить $f_1(r) = f_2(r) = 1$, то из (2) следует $h_1 = h_2 = h/2$, а из (10) и (8) соответственно имеем $n_1 = n_2 = m_1 = m_2 = 1$, $g_1 = g_2 = g_{12} = 1$, и соотношения (3) становятся дифференциальными уравнениями движения для однородной цилиндрической оболочки [4]. Уравнения (3) – (5) и представляют собой математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи.

Построение общего решения. Используется обобщенное КИП по пространственной переменной z [3], т. е. применяется к (3) – (6) прямое конечное интегральное преобразование с неизвестными пока компонентами $G_1(I_i, z), G_2(I_i, z), G_3(I_i, z)$ вектор – функции ядра и весовыми коэффициентами b_1, b_2, b_3 , определяемыми в процессе решения задачи, вида

$$j(I_i, t) = \int_0^H [b_1 U(z, t) G_1(I_i, z) + b_2 W(z, t) G_2(I_i, z) + b_3 \Psi(z, t) G_3(I_i, z)] dz. \quad (11)$$

При этом справедливы следующие формулы обращения [3]:

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} j G_1 \|G_i\|^{-2}, \quad W = \sum_{i=1}^{\infty} j G_2 \|G_i\|^{-2}, \quad \Psi = \sum_{i=1}^{\infty} j G_3 \|G_i\|^{-2}. \quad (12)$$

Здесь $\|G_i\|^2$ - квадрат нормы вектор-функции ядра преобразования, т. е.

$$\|G_i\|^2 = \int_0^H \left[b_1 G_1^2(I_i, z) + b_2 G_2^2(I_i, z) + b_3 G_3^2(I_i, z) \right] dz, \quad (13)$$

где I_i - вещественные параметры, образующие счетное множество $\left(i = \overline{1, \infty} \right)$.

Выражение (11) представляет трансформанту, а формулы обращения (12) справедливы при выполнении следующего соотношения обобщенной ортогональности:

$$\int_0^H \left[b_1 G_1(I_i, z) G_1(I_j, z) + b_2 G_2(I_i, z) G_2(I_j, z) + b_3 G_3(I_i, z) G_3(I_j, z) \right] dz = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j; \\ \|G_i\|^2, & \text{если } i = j. \end{cases} \quad (14)$$

Воспользовавшись структурным алгоритмом метода КИП, разработанного одним из авторов [3], сначала умножаем первое, второе и третье уравнения (3), а также первое и четвертое, второе и пятое, третье и шестое, и начальные условия (5) соответственно на $b_1 G_1(I_i, z)$, $b_2 G_2(I_i, z)$, $b_3 G_3(I_i, z)$ и интегрируем полученное в интервале $[0, H]$. Выполняя вычисления квадратур по частям для членов, содержащих производные по пространственной переменной z , а затем складывая уравнения и соответствующие начальные условия, получаем

$$\begin{aligned} & \Phi(U, W, \Psi, G_1, G_2, G_3) \Big|_0^H + \int_0^H \left\{ U \left[b_1 G_1'' - k^2 b_1 G_1 + (1+n+k^2) b_2 G_2 + \frac{k^2}{\Omega^2} g_{12} b_3 G_3 \right] + \right. \\ & + W \left[-(1+n+k^2) b_1 G_1' + k^2 b_2 G_2' - 2(1+n) b_2 G_2 + \frac{k^2}{\Omega^2} g_{12} b_3 G_3' \right] + \\ & \left. + \Psi \left[k^2 b_1 G_1 - k^2 b_2 G_2' + b_3 G_3 - \frac{k^2}{\Omega^2} g_{12} b_3 G_3 \right] dz - \frac{d^2}{dt^2} j(I_i, t) \right\} = 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$j(I_i, 0) = j_0(I_i), \quad \frac{d}{dt} j(I_i, t) \Big|_{t=0} = \dot{j}_0(I_i). \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} 1) \quad \Phi(U, W, \Psi, G_1, G_2, G_3) = & \left\{ b_1 \left[\frac{\partial U}{\partial z} G_1 - U G_1' + W G_1 (1+n+k^2) \right] + b_2 \left[k^2 \frac{\partial W}{\partial z} G_2 - k^2 W G_2' - U G_2 (1+n+k^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + k^2 \Psi G_2 \right] + b_3 \left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} G_3 - \Psi G_3' - \frac{k^2}{\Omega^2} g_{12} W G_3 \right] \right\}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad j_0(I_i) = & \int_0^H \left[b_1 U_0(z) G_1(I_i, z) + b_2 W_0(z) G_2(I_i, z) + b_3 \Psi_0(z) G_3(I_i, z) \right] dz \\ \dot{j}_0(I_i) = & \int_0^H \left[b_1 \dot{U}_0(z) G_1(I_i, z) + b_2 \dot{W}_0(z) G_2(I_i, z) + b_3 \dot{\Psi}_0(z) G_3(I_i, z) \right] dz. \end{aligned} \quad (18)$$

Воспользуемся двумя известными условиями структурного алгоритма метода КИП [3], соответствующими рассматриваемой самосопряженной задаче. Первое из них представляет равенство нулю билинейной формы (17) на концах интервала, а второе - операционное свойство

$$\Phi(U, W, \Psi, G_1, G_2, G_3) \Big|_0^H = 0; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^H \left\{ U \left[b_1 G_1'' - k^2 b_1 G_1 + (1+n+k^2) b_2 G_2 + \frac{k^2}{\Omega^2} g_{12} b_3 G_3 \right] + \right. \\ & + W \left[-(1+n+k^2) b_1 G_1' + k^2 b_2 G_2' - 2(1+n) b_2 G_2 + \frac{k^2}{\Omega^2} g_{12} b_3 G_3' \right] + \\ & \left. + \Psi \left[k^2 b_1 G_1 - k^2 b_2 G_2' + b_3 G_3 - \frac{k^2}{\Omega^2} g_{12} b_3 G_3 \right] dz - \frac{d^2}{dt^2} j(I_i, t) \right\} = \end{aligned}$$

$$= -I_i \int_0^H \{ [b_1 U G_1 + b_2 W G_2 + b_3 \Psi G_3] \} dz. \quad (20)$$

В результате (15) становится уравнением для трансформанты $j(I_i, t)$. В соответствии с методом квазинормальных координат [5], вводим в это уравнение силы упруго-вязкого сопротивления (внутреннего трения). Такой прием основан на экспериментально подтвержденном факте о том, что силы вязкого сопротивления практически не оказывают влияния на формы колебаний конструкции и их следует вводить в математическую модель после отделения пространственной переменной z . Обозначив через g_i коэффициент потерь для каждой моды колебаний i , силу внутреннего трения, следуя скорректированной частотно-независимой гипотезе Фойхта, можно представить в виде [5]

$$T(I_i, t) = g_i I_i \frac{dj(I_i, t)}{dt}. \quad (21)$$

Учитывая это, уравнение (15) для трансформанты $j(I_i, t)$ при условиях (19), (20) и сил внутреннего трения (21) записывается так:

$$\frac{d^2 j(I_i, t)}{dt^2} + I_i j(I_i, t) + g_i I_i \frac{dj(I_i, t)}{dt} = 0, \quad i = \overline{1, \infty}. \quad (22)$$

Решение однородного дифференциального уравнения (22) при соответствующих начальных условиях (18) может быть представлено в виде

$$j(I_i, t) = e^{-b_i t} \left[j_0(I_i) (\cos a_i t + b_i a_i^{-1} \sin a_i t) + \dot{j}_0(I_i) a_i^{-1} \sin a_i t \right], \quad (23)$$

где $b_i = \frac{I_i g_i}{2}$; $a_i = I_i \sqrt{1 - \frac{g_i^2}{4}}$.

Возвращаясь теперь к ядровой задаче, т. е. к соотношениям (19), (20), замечаем, что из операционного свойства (20) следует сопряженная система дифференциальных уравнений для G_1, G_2, G_3 вида

$$\begin{aligned} b_1 G_1'' - k^2 b_1 G_1 + (1+n+k^2) b_2 G_2' + \frac{k^2}{\Omega^2} g_{12} b_3 G_3 + I_i^2 b_1 G_1 &= 0; \\ k^2 b_2 G_2'' - 2(1+n) b_2 G_2 - (1+n+k^2) b_1 G_1' + \frac{k^2}{\Omega^2} g_{12} b_3 G_3' + I_i^2 b_2 G_2 &= 0; \\ b_3 G_3'' - \frac{k^2}{\Omega^2} g_{12} b_3 G_3 + k^2 b_1 G_1 - k^2 b_2 G_2' + I_i^2 b_3 G_3 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Исходная система уравнений (3) инвариантна полученной системе (24), если принять весовые коэффициенты равными: $b_1 = b_2 = 1$, $b_3 = \frac{\Omega^2}{g_{12}}$. Из (24) находим

$$\begin{aligned} G_1'' - k^2 G_1 + (1+n+k^2) G_2' + k^2 G_3 + I_i^2 G_1 &= 0; \\ k^2 G_2'' - 2(1+n) G_2 - (1+n+k^2) G_1' + k^2 G_3' + I_i^2 G_2 &= 0; \\ G_3'' - \frac{k^2}{\Omega^2} g_{12} G_3 + \frac{k^2}{\Omega^2} g_{12} G_1 - \frac{k^2}{\Omega^2} g_{12} G_2' + I_i^2 G_3 &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Выразив из условий (5) U', W', Ψ' и подставив полученные выражения в равенства (17) и (19), будем иметь

$$\begin{aligned} \left\{ U \left[\mathbf{m}_{11} G_1 - G_1' + k^2 G_2 - (1+n+k^2) G_2 \right] + W \left[-(1+n) G_1 + (1+n+k^2) G_1 \mathbf{m}_{33} G_2 - k^2 G_2' - k^2 G_3 \right] + \right. \\ \left. + \Psi \left[-k^2 G_2 + k^2 G_2 \mathbf{m} \frac{\Omega^2}{g_{12}} r_{44} G_3 - \frac{\Omega^2}{g_{12}} G_3' \right] \right\} \Big|_{z=0, H} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Поскольку U, W, Ψ не определены на концах интервала $[0, H]$ и $U \neq 0, W \neq 0, \Psi \neq 0$, то из равенства (26) следуют такие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 \quad G_1' + (1+n) G_2 + r_{11} G_1 &= 0, \quad k^2 (G_2' - G_1 + G_3) + r_{33} G_2 = 0, \quad G_3' + r_{44} G_3 = 0; \\ \text{при } z=H \quad G_1' + (1+n) G_2 - r_{11} G_1 &= 0, \quad k^2 (G_2' - G_1 + G_3) - r_{33} G_2 = 0, \quad G_3' - r_{44} G_3 = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

В результате получаем однородную краевую задачу (25), (27) для компонентов G_1, G_2, G_3 вектор-функции ядра КИП $\bar{G}$:

$$\bar{G}(I_i, z) = \|G_1(I_i, z) \ G_2(I_i, z) \ G_3(I_i, z)\|^T. \quad (28)$$

Представляя систему (25) в матричной форме и раскрывая ее главный детерминант, получаем разрешающее дифференциальное уравнение относительно $\bar{G}$ вида

$$\frac{d^6 \bar{G}}{dz^6} + a_{4i} \frac{d^4 \bar{G}}{dz^4} + a_{2i} \frac{d^2 \bar{G}}{dz^2} + a_{0i} \bar{G} = 0, \quad i = \overline{1, \infty}. \quad (29)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{4i} &= k^{-2} [I_i^2 + n^2 - 1 + 2k^2(I_i^2 + n + 1)], \\ a_{2i} &= k^{-2} \left\{ I_i^2(k^2 - 1)(3 + 2n) + 2k^2(1 + n) + I_i^2 [I_i^2(2 + k^2) + n^2] + (k\Omega^{-1})^2 g_{12}(1 - I_i^2 - n^2 - 2k^4) \right\}, \\ a_{0i} &= k^{-2} \left\{ 2I_i^2(1 + n) [(k\Omega^{-1})^2 g_{12} + k^2 - I_i^2] + I_i^4 [I_i^2 - k^2 - (k\Omega^{-1})^2 g_{12}] \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Установим связь между компонентами вектор-функции ядра G_1, G_2, G_3 и разрешающей функцией $\bar{G}$. Для этой цели воспользуемся первыми двумя уравнениями системы (25) и представлением

$$G_3(I_i, z) = k^2 \bar{G}^{IV} + [I_i^2(k^2 + 1) + 2k^2 - (1 + n)^2] \bar{G}^{II} + (k^2 - I_i^2)(2 + n - I_i^2) \bar{G}. \quad (31)$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} G_1(I_i, z) &= k^2(1 + n) \bar{G}^{II} + k^2 [2(1 + n) - I_i^2] \bar{G}; \\ G_2(I_i, z) &= -k^2 \left[\bar{G}^{III} + (1 + I_i + n) \bar{G}^I \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Соответствующее (29) характеристическое бикубическое уравнение 6-й степени имеет вид

$$r_i^6 + a_{4i} r_i^4 + a_{2i} r_i^2 + a_{0i} = 0. \quad (33)$$

Анализируя решение (33), можно утверждать, что корни r_i могут быть действительными, чисто мнимыми и комплексно-сопряженными. Для всех комбинаций корней характеристического уравнения (33) общее решение уравнения (29) можно представить в следующей форме:

$$\bar{G}(I_i, z) = \sum_{n=1}^6 C_{ni} e^{r_{ni} z}, \quad j = \sqrt{-1}, \quad i = \overline{1, \infty}, \quad (34)$$

причем $r_{ni} = a_{ni} + b_{ni} j$ ($n = \overline{1, 6}$) - корни бикубического уравнения (33), а C_{ni} - произвольные постоянные, определяемые из граничных условий (27). Для этого сначала подставляем производные выражения (34) в (31) и (32). В результате получим

$$\begin{aligned} G_1(I_i, z) &= k^2 \sum_{n=1}^6 C_{ni} [(1 + n)(a_{ni} + b_{ni} j)^2 + 2(1 + n) - I_i^2] e^{(a_{ni} + b_{ni} j)z}; \\ G_2(I_i, z) &= -k^2 \sum_{n=1}^6 C_{ni} (a_{ni} + b_{ni} j) [(a_{ni} + b_{ni} j)^2 + (1 + I_i^2 + n)] e^{(a_{ni} + b_{ni} j)z}; \\ G_3(I_i, z) &= \sum_{n=1}^6 C_{ni} \left\{ k^2 (a_{ni} + b_{ni} j)^4 + [I_i^2(k^2 + 1) + 2k^2 - (1 + n)^2] (a_{ni} + b_{ni} j)^2 + \right. \\ &\quad \left. + (k^2 - I_i^2)(2 + n - I_i^2) e^{(a_{ni} + b_{ni} j)z} \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Удовлетворяя равенствами (35) граничные условия (27) , получаем следующую однородную систему алгебраических уравнений относительно постоянных $C_{ni} \left(n = \overline{1, 6} \right)$:

$$\begin{cases} d_{11}^{(i)} C_{1i} + d_{12}^{(i)} C_{2i} + d_{13}^{(i)} C_{3i} + d_{14}^{(i)} C_{4i} + d_{15}^{(i)} C_{5i} + d_{16}^{(i)} C_{6i} = 0, \\ d_{21}^{(i)} C_{1i} + d_{22}^{(i)} C_{2i} + d_{23}^{(i)} C_{3i} + d_{24}^{(i)} C_{4i} + d_{25}^{(i)} C_{5i} + d_{26}^{(i)} C_{6i} = 0, \\ d_{31}^{(i)} C_{1i} + d_{32}^{(i)} C_{2i} + d_{33}^{(i)} C_{3i} + d_{34}^{(i)} C_{4i} + d_{35}^{(i)} C_{5i} + d_{36}^{(i)} C_{6i} = 0, \\ d_{41}^{(i)} C_{1i} + d_{42}^{(i)} C_{2i} + d_{43}^{(i)} C_{3i} + d_{44}^{(i)} C_{4i} + d_{45}^{(i)} C_{5i} + d_{46}^{(i)} C_{6i} = 0, \\ d_{51}^{(i)} C_{1i} + d_{52}^{(i)} C_{2i} + d_{53}^{(i)} C_{3i} + d_{54}^{(i)} C_{4i} + d_{55}^{(i)} C_{5i} + d_{56}^{(i)} C_{6i} = 0, \\ d_{61}^{(i)} C_{1i} + d_{62}^{(i)} C_{2i} + d_{63}^{(i)} C_{3i} + d_{64}^{(i)} C_{4i} + d_{65}^{(i)} C_{5i} + d_{66}^{(i)} C_{6i} = 0, \end{cases} \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} d_{1n}^{(i)} &= (a_{ni} + b_{ni}j) \left[(1+n)(a_{ni} + b_{ni}j)^2 + 2(1+n) - I_i^2 \right] - (1+n)(a_{ni} + b_{ni}j) \left[(a_{ni} + b_{ni}j)^2 + (1+n + I_i^2) \right] + \\ &+ r_{11} \left[(1+n)(a_{ni} + b_{ni}j)^2 + 2(1+n) - I_i^2 \right], \\ d_{2n}^{(i)} &= -k^2(a_{ni} + b_{ni}j) \left[(1+n)(a_{ni} + b_{ni}j)^2 + 2(1+n) - I_i^2 \right] - k^2 \left[(a_{ni} + b_{ni}j)^2 (1+n) + 2(1+n) - I_i^2 \right] + \\ &+ k^2(a_{ni} + b_{ni}j)^4 + (a_{ni} + b_{ni}j)^2 \left[(k^2 + 1)I_i^2 + 2k^2 - (1+n)^2 \right] + (k^2 - I_i^2)(2+n - I_i^2) - \\ &- r_{33}(a_{ni} + b_{ni}j) \left[(a_{ni} + b_{ni}j) + 1+n + I_i^2 \right], \\ d_{3n}^{(i)} &= [(a_{ni} + b_{ni}j) + r_{44}] \left\{ k^2(a_{ni} + b_{ni}j)^4 + [(k^2 + 1)I_i^2 + 2k^2 - (1+n)^2](a_{ni} + b_{ni}j)^2 + (k^2 - I_i^2)(2+n + I_i^2) \right\}, \\ d_{4n}^{(i)} &= \left\{ (a_{ni} + b_{ni}j) \left[(1+n)(a_{ni} + b_{ni}j)^2 + 2(1+n) - I_i^2 \right] - (1+n)(a_{ni} + b_{ni}j) \left[(a_{ni} + b_{ni}j)^2 + 1+n + I_i^2 \right] - \right. \\ &- r_{11} \left[(1+n)(a_{ni} + b_{ni}j)^2 + 2(1+n) - I_i^2 \right] \left. \right\} e^{(a_{ni} + b_{ni}j)H}, \\ d_{5n}^{(i)} &= \left\{ -k^2(a_{ni} + b_{ni}j) \left[(1+n)(a_{ni} + b_{ni}j)^2 + 2(1+n) - I_i^2 \right] - k^2 \left[(1+n)(a_{ni} + b_{ni}j)^2 + 2(1+n) - I_i^2 \right] + \right. \\ &+ k^2(a_{ni} + b_{ni}j) + (a_{ni} + b_{ni}j)^2 \left[(k^2 + 1)I_i^2 + 2k^2 - (1+n)^2 \right] + (k^2 - I_i^2)(2+n - I_i^2) + \\ &+ r_{33}(a_{ni} + b_{ni}j) \left[(a_{ni} + b_{ni}j)^2 + 1+n + I_i^2 \right] \left. \right\} e^{(a_{ni} + b_{ni}j)H}, \\ d_{6n}^{(i)} &= [(a_{ni} + b_{ni}j) - r_{44}] \left\{ k^2(a_{ni} + b_{ni}j)^4 + [(k^2 + 1)I_i^2 + 2k^2 - (1+n)^2](a_{ni} + b_{ni}j)^2 + \right. \\ &+ (k^2 - I_i^2)(2+n + I_i^2) \left. \right\} e^{(a_{ni} + b_{ni}j)H}. \end{aligned} \quad (37)$$

Из условия нетривиальности решения системы (36) определяем собственные значения I_i ($i = \overline{1, \infty}$) и постоянные C_{1i} , C_{2i} , C_{3i} , C_{4i} , C_{5i} , C_{6i} . В частности, получим трансцендентное уравнение для определения параметров I_i вида

$$\begin{vmatrix} d_{11}^{(i)} & d_{12}^{(i)} & d_{13}^{(i)} & d_{14}^{(i)} & d_{15}^{(i)} & d_{16}^{(i)} \\ d_{21}^{(i)} & d_{22}^{(i)} & d_{23}^{(i)} & d_{24}^{(i)} & d_{25}^{(i)} & d_{26}^{(i)} \\ d_{31}^{(i)} & d_{32}^{(i)} & d_{33}^{(i)} & d_{34}^{(i)} & d_{35}^{(i)} & d_{36}^{(i)} \\ d_{41}^{(i)} & d_{42}^{(i)} & d_{43}^{(i)} & d_{44}^{(i)} & d_{45}^{(i)} & d_{46}^{(i)} \\ d_{51}^{(i)} & d_{52}^{(i)} & d_{53}^{(i)} & d_{54}^{(i)} & d_{55}^{(i)} & d_{56}^{(i)} \\ d_{61}^{(i)} & d_{62}^{(i)} & d_{63}^{(i)} & d_{64}^{(i)} & d_{65}^{(i)} & d_{66}^{(i)} \end{vmatrix} = 0, \quad (38)$$

причем круговые частоты колебаний w_i связаны с I_i известной зависимостью (6):

$$w_i = \frac{I_i}{R} \sqrt{\frac{E_0}{r_0(1-n^2)}} \quad (i = \overline{1, \infty}), \quad (39)$$

G_1, G_2, G_3 определяют соответствующие формы свободных колебаний неоднородной цилиндрической оболочки.

Формулы обращения (12) совместно с выражениями (23), (35) и представляют общее решение рассматриваемой задачи об осесимметричных колебаниях неоднородной цилиндрической оболочки.

Частные случаи закрепления. Численные результаты. Варьируя коэффициенты жесткости r_{11}, r_{33}, r_{44} , можно исследовать различные случаи закрепления торцов оболочки.

1. Упруго закрепленная по торцам оболочка. Для этого необходимо задаться лишь коэффициентами r_{11}, r_{33}, r_{44} , соответствующими наложенным связям.

2. Шарнирное закрепление торцов цилиндра при $z=0, H$. В этом случае в граничных условиях (27), а также в выражениях для коэффициентов $d_{11}^{(i)}, \dots, d_{66}^{(i)}$ следует принять коэффициенты жесткости $r_{11} = r_{33} = r_{44} = 0$.

3. Жесткое защемление по торцам цилиндра при $z=0, z=H$. Для этого необходимо разделить все члены уравнений (27) и выражений (37) на r_{11}, r_{33}, r_{44} , а затем осуществить предельные переходы: $r_{11} \rightarrow \infty, r_{33} \rightarrow \infty, r_{44} \rightarrow \infty$.

4. Если проделать процедуры, описанные в п. 3 для первых трех уравнений (27) и выражений (37) для $d_{11}^{(i)}, \dots, d_{36}^{(i)}$, а в 2 соответственно для оставшихся уравнений (27) и выражений (37) для $d_{41}^{(i)}, \dots, d_{66}^{(i)}$, то получим случай жесткого защемления оболочки на торце $z=0$ и шарнирно закрепленной – на $z=H$.

Возможны также и другие комбинации закрепления оболочки, например совмещение жесткой заделки с упругим защемлением по торцам оболочки или шарнирного и упругого закрепления.

Наконец, если $f_1(r) = f_2(r) = 1$ ($n_1 = n_2 = m_1 = m_2 = g_1 = g_2 = g_{12} = 1$), то построенное решение (12), (23), (35), (36) и приведенные выше его частные случаи справедливы для однородных оболочек.

В качестве примера рассматривалась железобетонная цилиндрическая защитная оболочка реакторного отделения АЭС с блоками ВВЭР-1000. Расчеты производились при следующих данных: $R = 23,0 \text{ м}$; $E_0 = 4,12 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $n = 0,16$; $r_0 = 2,85 \cdot 10^3 \text{ кгс/м}^3$; $k_1 = 0,86$; $H = 60 \text{ м}$; $h = 1,2 \text{ м}$; $g_i = 0,01$. Для соответствующих конструктивному решению защитных оболочек значений коэффициентов жесткости $r_{11} = r_{33} = 0$, $r_{44} = 130$, были приняты линейные законы наведенной неоднородности $f_1(r) = 1 + \frac{r - (h - h_1)}{2h}$, $f_2(r) = 1 + \frac{r - (h - h_1)}{5h}$, при которых значения E и r на внешней поверхности оболочки $r = h_2$ сохраняются, т. е. $E(h_2) = E_0$, $r(h_2) = r_0$

Т а б л и ц а 1

Собственные значения и частоты свободных колебаний цилиндрического покрытия защитной оболочки АЭС без учета наведенной неоднородности

Параметры оболочки	$R=23,0 \text{ м}, E_0=4,12 \cdot 10^{10} \text{ Па}, n=0,16, r_0=2,85 \cdot 10^3 \text{ кгс/м}^3, k_1=0,86, H=60 \text{ м}, h=1,2 \text{ м},$					
	Однородная оболочка					
	Шарнирно опертый контур		Упруго закрепленный контур		Жестко защемленный контур	
№ тона колебаний	I_i	$w_i, \text{ Гц}$	I_i	$w_i, \text{ Гц}$	I_i	$w_i, \text{ Гц}$
1	0,6152	16,405	0,6505	17,347	0,6515	17,373
2	0,8316	22,176	0,8745	23,320	0,8752	23,339
3	0,8928	23,808	0,9353	24,941	0,9377	25,005
4	1,0169	27,117	1,1073	27,128	1,1081	29,549
5	1,0253	27,341	1,2564	33,504	1,2578	33,541

Т а б л и ц а 2

Собственные значения и частоты свободных колебаний цилиндрического покрытия защитной оболочки АЭС с учетом наведенной неоднородности

Параметры оболочки	$R=23,0 \text{ м}, E_0=4,12 \cdot 10^{10} \text{ Па}, n=0,16, r_0=2,85 \cdot 10^3 \text{ кгс/м}^3, k_1=0,86, H=60 \text{ м}, h=1,2 \text{ м},$					
	Неоднородная оболочка					
	Шарнирно опертый контур		Упруго закрепленный контур		Жестко защемленный контур	
№ тона колебаний	I_i	$w_i, \text{ Гц}$	I_i	$w_i, \text{ Гц}$	I_i	$w_i, \text{ Гц}$

1	0,5445	14,520	0,6142	16,379	0,6152	16,405
2	0,7154	19,077	0,7705	20,547	0,7714	20,571
3	0,8315	22,173	0,9107	24,285	0,9115	24,307
4	0,9492	25,312	0,9607	25,619	0,9608	25,621
5	0,9537	25,432	0,9951	26,536	0,9951	26,536

В табл. 1 и 2 приведены собственные значения I_i ($i=\overline{1,5}$) и соответствующие им частоты свободных колебаний w_i цилиндрического покрытия защитной оболочки АЭС без учета (табл. 1) и с учетом (табл. 2) наведенной неоднородности. Наряду с реальными (упругими) условиями сочленения оболочки с цилиндрической частью конструкции рассмотрены также идеализированные схемы шарнирного и жесткого закрепления на контурах.

Вследствие деградации конструкции при наведенной неоднородности происходит заметное снижение частот колебаний, причем спектр становится более плотным.

Аналогичная тенденция наблюдается на графиках (рис. 2), характеризующих изменения w_i ($i=\overline{1,7}$) в зависимости от относительной толщины h/R однородных и неоднородных оболочек. На рис. 2: сплошная линия – однородная оболочка, пунктирная – неоднородная оболочка. Безразмерные нормированные собственные формы осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки для основного тона $i=1$ приведены на рис. 3.

Р и с. 2. Зависимости кинетики частоты

Р и с. 3. Безразмерные нормированные собственные формы осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сеницкий Ю.Э. Уравнения движения неоднородных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью // Известия ВУЗов. Строительство. 2002. № 10. С. 19-27.
2. Сеницкий Ю.Э. Еленицкий Э.Я. О физически непротиворечивой модели уточненной теории пластин и оболочек // Докл. РАН 1993. Т. 331. № 5. С. 580-582.
3. Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во СГУ, 1986. 176 с.
4. Gederbaum G. Heller R.A. Dynamik deformation of ortotropic cylinders // Trans ASME. Journal. Pressure vessel Technol. 1989. V. 111. № 2. P. 97-101.
5. Цейтлин А.И. Кусаинов А.А. Методы учета внутреннего трения в динамических расчетах конструкций. Алма-Ата: Наука. 1987. 238 с.

Поступила 12.10.2003 г.